

混合砂礫の限界掃流力について*

ON THE CRITICAL TRACTIVE FORCE OF GRADED SAND GRAVELS

土屋 義人**

By Yoshito Tsuchiya

1. 緒 言

流路の安定の問題や流砂に関する研究を行なうにあたっては、多かれ少なかれ流水による砂礫の移動限界、すなわち限界掃流力が問題となってくる。従来より限界掃流力に関する研究は主として実験的に進められ、砂礫の粒度分布をなんらかの形で表現して、混合砂礫の限界掃流力を見出すべく多くの研究成果が発表されてきた。また一方、限界掃流力の水理学的機構に関する考察もかなり行なわれてきたが^{1)~5)}、多くの場合、それらの考察は一樣粒径の砂礫を対象としたものである。しかしながら、自然の砂礫は一般に混合砂礫であることから、粒度分布をもつ砂礫の限界掃流力が問題となることはいうまでもなく、古くからこうした点に着目した実験的研究が行なわれてきたのである。

従来、混合砂礫の限界掃流力におよぼす混合特性の効果を表わすために、Kramer⁶⁾、U.S.W.E.S.⁷⁾、Indri および Chang⁸⁾らは均等係数 M を、また安芸および佐藤博士⁹⁾は同様な係数 λ を、さらに境博士¹⁰⁾は $\beta = (2+M)/(1+2M)$ で表わされる係数を、また栗原博士¹¹⁾も同じ係数を採用してきた。そして佐藤および安芸博士の場合を除いて、一般には均等係数 M の減少とともに限界掃流力は大きくなることを示しているようである。岩垣博士⁵⁾は限界掃流力に関する研究において、混合砂礫の限界掃流力についても言及し、前述したような混合特性を表わす諸係数を実験公式の中に導入する意義が明確でないことを述べている。

一方、H.A. Einstein¹²⁾は流砂に関する理論的研究を進めるにあたって、砂礫の移動限界を明確に表現するための条件またはその限界を、決定し定義づけることは不可能であると述べている。純力学的には、そうした砂礫の移動限界を一意的に定義し決定することは、この現象がきわめて多くの有意な確率要素に支配されていることから非常に困難であり、また Einstein のいうように不可能であるといってもよいであろう。

しかしながら、流路に関する検討を行なうにあたっては、平均的にいって砂礫が移動している場合と砂礫が全然動かない場合とでは、一般にそれに付随する現象が非

常に相違することから、その限界をなんらかの方法によって明らかにすることはきわめて重要な問題となってくるのである。したがって、このことから、砂礫の移動限界の定義はむしろ実際ので応用的なものであることが要求されるわけであり¹²⁾、詳細な議論を望めない現在においては、純力学的な取り扱いにもとづく適確な結論は将来の研究にまたねばならないのである。

以上のような理由から、この研究においては、混合砂礫の限界掃流力の水理学的機構を考察するために、一つの簡単な模型にもとづいて、砂礫床面に突き出している砂礫の個数分布と砂礫後方に生ずる後流(wake)に着目した簡単な理論的考察を行なって、実験結果の説明を試みるつもりである。最後に実験結果との比較と理論的考察の結果をもとにして、混合砂礫の限界掃流力に関する実験公式を提案することにする。

2. 混合砂礫の限界掃流力に関する理論的考察

限界掃流力の問題は砂礫に働く流水の作用を最も顕著に表わした現象であって、さきの論文¹³⁾でも述べたように、こうした現象を取り扱う場合には、それが砂礫床面における水理現象であることに着目すべきであろう。混合砂礫の限界掃流力を取り扱った従来の諸研究は、いずれも混合砂礫の特性を表わすのに、砂礫全体に対する重量百分率による粒度分布にもとづいて考察が進められており、前述したようにこの現象が砂礫床面における現象であることから、砂礫全体の特性より砂礫床面に露出している砂礫の特性に立脚して考察すべきものと考えられる。混合砂礫の限界掃流力は、そのような砂礫床面を特徴づける代表的な砂礫によって規定され、また、その現象を支配する水理量が決定されるものと考えられることしよう。

以上のような考えのもとに、砂礫床面における代表砂礫の流水による移動限界を考察して、混合砂礫の限界掃流力の機構を簡単に考察することにする。

(1) 代表砂礫の移動限界

砂礫の限界掃流力を代表する砂礫の大きさを d_r 、比重を σ_r/ρ 、静止摩擦角を φ_r とし、さらに限界掃流力に関する著者らの研究と同様に、重力の加速度を g 、鉛直方向の圧力勾配による揚力を R_{Lr} 、流れの方向の流体抵抗と圧力勾配による抵抗との和を R_{Tr} とすれば、代表砂

