勾配射影法による交通量配分法の岡山市道路網への適用

岡山大学　正員　井上博司

1．はじめに

自動車が道路上を走行するときに要する所要時間が，道路上の交通量によって変化することを前提として，すべての運転者が起終点間の所要時間最短の経路を選択するときに現出する道路網上の交通流の分布を求める問題いわゆる等時間原則による交通量配分について，これまで勾配射影法による計算方法を提案してきた[1),2)]。

等時間原則による交通量配分については，計算は理論的には可能であるが実際には時間がかかりすぎることから，近似計算を除いて大規模な道路網で計算が実行されたことはこれまでなく，実用性に欠けるということが指摘されてきた。

本研究ではすでに発表している計算方法に改良を加えた結果，一般の大規模な道路網でも計算が実際に可能なように実用化を行うことができたので，この改良された計算方法および岡山市を中心とする地域の道路網に適用した結果を報告する。

2．勾配射影法による等時間原則交通量配分の定式化およびその解法

等時間原則による交通量配分は，経路交通量を変数にして次のように定式化できる。

目的関数

$$F = \sum_j \int_0^{X_j} f_j(x)\,dx \quad \rightarrow \mathrm{Min} \tag{1}$$

制約条件

$$X_j = \sum_i \sum_k r_{kj}^i x_k^i \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,m) \tag{2}$$

$$\sum_k x_k^i = S^i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,\ell) \tag{3}$$

$$x_k^i \geqq 0 \qquad \left(\begin{array}{l} i=1,2,\cdots\cdots,\ell \\ k=1,2,\cdots\cdots,n^i \end{array}\right) \tag{4}$$

ここに，
$f_j(X)$ ：リンクjの交通量に関する単調増加関数として表わされたリンクjの走行所要時間
X_j ：リンクjを通る経路交通量を足し合わせたリンクjの交通量
x_k^i ：ODペアーiの経路kに割り当てられる交通量

$$r_{kj}^i = \begin{cases} 1：\text{ODペアー}i\text{の経路}k\text{がリンク}j\text{を経由するとき} \\ 0：\text{ODペアー}i\text{の経路}k\text{がリンク}j\text{を経由しないとき} \end{cases}$$

S^i ：ODペアーiのOD交通量

ここでは起終点間のすべての可能な経路を対象にしているが，後に示すように実際に配分の対象とする経路はそのうちの限られたものであり，しかもそれらは計算の過程で求まってくるものである。したがって経路を前もって与える必要はないのである。なおこの非線形最適化問題は凸計画であって，局所的最適解は全域的最適解に一致する。

いま目的関数FのODペアーiの経路kの交通量x_k^iに関する偏微分をとると，

$$\frac{\partial F}{\partial x_k^i} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial X_j}\frac{\partial X_j}{\partial x_k^i} = \sum_j f_j(X_j)\, r_{kj}^i \tag{5}$$

となる。ところが$\sum_j f_j(X_j) r_{kj}^i$はODペアーiの経路kの走行所要時間に等しい。そこでこれをt_k^iとおくと，

$$g^i \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x_k^i}\right) = \begin{pmatrix} t_1^i \\ t_2^i \\ \vdots \\ t_{n^i}^i \end{pmatrix} \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,\ell) \tag{6}$$

となる。

さていま目的関数Fを最小にするということから，目的関数の勾配ベクトルの負の方向 $-\nabla F(x)$ を考える。この方向は明らかに使用可能であって，この方向への探索によって目的関数の値は局所的には改良される。ところがこの方向は実行可能ではないから，このとき制約条件が侵されることは明らかである。そこでこの方向ベクトル $-\nabla F(x)$ からいかにして実行可能な方向を得るかということになるが，そのために勾配射影法の適用を考える。勾配射影法にはローゼンの勾配射影法，共役勾配射影法などいくつかの方法があるが，ここではローゼンの勾配射影法を適用する。その理由は後に明らかになるように，ローゼンの勾配射影法を用いると射影マトリクスが非常に簡潔な形に表わされ，しかも制約条件が変わってもその都度射影マトリクスを計算しなおすことが不必要であることと，最短経路探索を含む配分計算の手順をきわめて合理的に説明できるからである。一般の非線形計画の問題では，共役勾配射影法（可変計量方向射影法）が勾配射影法のうちでは最も強力であるといわれているが，この方法を等時間原則配分に適用すると必ずしも簡潔な形で表現できないし，また実際の計算においても制約条件が変わるたびに一次独立な方向を計算しなおさなければならないので，計算の効率がローゼンの勾配射影法にくらべて必ずしも有利であるとはいえない。

