ＯＤ交通量変動が相関を有する場合の道路網交通需要推計モデル

金沢大学工学部　正員　飯田恭敬
○　金沢大学工学部　学生員　高村義晴

1. まえがき

道路区間交通量を主な情報源として確率論的にＯＤ交通量を推計する試みはこれまで既になされてきている[1),2)]. この方法では既存の実績ＯＤを利用するため，実績ＯＤが得られた日と推計しようとする日のそれぞれのＯＤ交通量の確率分布が必要とされ，しかもＯＤ交通量の確率分布が時間的に変化しないことを前提とするものであった. 本報告では実績ＯＤ調査時と推計時のＯＤ交通量の統計的性質が変化する場合も含めた一般的な場合について考察することにする. 具体的には，実績ＯＤ調査時と推計時の確率分布の変化と変動要因を考慮して，以下の2つのタイプに場合分けしてそれぞれの推計法を示す.

i) 不規則変動のみを考慮すればよい場合（タイプⅠ）

ii) 曜日変動・週間変動・月間変動等の周期変動も含めて考察する必要がある場合（タイプⅡ）

タイプⅡのように，推計時と実績ＯＤ調査時とで不規則変動成分以外の変動要因があるとき，各ＯＤは相関をもつと考えられタイプⅠとは別な取り扱いをしなければならない. タイプⅡとタイプⅠの大きな違いは各ＯＤを独立な確率変数としてよいかどうかにあり，タイプⅡでは曜日・月間変動等の変動特性を相関係数を用いて表わすことにする. ただし以下の議論においてＯＤ別道路区間利用率は既知とし，実績ＯＤには調査による誤差（サンプリング誤差等々）はないものとする.

説明の都合上，ＯＤ交通量を次のモデルで表わす. ここで大文字で示した文字は確率変数であり，実現値・確定値と区別し厳密を期した.

$T_{ij}(t) = a_{ij}(t) + \sum_s b_{ij}^s(t) + X_{ij}$　(1)　$a_{ij}(t)$：傾向変動

$E(X_{ij}) = 0$　(2)　$b_{ij}^1(t), b_{ij}^2(t) \cdots b_{ij}^s(t)$：曜日変動・週間変動，月間変動等の周期変動

$V(X_{ij}) = \sigma_{ij}^2$　(3)　X_{ij}：不規則変動を表わす強定常な確率変数

実績ＯＤ調査時をt_0，推計時をt_1で表わせばそれぞれの日のＯＤ交通量は確率変数$T_{ij}(t_0)$，$T_{ij}(t_1)$で次のように与えられる.

$$T_{ij}(t_0) = a_{ij}(t_0) + \sum_s b_{ij}^s(t_0) + X_{ij} \quad (4)$$

$$T_{ij}(t_1) = a_{ij}(t_1) + \sum_s b_{ij}^s(t_1) + X_{ij} \quad (5)$$

式(2), (3), (4), (5)より

$$E\{T_{ij}(t_0)\} = a_{ij}(t_0) + \sum_s b_{ij}^s(t_0) \quad (6) \qquad E\{T_{ij}(t_1)\} = a_{ij}(t_1) + \sum_s b_{ij}^s(t_1) \quad (7)$$

$$V\{T_{ij}(t_0)\} = \sigma_{ij}^2 \quad (8) \qquad V\{T_{ij}(t_1)\} = \sigma_{ij}^2 \quad (9)$$

2. 推計タイプⅠ（不規則変動のみを考慮する場合）

t_0とt_1が近接し，曜日・週・月などが同じであるなどして$a_{ij}(t_0)+\sum_s b_{ij}^s(t_0)$と$a_{ij}(t_1)+\sum_s b_{ij}^s(t_1)$が近似的に等しいと考えられる場合がこのタイプである. もちろんt_0とt_1の間のtに対して$a_{ij}(t_0)+\sum_s b_{ij}^s(t_0) = a_{ij}(t)+\sum_s b_{ij}^s(t)$が成立する必要はない. 推計後，$a_{ij}(t_0)+\sum_s b_{ij}^s(t_0) \fallingdotseq a_{ij}(t_1)+\sum_s b_{ij}^s(t_1)$の仮定が正しかったかどうか，すなわち推計タイプⅠの採用が適当であったか否かについては後述の統計的検定によって判断することができる. ここでは既発表の最尤法を用いないベイズの方法による推計法を提案する.