* 実験結果に関する考察は京大防災研究所年報、第6号を参照のこと

** 正員 京大工博 京都大学助教授 防災研究所

礫の平衡条件はつぎのように表わされる。

$$\{(\sigma_r - \rho)g(\pi/6)d_r^3 - R_{Lr}\} \tan \phi = R_{Tr} \dots\dots(1)$$

ここで問題となるのは、式(1)中における R_{Tr} および R_{Lr} をどのように見積るかということであるが、混合砂礫の床面上を流れる水流の流速分布に関する普遍的な実験結果がないことから、たとえば岩垣博士の研究⁵⁾などにもとづいて考察を進めることにしても不可能といわねばならないし、さらに、また代表砂礫近傍の流速分布は、砂礫床面に突き出している砂礫からの後流によって、一般にはきわめて複雑なものであることから、理想的な方法の一つとして、平均的な流速分布にもとづいて考察を進めるということは、きわめて困難といわねばならないであろう。そこで著者は、なぜ混合砂礫の限界掃流力が標準偏差 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ とともに変化するかという事実を、つぎのような考えのもとに簡単に考察することにしたのである。

混合砂礫の床面上を流れる水流の流速分布は、適当な座標原点または相当粗度などの考えを導入することによって、一様な砂礫床面上の流れと対比させることができるはずである。このことは、たとえば流速分布の対数法則

$$\bar{u}/u^* = A_r + 5.75 \log_{10}(z/k_s) \dots\dots(2)$$

において、 $A_r = u_0/u^*$ とすれば、 u_0 は $z \leq k_s$ における流れを規定する流速であると解釈され、したがって k_s という量は、砂礫からつくり出される複雑な流れの領域と流速 u_0 のみに関係すると考えられる領域との境界における z の値として定義される。ここに \bar{u} : 流速、 u^* : 摩擦速度、 k_s : 相当粗度、および A_r : 一般には実験定数、である。いま限界掃流力に関する岩垣博士の研究⁵⁾にみられるように、式(1)中の流体抵抗 R_{Tr} および R_{Lr} などを見積るための代表流速 u_1 として、近似的に $z = k_s$ における流速をとることにすれば、式(1)から一様粒径の砂礫を対象として考察した場合の関係式と同様な関係が得られる。

$$\frac{u_c^{*2}}{(\sigma_r/\rho - 1)gd_r \tan \phi} = \frac{1}{\psi_i}, \quad (i=1,2,3) \dots\dots(3)$$

ここに、

$$\psi_i = \psi_i(u_c^* d_r/\nu) \dots\dots(4)$$

である。以上の考えにもとづけば、式(4)の関数形は理論上一様砂礫の場合に対して計算されたもの⁵⁾と全く同一であると考えてよいであろう。

ところが、一様な砂礫の場合においても一個の代表的な砂礫の平衡条件について考察したことから、多かれ少なかれその砂礫は他のものによって遮へいされているために、実際には計算された流体抵抗よりもかなり小さい抵抗しか受けておらず、砂礫が移動するためには計算値よりかなり大きい掃流力を必要とすることになる。前述したように、混合砂礫の場合には移動しない砂礫も存在することになり、代表砂礫の移動限界に対して効果的に

遮へい効果をおよぼす砂礫は代表砂礫よりかなり大きい砂礫であろうと考えられる。以上のような考えにもとづけば、一応なんらかの方法によって混合砂礫の限界掃流力におよぼす混合特性の影響を上述の遮へい係数に關係づけて近似的に考察することができるように思われるので、つぎにこうした考え方によって考察した一つの簡単な試みについて述べることにしよう。