ローゼンの勾配射影法では勾配の射影は射影マトリクスに勾配ベクトルを乗じることによって求められる。射影マトリクスは次式で与えられる。

$$P = E - A[A^TA]^{-1}A^T \tag{7}$$

ここにAは制約条件のうちで実際に効いているすなわち等式制約条件になる条件式の係数ベクトルを列要素にもつマトリクスである。

いまあるステップでODペアー i に関する経路を適当に並べかえ，交通量の流れている経路を $1, 2, \cdots\cdots, r$，他のすべての交通量の流れていない経路を $r+1, r+2, \cdots\cdots, r+s$ とすると，

$$A^i = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ r+1 \\ r+2 \\ \vdots \\ r+s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & r+1 & r+2 & \cdots\cdots & r+s \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ 1 & & 0 & \\ \vdots & & & \\ 1 & & & \\ \hline 1 & 1 & & 0 \\ 1 & & 1 & \\ \vdots & 0 & & \ddots \\ 1 & & & 1 \end{array}\right] \end{array} \tag{8}$$

となる。これより射影マトリクスを計算すると，

$$P^i = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ r+1 \\ r+2 \\ \vdots \\ r+s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & \cdots\cdots & r & r+1 & r+2 & \cdots\cdots\ r+s \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} 1-\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & \cdots\cdots & -\frac{1}{r} & \\ -\frac{1}{r} & 1-\frac{1}{r} & \cdots\cdots & -\frac{1}{r} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & \cdots\cdots & 1-\frac{1}{r} & \\ \hline & & & & \\ & 0 & & & 0 \\ & & & & \end{array}\right] \end{array} \tag{9}$$

を得る。よってODペアー i の経路交通量に関する勾配の負の方向を射影マトリクスに乗じて得られる射影は，

$$-P^ig^i = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ r \\ r+1 \\ r+2 \\ \vdots \\ r+s \end{array} \left[\begin{array}{c} t_0^i - t_1^i \\ t_0^i - t_2^i \\ \vdots \\ t_0^i - t_r^i \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}\right], \qquad t_0^i = \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{r} t_k^i \tag{10}$$

となる。

ここで計算の効率を上げるために変数の尺度について考える。ODペアー i の経路交通量は $\sum_k x_k = S^i$ という条件式で拘束されているので，探索方向ベクトルを決めるとき射影を S^i 倍するのが適当であろう。このことよりODペアー i の経路交通量に関する探索方向として $d^i = -S^iP^ig^i$ を用いる。

交通量の流れていない経路 $r+1, r+2, \cdots\cdots, r+s$ に関しては探索方向ベクトルの要素が0であるから，これらの経路を探索方向ベクトルから取り除いてもかまわない。よって経路交通量に関する次の探索方向ベクトルを得る。

$$\mathbf{d}=\begin{bmatrix}\mathbf{d}^1\\ \mathbf{d}^2\\ \vdots\\ \mathbf{d}^\ell\end{bmatrix},\qquad \mathbf{d}^i=\begin{array}{c}1\\2\\ \vdots\\ \\ r\end{array}\begin{bmatrix}s^i(t_0^i-t_1^i)\\ s^i(t_0^i-t_2^i)\\ \vdots\\ \\ s^i(t_0^i-t_r^i)\end{bmatrix}\qquad (i=1,2,\cdots\cdots,\ell) \tag{11}$$

上式で与えられる探索方向を用いて，この方向への一次元最小化を実行すればよいのであるが，探索はこの際の制約条件が侵されない範囲で行われなければならない。よって $d_k^i<0$ となる経路に対しては，探索のステップ幅λは　$x_k^i+\lambda d_k^i \geqq 0$　より，

$$\lambda \leqq -\frac{x_k^i}{d_k^i} \tag{12}$$

の範囲でなければならないことになる。ここに x_k^i は現在のステップにおいてODペアーiの経路kに配分されている交通量である。よって d_k^i が負のすべての経路に対して上の条件を満足させるためには，

$$0 \leqq \lambda \leqq \lambda_{max},\qquad \lambda_{max}=\min_{i,k}\left(-\frac{x_k^i}{d_k^i}\right)\qquad (d_k^i<0) \tag{13}$$