2.1　OD交通量$T_{ij}(t)$の確率分布と不規則変動X_{ij}

$a_{ij}(t_0)+\sum_s b_{ij}^s(t_0)=a_{ij}(t_1)+\sum_s b_{ij}^s(t_1)=\mu_{ij}$ とすれば，式(4)・(5)より $T_{ij}(t_1)$, $T_{ij}(t_0)$は同一分布 $\mu_{ij}+X_{ij}$で表わされる．X_{ij}は偶然による不規則変動であるため，正規分布に従うことが直観され，μ_{ij}は確率変数でないことから $T_{ij}(t_1)$, $T_{ij}(t_0)$も正規分布となろうことは予想される．しかしこれを実証的に示すことは現段階では不可能である．筆者らは北陸自動車道の52年4月1日から53年3月31日までの各インターチェンジの流入日交通量についてインターチェンジごとに平日と土・日曜のデータをそれぞれに解析した結果，これが正規分布に従うという仮説はいずれも5%で有意であったという結果を得ている[3]．そこでここでは井上の方法[2]をより一般化した $T_{ij}(t_0)$, $T_{ij}(t_1)$の分布について論じてみよう．

$t=t_1$においてODペアがijで発生する可能性を有するトリップがn_{ij}あったとしよう．n_{ij}のうち第k番目のトリップが発生する確率を$p_{ij}(t_1)=p_{ij}^k$，また確率変数Y_{ij}^kはp_{ij}^kで1を$(1-p_{ij}^k)$で0の値をとるものと定義する．このとき$T_{ij}(t_1)=\sum_k^{n_{ij}} Y_{ij}^k$が成立する．確率変数群$\{Y_{ij}^1, Y_{ij}^2, \cdots, Y_{ij}^{n_{ij}}\}$が独立であるという仮定を設けるならば$T_{ij}(t_1)$は次の中心極限定理を用いることによってその分布形を決定することができる．

中心極限定理（ここで用いる中心極限定理は条件の厳しい場合の定理である．

Y_{ij}^kが平均値および分散

$$\mu_{ij}^k = E(Y_{ij}^k) \quad , \quad (\sigma_{ij}^k)^2 = E\{(Y_{ij}^k-\mu_{ij}^k)^2\} \qquad (10)$$

をもつ独立な確率変数であるとき，ある$m\,(>2)$に対して

$$\lim_{n_{ij}\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n_{ij}} E\{|Y_{ij}^k-\mu_{ij}^k|^m\}}{\left[\sum_{k=1}^{n_{ij}}(\sigma_{ij}^k)^2\right]^{m/2}} = 0 \qquad m>2 \qquad (11)$$

が成り立つならば $T_{ij}(t_1)=\sum_{k=1}^{n_{ij}} Y_{ij}^k$ は$n\to\infty$で平均値および分散がそれぞれ

$$\mu_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} \mu_{ij}^k \quad , \quad \sigma_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n_{ij}} (\sigma_{ij}^k)^2 \qquad (12)$$

で与えられる正規分布に近づく．

ここで式(11)は Liapounoff の条件とよばれる．

Y_{ij}^kの定義より式(13)(14)が成立し，これを式(11)に代入し，はさみ打ち法により評価すれば容易にLiapounoffの条件が満足されることを証明できる．

$$P(Y_{ij}^k = x) = (p_{ij}^k)^x(1-p_{ij}^k)^{1-x} \qquad (x=1,0) \qquad (13)$$

$$\mu_{ij}^k = p_{ij}^k \qquad (\sigma_{ij}^k)^2 = (1-p_{ij}^k)\,p_{ij}^k \qquad (14)$$

また式(14)を式(10),(12)に代入することにより式(15)が導かれる．

$$\sigma_{ij}^2 = \mu_{ij} - \sum_k^{n_{ij}} (p_{ij}^k)^2 = \sum_k^{n_{ij}} \{p_{ij}^k - (p_{ij}^k)^2\} \qquad (15)$$