(2) 遮へい係数におよぼす混合砂礫の混合特性の影響

さきの論文¹⁵⁾で述べたように重量百分率による粒度分布 $f(d)$ とそれが砂礫床面にあらわれる砂礫の個数分布 $n(d)$ との間には一般に、

$$g(d) = \Lambda f(d)/d^2 \dots\dots(5)$$

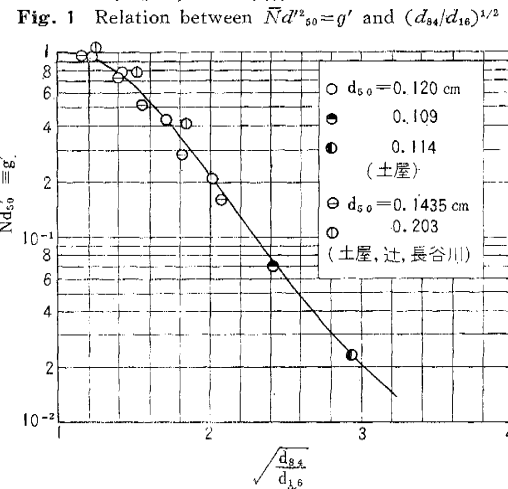
であらわされる関係があり、特に $f(d)$ が対数正規分布にしたがう場合には $n(d)$ もまた $f(d)$ と同じ標準偏差をもち、中央粒径の値が

$$\log_e(d_{50}/d'_{50}) = 2\sigma_0^2, \quad \sigma_0 \approx (1/2)\log_{10}(d_{84}/d_{16}) \dots\dots(6)$$

によって計算される値だけ小さい対数正規分布にしたがうことになる。ここに、 d_{50} および d'_{50} : それぞれ $f(d)$ および $n(d)$ の中央値、 σ_0 : 標準偏差、 d_{16} および d_{84} : それぞれ $f(d)$ の累加百分率において 16% および 84% に相当した砂礫の大きさ、である。

また混合砂礫の場合における単位面積あたりの露出砂礫数 \bar{N} は式(6)であらわされる d'_{50} を用いて 図-1 のように表わされる。

図-1 混合砂礫の場合の単位面積あたりの露出数と $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ との関係



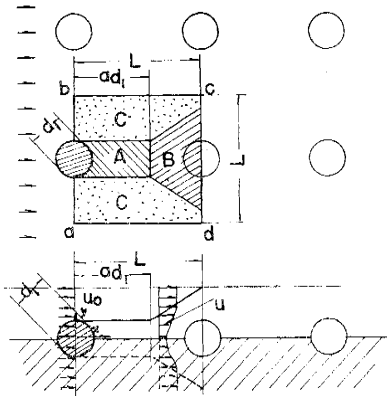
混合砂礫の限界掃流力を代表する砂礫 d_r に対して効果的に遮へい効果をおよぼす砂礫を一般に d_i と表わすことにし、その砂礫が砂礫床面に現われている個数から計算される平均の支配面積を表わす代表的な長さ L は、砂礫床面上における砂礫の分布が一様であるという仮定と混合砂礫の砂礫床面上における前述した特性にもとづ

ければ、

$$d_i/L = (d_i/d_{s0}) \sqrt{g' f_i} \dots \dots \dots (7)$$

で表わされる。ここに、 L ：図-2 に示したように砂礫 d_i の占める支配面積を正方形と仮定した場合の一边の長さ、 g' ：混合砂礫の露出砂礫の個数を表わす無次元量であって、図-1 に示すように $(d_{s4}/d_{s0})^{1/2}$ のみの関数、および f_i ：式 (5) または式 (6) の関係をもとにして求められる粒径 d_i の砂礫の頻度、である。

図-2 突出砂礫の支配面積に関する説明図
Fig. 2 Schematic diagram for occupied area of a sand gravel exposed



つぎに、以上述べたような砂礫 d_i の後流について簡単に考察することにしよう。砂礫 d_i 近傍の流れの状態を図-2 に概念的に示したように表わすことにする。図中の領域 a, b, c, d は砂礫 d_i の支配面積であるが、そのうち領域 A は砂礫の後部に生ずる死水領域を表わし、その範囲は粒径 d_i に比例した ad_i までの距離で、簡単に図に示したように表わされるものとする。また領域 B は砂礫の後流において、次第に流速が回復していく範囲を示し、領域 C は砂礫 d_i の影響のないところを示すものと仮定したわけである。これらの領域に対して、後流に関する若干の理論結果を適用することによって、前述した代表流速 u_0 よりの減少割合および前述した領域 A, B, C の面積比を計算することにする。

一様流れの中における1個の球体の後流に関しては、Swain¹⁶⁾の理論的考察が示されており、その結果は球体から十分離れた領域に対して、

$$b = \sqrt{10} \beta_0 (x C_D d_0^2)^{1/3},$$

$$\frac{\bar{u}}{U_\infty} = 1 - \frac{\sqrt{10}}{18 \beta_0} \left(\frac{x}{C_D d_0} \right)^{-2/3} \left\{ 1 - \left(\frac{y}{b} \right)^{3/2} \right\} \dots \dots (8)$$