でなければならない。この範囲内で一次元最小化の方法を用いて目的関数の値をより小さくすることができる。

このようにして経路交通量の値が次々と更新されていくが，それらの値の最適性の判定はローゼンの勾配射影法では Kuhn-Tucker 条件が用いられる。それは　$\mathbf{d}=\mathbf{0}$　および

$$\boldsymbol{\alpha}=[A^TA]^{-1}A^T g \geqq \mathbf{0} \tag{14}$$

という条件である。

ODペアーiに関しては式(8)より，

$$[A^{i^T}A^i]^{-1}A^{i^T}=\begin{array}{c} \\ \\ r+1\\ r+2\\ \vdots\\ \\ r+g\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}1 & 2 & \cdots & r & r+1 & r+2 & \cdots\ r+g\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc|cccc}\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & \cdots & \frac{1}{r} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \hline -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & \cdots & -\frac{1}{r} & 1 & & & \\ -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & \cdots & -\frac{1}{r} & & 1 & & 0\\ & \cdots & \cdots & & & & \ddots & \\ & \cdots & \cdots & & & 0 & & \\ -\frac{1}{r} & -\frac{1}{r} & \cdots & -\frac{1}{r} & & & & 0\end{array}\right]\end{array} \tag{15}$$

であるから，式(14)の条件は

$$\boldsymbol{\alpha}^i=\begin{array}{c} \\ r+1\\ r+2\\ \vdots\\ \\ r+g\end{array}\begin{bmatrix}t_0^i\\ t_{r+1}^i-t_0^i\\ t_{r+2}^i-t_0^i\\ \vdots\\ \\ t_{r+g}^i-t_0^i\end{bmatrix}\geqq \mathbf{0} \tag{16}$$

となる。　$\mathbf{d}=\mathbf{0}$　および　$\boldsymbol{\alpha}\geqq\mathbf{0}$　が成り立つとき，交通量の流れている経路については所要時間が皆等しく，しかもそれらは交通量の流れていないいかなる経路の所要時間よりも小さいという状態の成り立っていることは明らかである。

もし $\mathbf{d}=\mathbf{0}$　でないなら，その方向への一次元最小化を実行すればよい。　$\mathbf{d}=\mathbf{0}$　で $\boldsymbol{\alpha}\geqq\mathbf{0}$　でないなら，すなわち α のうちで負の値をもつ要素が存在するなら，そのうちの最小のものを求め，たとえばこれをα_{ik}とすると，この要素に対応する実効制約条件式 $x_k^i=0$ を行列 A から取り除けばよい。

ところで

$$\min_k \alpha_{ik}=\min_k(t_k^i-t_0^i)=\min_k t_k^i \tag{17}$$

であるから，ODペアーiについてαが負であってそのうちの最小の値をもつ経路とは，ODペアーiの起終点間の最短経路探索を行って求められる経路で，これまで交通量の配分されていないものである。もし最短経路探索で求まった経路が，すでに配分の対象とされている交通量の配分されている経路であれば，他の経路の所要時間はその最短経路の所要時間よりも大きいか少くとも等しいのであるから，すでに条件 $\boldsymbol{\alpha}^i\geqq\mathbf{0}$ は満たされて

いることがわかる。

このことは配分の対象とする経路を初めから与えておく必要はなく，Kuhn-Tucker条件の判定のために最短経路探索を行い，この結果求まる新たな経路を配分対象経路に繰り入れていけばよいことを意味するものである。

ところで一次元最小化の結果，ステップ幅が式(13)の限界の値に一致したなら，このとき対応する経路の交通量はゼロとなっているはずであるから，これを x_k^i とすると，$x_k^i=0$ という実効制約条件を A^i の中に含めればよい。行列Aに実効制約条件式が付加されると射影マトリクスが変わるけれども，これはその都度あらたに計算しなおす必要はない。なぜなら式(11)からわかる通り，探索方向ベクトルは配分の対象とする経路の所要時間を計算することだけで求まるのである。したがって交通量がゼロとなった経路は，その点での探索方向ベクトルの要素が正にならない限り捨て去ってしまえばよいのである。行列Aに実効制約条件式を1つ付加することは，実際には経路を1つ捨て，残りの配分対象経路の順序を入れ換えるだけである。同様に行列Aから実効制約条件式を削除するときも，実際には対応する経路を配分対象経路に含めるだけのことである。

なおこの方法では初めに実行可能な点を初期値として与えておかねばならない。これはどのようなものであってもよいのであるが，妥当なものとしてたとえばゼロフロー時の起終点間の最短経路にそれぞれのOD交通量を配分したものを用いればよいであろう。