$\{p_{ij}^1, p_{ij}^2, \cdots p_{ij}^k \cdots p_{ij}^{n_{ij}}\}$を$f(p_{ij})$の密度関数をもつ母集団の実現値と考えれば，$f(p_{ij})$の分布形によらず式(15)より期待値的に式(16)が成立することを導ける．

$$\therefore \quad \sigma_{ij}^2 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\mu_{ij}}{n_{ij}}\right)\mu_{ij} \qquad (16)$$

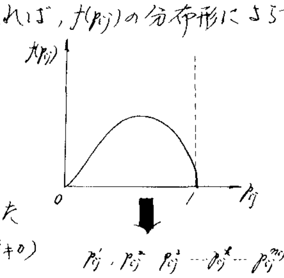

Fig. 1　実現値

ゆえに$T_{ij}(t_1)$は平均値μ_{ij}，分散σ_{ij}^2の正規分布に従うことが証明される．ただし分散は式(16)で与えられる．またn_{ij}はODペアがijで発生する可能性($p_{ij}^k\neq 0$)を有するトリップの総数である．なお式(16)は実際の時系列的なOD交通量の分散ではなく，それから傾向変動・各種の周期変動等を除いた不規則変動の分散である．

2.2　推計方針

2.1より$T_{ij}(t_0)$, $T_{ij}(t_1)$が正規分布$N_r(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$に従うことが導かれた．またタイプIでは不規則変動を対象

としているため，$T_{11}(t_0), T_{12}(t_1), \cdots, T_{nn}(t_0)$ そして $T_{11}(t_1), \cdots, T_{nn}(t_1)$ はそれぞれ独立であるとしてよいであろう．

しかし μ_{ij} は未知であるため，我々は $T_{ij}(t_1)$ の分布形を決定できない．そこで $T_{ij}(t_0)$ の実現値 t_{ij}^* を情報として用いる．この t_{ij}^* より次のようにして $T_{ij}(t_1)$ の分布形を推定する．

・Bayes確率の方法

古典的な方法である最尤法では母数を定数として扱うために，未知数 μ_{ij}（母数）を $T_{ij}(t_0)$ の実現値 t_{ij}^* で近似しなければ推計が不可能であり，この近似化による誤差は考慮されない．それに対してBayes確率の方法は母数 μ_{ij} を確率変数としてモデル化するため母数の推定に伴う不確定性と確率変数の本来のバラツキをBayesの定理を通して形式上統合できるという利点を有する．

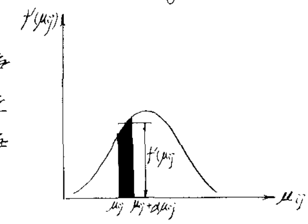

Fig. 2

母数 μ_{ij} が $[\mu_{ij}, \mu_{ij}+d\mu_{ij}]$ であると観測結果 t_{ij} を入手する前に判断する確率（事前確率）を $f'(\mu_{ij})d\mu_{ij}$，t_{ij} を入手後に $[\mu_{ij}, \mu_{ij}+d\mu_{ij}]$ にある確率（事後確率）を $f''(\mu_{ij})d\mu_{ij}$ で表現する．ここで $'$，$''$ は微分を意味するのではなく，事前，事後を意味しているものとする．

Bayesの定理より

$$f''(\mu_{ij}) = \frac{g(t_{ij}^*|\mu_{ij})f'(\mu_{ij})}{\int_{-\infty}^{\infty} g(t_{ij}^*|\mu_{ij})f'(\mu_{ij})d\mu_{ij}} \qquad (17)$$

ここで $g(t_{ij}^*|\mu_{ij})dt_{ij}$ ：母数が μ_{ij} のとき実績OD t_{ij} がでる条件付き確率を示す．

式(17)の分母は母数 μ_{ij} に無関係であるのでこの逆数をKとすれば，

$$f''(\mu_{ij}) = K \underbrace{g(t_{ij}^*|\mu_{ij})}_{\text{情報}t_{ij}\text{による項}} \cdot \underbrace{f'(\mu_{ij})}_{\text{事前分布}} \qquad (18)$$