ここに、 b ：後流の幅、 U_∞ ：一様流れの流速、 \bar{u} ：後流内部の流速、 d_0 ：球の直径、 C_D ：抵抗係数、 β_0 ：実験定数で0.2程度の値、 x および y ：それぞれ球体からの流れ方向の距離および x に垂直方向の座標、である。

図-2 に示した模型図に対して、式 (8) で表わされる関係を適用するにあたり、まず流速 U_∞ として u_0 を用

い、また d_0 を d_i とかきかえて領域 B の面積を求めると、つぎようになる。

$$B = \frac{3}{4} \sqrt{10} \beta_0 C_D^{1/3} \left(\frac{d_i}{L} \right)^{2/3} \left\{ 1 - a^{1/3} \left(\frac{d_i}{L} \right)^{4/3} \right\} L^2$$

一方、死水領域 A の面積を前述したように ad_i^2 によってあらわすことにすれば、領域 A, B および C の全面積 L^2 に対する割合 \bar{A}, \bar{B} および \bar{C} は、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= a(d_i/L)^2, \\ \bar{B} &= \frac{3}{4} \sqrt{10} C_D^{1/3} \left(\frac{d_i}{L} \right)^{2/3} \left\{ 1 - a^{1/3} \left(\frac{d_i}{L} \right)^{4/3} \right\}, \\ \bar{C} &= 1 - a(d_i/L)^2 - \frac{3}{4} \sqrt{10} C_D^{1/3} \left(\frac{d_i}{L} \right)^{2/3} \\ &\quad \times \left\{ 1 - a^{1/3} \left(\frac{d_i}{L} \right)^{4/3} \right\}. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

つぎに、領域 A, B および C における流速の減少割合を見積ることにするが、まず、この場合、領域 C は前述したように砂礫 d_i の影響を直接うけないと考えるわけであるから、この領域を基準とし、これを u_0 の値そのまま表わす。領域 A に対しては、前述した後流に関するこの付近の実験結果がほとんどないことから、近似的に流速は存在しないと仮定するより方法がないであろう。また領域 B に対しては、一応式 (8) で表わされる関係があるのでこれにもとづくべきであるが、この関係によってくわしく評価しても、全体として仮定の大小のつり合いがとれないから、ここでは簡単につきのように考えることにしよう。すなわち、流速の y 方向の平均は考慮せず、式 (8) において $y=0$ とした関係にもとづいて、 x 方向の平均値 \bar{u} をとることにすれば、つぎようになる。

$$\frac{\bar{u}}{u_0} = -\frac{1}{L - ad_i} \int_{ad_i}^{L - ad_i} \left(\frac{\bar{u}}{u_0} \right) dx$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{10}}{6 \beta_0} C_D^{2/3} \left\{ \frac{(L/d_i)^{1/3} - a^{1/3}}{(L/d_i) - a} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

したがって、以上の仮定にもとづけば、領域 A, B および C における流速の平均値は一括してつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} A: \bar{u}/u_0 &\approx 0, \\ B: \bar{u}/u_0 &= 1 - \frac{\sqrt{10}}{6 \beta_0} C_D^{2/3} \left\{ \frac{(L/d_i)^{1/3} - a^{1/3}}{(L/d_i) - a} \right\}, \\ C: \bar{u}/u_0 &\approx 1, \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 a は前述したとおりであるが、図-2 から明らかのように、つぎのように表わすべきであろう。

$$\left. \begin{aligned} d_i/L \leq 1/a \text{ の場合: } a &= a, \\ d_i/L > 1/a \text{ の場合: } a &= L/d_i. \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

以上のような仮定にもとづけば、砂礫 d_i の後流によって流速が減少するため、代表砂礫 d_r からうける抵抗は代表流速 u_0 によって計算される流体抵抗よりかなり

小さくなるわけであって、その平均値は、代表砂礫 d_r が一様に砂礫床面に分布していると仮定される通常の場合には、つぎのようにして評価されるであろう。すなわち、図-2 に示した領域 A, B および C に代表砂礫 d_r が入る割合は式 (9) で表わされるから、流速の減少割合の平均値は式 (11) の関係を適用することによって、つぎのように表わされるであろう。

$$\left. \begin{aligned} & d_i/L \leq 1/a; \\ & \frac{\bar{u}}{u_0} = 1 - a \left(\frac{d_i}{L} \right)^2 - \frac{5}{4} C_D \left(\frac{d_i}{L} \right)^{2/3} \\ & \quad \times \left\{ 1 - a^{1/3} \left(\frac{d_i}{L} \right)^{4/3} \right\} \left\{ \frac{(L/d_i)^{1/3} - a^{1/3}}{(L/d_i) - a} \right\}, \\ & d_i/L > 1/a; \\ & \frac{\bar{u}}{u_0} = 1 - (d_i/L). \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