3．一次元最小化の方法

現在の点から式(11)で与えられる探索方向への一次元最小化は通常よく用いられる黄金分割，Fibonacci 級数を用いる方法あるいは Armijo の方法などの汎用的な方法を用いることができる。しかしこれらの方法では各リンクの走行時間を計算する回数が多く，あまり効率的であるとはいえない。そこでここでは唯一回のステップで一次元最小化を実行する方法を示す。

いま目的関数をリンク交通量に関して，2階の導関数の項までテーラー展開すると，

$$F(\mathbf{X}) \cong F(\mathbf{X}_0) + (\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)^T \nabla F(\mathbf{X}_0) + \frac{1}{2}(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0)^T \nabla^2 F(\mathbf{X}_0)(\mathbf{X}-\mathbf{X}_0) \tag{18}$$

ここで $\mathbf{X}_0$ はリンク交通量の現在の値である。ところで，

$$\mathbf{X}-\mathbf{X}_0 \equiv \lambda \mathbf{D} = \lambda \left(\sum_i \sum_k r_{kj}^i d_k^i \right) \tag{19}$$

$$\nabla F(\mathbf{X}) = \left(t_j(x_j) \right) \tag{20}$$

$$\nabla^2 F(\mathbf{X}) = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_{j'}} \right) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_{j'}} = \begin{cases} \dfrac{dt_j(x_j)}{dx_j} & (j=j') \\ 0 & (j \neq j') \end{cases} \tag{21}$$

であるからこれより

$$F(\mathbf{X}) \cong F(\mathbf{X}_0) + \lambda \mathbf{D}^T \nabla F(\mathbf{X}_0) + \frac{\lambda^2}{2} \mathbf{D}^T \nabla^2 F(\mathbf{X}_0) \mathbf{D} \tag{22}$$

式(22)の右辺を最小にする λ の値 λ_0 は λ で微分して0とおくことによって得られるから，

$$\mathbf{D}^T \nabla F(\mathbf{X}_0) + \lambda \mathbf{D}^T \nabla^2 F(\mathbf{X}_0) \mathbf{D} = 0 \tag{23}$$

よって

$$\lambda_0 = - \frac{\mathbf{D}^T \nabla F(\mathbf{X}_0)}{\mathbf{D}^T \nabla^2 F(\mathbf{X}_0) \mathbf{D}} = - \frac{\sum_j D_j t_j(x_{0j})}{\sum_j D_j^2 \left. \dfrac{dt_j(x_j)}{dx_j} \right|_{x_j = x_{0j}}} \tag{24}$$

を得る。経路交通量，リンク交通量の新な値は，

$$x_k^i := x_k^i + \lambda_0 d_k^i \qquad (i=1,2,\cdots\cdots,l\,;\ k=1,2,\cdots\cdots\cdots,r) \tag{25}$$

$$X_j := X_j + \lambda_0 d_j \qquad (j=1,2,\cdots\cdots\cdots,m) \tag{26}$$

となる。この計算を2,3回繰り返せばよいのであるが，実用的にはほとんど1回の計算で十分である。

なおλについては式(13)より $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_{max}$ でなければならないから，$\lambda_0 > \lambda_{max}$ のときには，$\lambda_0 := \lambda_{max}$ としなければならないことはいうまでもない。

計算量を軽減するためには，もし $F(\mathbf{X}_0 + \lambda_{max}\mathbf{D}) < F(\mathbf{X}_0)$ なら $\lambda_0 = \lambda_{max}$ とし，$F(\mathbf{X}_0 + \lambda_{max}\mathbf{D}) \geqq F(\mathbf{X}_0)$ なら一次元最小化を実行するようにすればよいであろう。

この一次元最小化法では，各リンクの走行時間および走行時間関数の微係数をそれぞれ一度だけ計算すればよいので，汎用的な方法に較べ計算量は大幅に軽減される。

4．経路の記憶方法

勾配射影法による計算方法では，反復の各段階で探索方向を求めるのに各経路の走行時間を計算しなければならない。このためには経路を表わす係数 r^i_{kj} の値を記憶しておかなければならない。ところがこの係数の数はODペアーの数×繰り返しの回数×リンクの数だけあるから大きなディメンションサイズが必要である。このため計算機のメモリーの1ワードに1個の要素を記憶させたのではメモリーが不足することは明らかである。ところが r^i_{kj} の値は0または1であるから，メモリーの1ビットに1要素を記憶させることができ，こうすることによってメモリーが大幅に節減できることになる。