$g(t_{ij}^*|\mu_{ij})$ は式(19)となることは容易に知れよう．

$$g(t_{ij}^*|\mu_{ij}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{ij}} e^{-\frac{(t_{ij}^*-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}} \qquad (19)$$

また，t_{ij} が知れる以前は μ_{ij} について全く情報がなかったと考えられるため，ここでは $f'(\mu_{ij})$ として一様な事前分布を仮定する．この仮定と式(18)(19)より式(20)を導くことができる．

$$\therefore f''(\mu_{ij}) = N_{\mu_{ij}}(t_{ij}^*, \sigma_{ij}^2) \qquad (20)$$

$N_{\mu_{ij}}(t_{ij}^*, \sigma_{ij}^2)$ は平均値が t_{ij}^*，分散が σ_{ij}^2 の正規分布の確率密度関数を表わすものとする．以後この記法を用いる．

$f_T(t_{ij}|\mu_{ij})$ を母数が μ_{ij} のとき t_{ij} となる条件付き確率密度とすれば，$T_{ij}(t_1)$ の確率分布 $f_T(t_{ij})$ は式(20)と全確率の公式より次のように計算される．

$$f_T(t_{ij}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_T(t_{ij}|\mu_{ij})f''(\mu_{ij})d\mu_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} N_{t_{ij}}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)\cdot N_{\mu_{ij}}(t_{ij}^*, \sigma_{ij}^2)d\mu_{ij} = N_{t_{ij}}(t_{ij}^*, 2\sigma_{ij}^2) \qquad (21)$$

式(21)と $T_{ij}(t_1)$ の確率密度関数 $f_T(t_{ij}) = N_{t_{ij}}(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$ を比較すれば母数 μ_{ij} を t_{ij}^* とすることによる誤差が $2\sigma_{ij}^2$ に現われていることに気付く．

前述したように $T_{11}(t_1), T_{12}(t_1), \cdots T_{nn}(t_1)$ は独立な確率変数としてよいから結合密度関数を $f_T(t_{11}, t_{12}, \cdots t_{nn})$ とすれば

$$f_T(t_{11}, t_{12}, \cdots t_{nn}) = \prod_{ij} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\sigma_{ij}^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t_{ij}-t_{ij}^*}{2\sigma_{ij}^2}\right)^2} \qquad (22)$$

また推計値 t_{ij} は観測された道路区間交通量に矛盾してはならず，式(23)を満足させねばならない．ここで x_k は k 番目の道路区間の交通量であり，δ_{ij}^k は k 番目の道路区間をODペア ij を有するODが利用する割合である．

$$x_k = \sum_i \sum_j \delta_{ij}^k t_{ij} \qquad (23)$$

最尤法の考え方に従えば式(22)より最も生起し易い状態は式(22)で表わされ，この極値問題を式(23)の条件式のもとに解けばよい．

$$\sum_{ij}\left(\frac{t_{ij}-t_{ij}^{*}}{2\sigma_{ij}}\right)^2 \longrightarrow 最小 \qquad (24)$$

これと別に発生交通量も観測されれば，

$$o_i = \sum_j t_{ij} \qquad (25)$$

この場合には 式(23)(25)を条件式として 式(24)を解けばよい．また計算上，(23)(24)の中に従属な関係があったとしてもその分Lagrangeの未定係数を減じればよく大きな問題はない．

2.3 検定

式(21)は $T_{ij}(t_1)$ と $T_{ij}(t_1)$ の分布形が同一であるとして導かれている．逆に言えば $T_{ij}(t_1)$ と $T_{ij}(t_1)$ の分布形が同一のとき式(21)が成立する．このとき推計値 t_{ij} は $T_{ij}(t_1)$ $(N_T(t_{ij}^*, 2\sigma_{ij}^2))$ の実現とみなせ，検定を実施することができる．検定により t_{ij}(推計値) が $T_{ij}(t_1)$ の実現値であるという命題が棄却される場合は $T_{ij}(t_1)$ の分布形に問題があるのであり，式(21)を導いた仮定 $a_{ij}(t_0)+\sum_\delta b_{ij}^\delta(t_0) = a_{ij}(t_1)+\sum_\delta b_{ij}^\delta(t_1)$ に問題があったことになる．このときには，以上で述べた推計法は適当でないことになる．

3．推計タイプⅡ（曜日変動・週間変動・月間変動等の周期変動も含めて考察する必要がある場合）

2.1でも述べたように日々変動するOD交通量が正規分布で近似されることが予想される．しかも先にも述べた筆者らの調査結果（流入ランプ日交通量）では正規分布という分布形だけではなくその平均値 m と分散 ν^2 との間に次のような関係があるという結果も同時に得られている．

i) 平日の場合　　$\nu^2 = 0.428\ m^{1.987}$　　相関係数 0.75

ii) 土曜・日曜　　$\nu^2 = 0.456\ m^{2.042}$　　相関係数 0.95

すなわち日々変動する流入ランプの日交通量において変動係数 $c = \frac{\nu}{m}$ が一定となる性質が見られたということである．この調査は1年分のデータをもとにしているため前述の $a(t)$（傾向変動）は一定であると考えてもよいであろう．そこで我々はこの結果を踏まえ次の仮定を設ける．

仮定　傾向変動が無視できる限り時系列的なOD交通量 T_{ij} は正規分布に従いその変動係数は一定となる．ここでは平日のみを対象とする．

この場合，周期変動を含むため $T_{11}, T_{12}, \cdots T_{nn}$ が独立でないことに注意しなければならない．T_{ij} と T_{kl} の相関係数を $\rho_{ij,kl}$ とし，この各々の $\rho_{ij,kl}$ が推定されれば T_{ij} の結合分布を多次元正規分布として表わし，同時確率最大という考え方を用いて推定値 t_{ij} を求めることができる．

多次元正規分布は次の式で表わされる．

$$f(t_{11}, t_{12}, \cdots, t_{nn}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\Lambda|}} \mathrm{Exp}\left\{-\frac{1}{2}(t-\mu)'\Lambda^{-1}(t-\mu)\right\} \qquad (26)$$

$$(t-\mu) = \begin{bmatrix} t_{11}-\mu_{11} \\ t_{12}-\mu_{12} \\ \vdots \\ t_{nn}-\mu_{nn} \end{bmatrix} \qquad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_{11,11} & \lambda_{11,12} & \cdots & \lambda_{11,nn} \\ \lambda_{12,11} & \lambda_{12,12} & & \lambda_{12,nn} \\ \vdots & & & \\ \lambda_{nn,11} & \lambda_{nn,12} & \cdots & \lambda_{nn,nn} \end{bmatrix} \qquad (26)'$$

この式で μ_{ij} は確率変数 T_{ij} の平均値，$\lambda_{ij,kl}$ は T_{ij} と T_{kl} の共分散である．

もし $\lambda_{ij,kl}=0$ $(i\neq k, j\neq l)$，$\lambda_{ij,ij}=\sigma_{ij}^2$ を式(26)に代入すれば，$T_{11}, \cdots T_{nn}$ の各確率変数が独立である場合を

規定したことになる.

$$f(t_{11},\cdots t_{nn}) = \prod_{ij} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{ij}} e^{-\frac{(t_{ij}-\mu_{ij})^2}{2\sigma_{ij}^2}} \qquad (27)$$

t_{ij}の最頻値すなわち式(27)を最大とするt_{ij} $(i=1,\cdots n, j=1\cdots n)$の条件は $\sum_{ij}\frac{(t_{ij}-\mu_{ij})^2}{\sigma_{ij}^2}\to min$ となる. μ_{ij}はT_{ij}の平均値であるが未知の母数であるため, 実績ODの値t_{ij}^*で置き換えその誤差を理論的に考慮したのが実は式(24)であった. ここで扱うタイプでは$(i=k, j=l)$の場合以外にも$\lambda_{ij,kl}\neq 0$の状態が生じる場合を想定している. 先に述べた仮定, 変動係数はODによらず一定であるを用いれば, $\sigma_{ij}^2=\alpha\mu_{ij}^2$ $(\alpha=Const)$となり共分散行列の各要素は次のようになる.