たとえば1ワード＝32ビットの計算機では1ワードに32個の要素を記憶させることができるから，400リンクの道路網の場合，13ワードを使えば1本の経路を記憶できることになる。その内部的な表現は次のようになる。

	1W						2W						3W						......	13W					
	0	1	2	3	……	31	0	1	2	3	……	31	0	1	2	3	……	31		0	1	2	3	……	15
	0	1	1	0	……	0	0	1	0	1	……	0	1	1	0	0	……	1	……………	0	0	1	0	……	0

このようなビット操作の命令はアセンブリー言語のみならず，FORTRAN言語においても今日の大型計算機では準備されているのが普通である。

5．配分計算の手順

配分計算の手順をまとめると次のようになる。

(i) ゼロフロー時の各リンクの走行所要時間を用いて，すべての起終点間の最短経路探索を行う。これらの最短経路を記憶する。それぞれのOD交通量を求まった最短経路に割り当て，各リンクの走行所要時間を修正する。

(ii) すべての起終点間の最短経路探索を行う。求まった経路が新しい経路であれば記憶する。すでに記憶しているものと同じであればこれを捨てる。新しい経路が求まらなければKuhn–Tucker条件が成立しているので計算を終る。

(iii) 記憶している配分対象経路について，探索方向ベクトルを求める。

$$\mathbf{d} = \left(d^i_k \right), \quad d^i_k = s^i (t^i_0 - t^i_k)$$

もし $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ なら(ii)へ。

(iv) 配分対象経路のうちで，$x^i_k = 0$ かつ $d^i_k < 0$ となっている経路があればこれらの経路を捨てる。求まった探索方向へのステップ幅の最大値を求める。

$$\lambda_{max} = \min_{i,k} \left(-\frac{x^i_k}{d^i_k} \right) \qquad (d^i_k < 0)$$

(v) リンクについての探索方向ベクトル $\mathbf{D}$ を求める。

$$\mathbf{D} = \left(D_j \right), \quad D_j = \sum_i \sum_k r^i_{kj} d^i_k$$

$0 \leqq \lambda \leqq \lambda_{max}$ の範囲でこの方向への一次元最小化を実行する。

経路交通量，リンク交通量の値を更新する。

$$x_k^i := x_k^i + \lambda_0 d_k^i$$

$$X_j := X_j + \lambda_0 D_j$$

更新されたリンク交通量を用いて，リンク走行時間を修正する。(iii)へ。

上に述べた手順では Kuhn－Tucker 条件が完全に成立するまで繰り返すとしているが，実用的にはあらかじめ定められた回数だけ (ii)，(iii)，(iv)，(V) を繰り返せばよい。その場合の繰り返し回数は数回で十分である。

6．岡山市道路網への適用

本計算方法を適用した一例として，岡山市を中心とする地域の道路網への配分を行った結果を示す。この計算では岡山市の市街地地域の道路網を対象としており，市周辺部の道路網はかなり簡略化している。ノード数は121，うちセントロイドは50，リンク数は372である。OD交通量は昭和46年に実施された岡山県南都市圏パーソントリップ調査で集計された2桁ゾーン自動車OD表を用いたが，市街地中心部では対象とする道路網に対しゾーン分割が粗すぎるので，ゾーンをさらに細分した。

各リンクの走行時間関数は，$f(x) = T_0 e^{cx}$ の形を用いた。定数は道路を16のランクに分けて計算した。

計算された結果を図.1に示す。この計算では繰り返しを4回行っている。したがって最短経路探索は，初期値を求めるための探索とあわせて5回行っていることになる。4回の繰り返し後の交通量の流れている経路の所要時間の差は1秒以下である。

計算は岡山大学計算機センターのACOS 700で行った。計算の実行に使用したメモリーは95KW，CPU使用時間は510秒であった。

7．おわりに

従来大規模な道路網では不可能とされていた等時間原則配分を，大規模な道路網でも計算できるように実用化を行うことができた。この計算方法の特徴は，

(1) 走行時間関数にどのようなものを用いてもよいこと，

(2) 計算の過程が単純明解であるから，プログラミングがしやすいこと，

(3) 計算の過程をきわめて合理的に説明できること，

(4) 計算の効率が優れていること，

などである。

なおこの計算方法は，等時間原則配分の厳密解を求めるものであるが，計算方法に非常に柔軟性があるため，近似解を求めるためにも使用することができる。その場合の計算の効率は，従来用いられてきた分割配分法，Wayne法，Flank-Wolfe分解原理を用いる方法などをはるかに凌ぐものである。

参考文献

1) H. Inouye : "An Investigation on Computational Methods of Traffic Assignment in Road Networks", Memoirs of the School of Engineering Okayama University, Vol.11, No.2, January 1977, pp. 51－71.