$$\lambda_{ij,kl} = \rho_{ij,kl}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl} = \rho_{ij,kl}\sqrt{\alpha}\,\mu_{ij}\sqrt{\alpha}\,\mu_{kl} \quad (\text{ただし } i=k \ j=l \text{ のとき } \rho_{ij,kl}=1) \qquad (28)$$

この場合の同時確率最大の条件は式(26)より

$$g(t) = (t-\mu)'\Lambda^{-1}(t-\mu) \to min \qquad (29)$$

となる. 一般に式(29)にt_{ij}に無関係な定数を乗じても, この式を最小とするt_{ij}の値は変化しない. これを利用すれば式(28)のαの値を変えても推定値t_{ij}の値は変わらないことになる. そこで共分散をあらためて次のように置き直す. $\lambda_{ij,kl}=\mu_{ij}\mu_{kl}\rho_{ij,kl}$. ここでは$T_{ij}$の平均値と$\mu_{ij}$の値を簡単に実績ODの値$t_{ij}^*$に等しいと考えれば $\lambda_{ij,kl}=(t_{ij}^*)(t_{kl}^*)\rho_{ij,kl}$ となり, 式(29)で未知定数は$\rho_{ij,kl}$のみとなる. $\rho_{ij,kl}$が推定されればタイプIの場合のように道路区間での条件($X_k=\sum_i\sum_j\delta_{ij}^k t_{ij}$)の下に式(29)を解けば推計値$t_{ij}$が求められる.

$\rho_{ij,kl}$の例として北陸自動車道の4月1日から53年3月31日の1年分の流入ランプ日交通量のデータより算出された相関係数を行列の形で表わす. 今後もこのような観測により$\rho_{ij,kl}$を理論的に推定する方法の研究が必要であるが, 簡便的には$\rho_{ij,ij}$は1とし$\rho_{ij,kl}(i\neq k, j\neq l)$の値は一律な値としてしまう方法も考えられる.

表1　各インターチェンジ間の相関係数

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
(1)	1.00	0.90	0.73	0.78	0.92	0.89	0.65
(2)	0.90	1.00	0.55	0.55	0.83	0.77	0.60
(3)	0.73	0.55	1.00	0.68	0.66	0.63	0.50
(4)	0.78	0.55	0.68	1.00	0.70	0.60	0.40
(5)	0.92	0.83	0.66	0.70	1.00	0.89	0.67
(6)	0.89	0.77	0.63	0.60	0.89	1.00	0.51
(7)	0.65	0.60	0.50	0.40	0.67	0.51	1.00

(1) 金沢西インター　(2) 小松インター　(3) 片山津インター
(4) 加賀インター　(5) 丸岡インター　(6) 福井北インター
(7) 福井インター

4. あとがき

実際のOD交通量の時系列データが入手困難であるため本報告では北陸自動車道の流入ランプの日交通量のデータを用いたが, 流入ランプ交通量は必ずしもOD交通量に対応しないということと, 高速道路という特殊な性質のため, 理論的裏づけは十分ではない. 今後OD交通量に近い都市内の観測データを用いた実証的な考察が必要である. また相関係数の推定法は今後に残された課題であり, これについての研究も必要であると同時に, 相関係数を一律に同一にすることによる誤差, 変動係数がODによらず一定であるとすることによる誤差をシュミレーションにより検討することも大事である.

数学的取り扱いが容易になることから確率変数を独立であると仮定する場合は多い. 本報告でも不規則変動のみを対象とする場合の分散と平均値との関係を導く際に, この仮定を用いたがこれについても独立という仮定についての裏づけが必要である. また同時にODペアがijで発生する可能性を有するトリップの総数N_{ij}の具体的な推定法, 意味づけが考察されなければならない.

<参考文献>

1) 飯田恭敬・高村義晴;"サンプル誤差と交通量変動を考慮した道路網交通需要推計法", 第33回年次講演概要集, 1978年9月, pp.65-66
2) 井上博司;"路上交通量観測による自動車OD交通量の推計", 土木計画学研究発表会講演集, 1979年1月, pp.37-40
3) 徳満芳則;"交通量変動特性の分析", 卒業論文, 1979年3月