2) 井上博司："勾配射影法による等時間原則交通量配分の計算法"，土木学会第34回年次学術講演会講演概要集第4部，1979，pp.110－111.

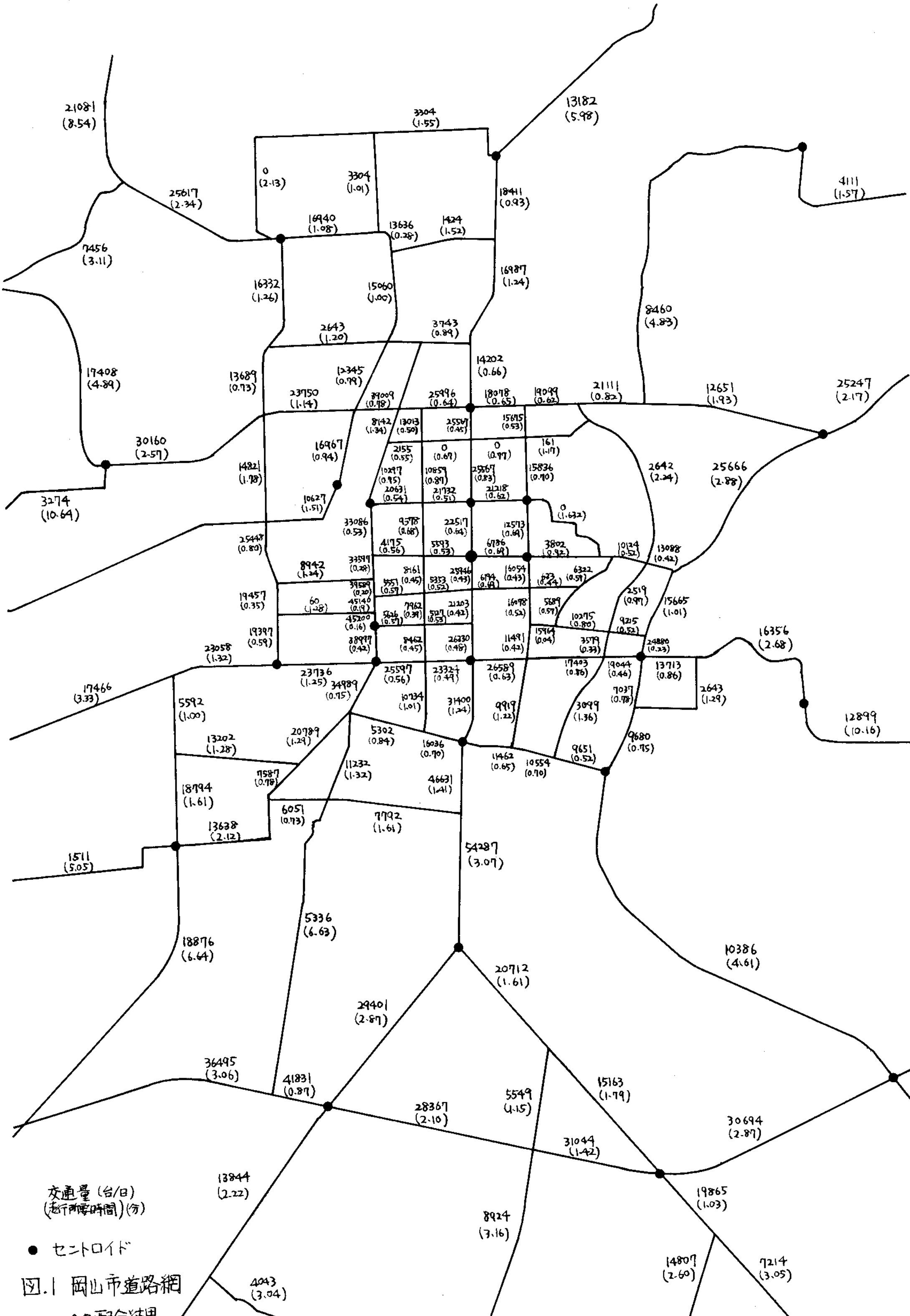

図.1 岡山市道路網
への配分結果