一方、前述したように、代表砂礫の移動限界は式 (3) および式 (4) によって表わされるが、実際の場合に対しては、便宜上 $u_c^* d_r / \nu$ のすべての値に対して同一であると仮定する遮へい係数 ϵ_r を導入して、つぎのように表わすことにしよう。

$$\frac{u_c^* \epsilon_r^2}{(\sigma_r/\rho - 1) g d_r \tan \phi_r} = \frac{1}{\epsilon_r \psi_i}, \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots(14)$$

ここに、 ϵ_r は前述したように代表砂礫が他の砂礫によって遮へいされる程度を表わすために導入した係数である。そして、いまの場合には、近似的に代表流速として u_0 を用いてきたが、実際はこれより小さい流速によってその移動限界が規定されているはずであり、特に式 (14) 中の ψ_i は砂礫に働く流体抵抗に比例するものを表わしているわけであるから、 ϵ_r は近似的には流速の減少割合の 2 乗に比例するものである。すなわち、

$$\epsilon_r = \alpha (\bar{u}/u_0)^2 \dots\dots\dots(15)$$

によって表わされるものと考えてよいであろう。ここに、 α は一つの定数であって、一様粒径の場合との比較によって決定される。

以上はもっぱら、代表砂礫 d_r に遮へい効果をおよぼすある大きさの砂礫を d_i として、その後流にもとづく流速減少の割合を考察してきたのであるが、いうまでもなく混合砂礫の場合にはそのような砂礫は数多く存在するわけであって、それら相互の深い関連あるいは干渉の結果として、遮へい係数がたとえば標準偏差 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ とともに変化するはずである。したがって、そのような種々の大きさの砂礫からでる後流による影響を考察すべきであるが、人工粗度に関する足立博士¹⁷⁾の研究などからも明らかなように、一般には砂礫の相互の干渉による効果はきわめて複雑である。したがって、ここでは、そのような砂礫相互の干渉は無視して、各砂礫による遮へい効果が単純に重ね合わされるものとして、平均的な遮へい効果を表わす関係を求めることにしよう。このよう

に簡単に考えると、 $z \leq k_s$ の領域における流量の連続は必ずしも満足されないが、この点についてはあまり深く追求しないことにしておく。

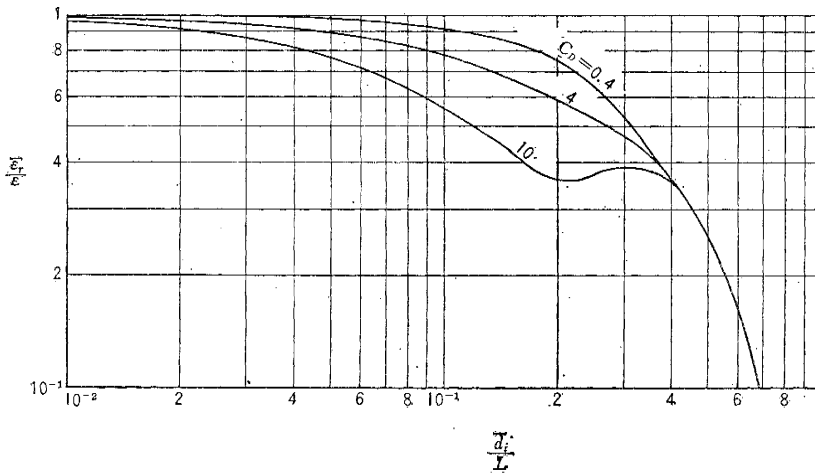
砂礫床面に N_i 個露出している粒径 d_i の砂礫による平均的な遮へい効果が、式 (15) で表わされたわけであるから、上述した仮定にもとづく限りでは、混合砂礫の全体の砂礫がある代表砂礫におよぼす遮へい効果は、一応次式によって表現されるであろう。

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_r &= \int_{d_2/d'_{50}}^{d_1/d'_{50}} \alpha (\bar{u}/u_0)^2 \epsilon_r (d_i/d'_{50}) d(d_i/d'_{50}) \\ &= \bar{\epsilon}_r \left\{ \sqrt{\frac{\bar{d}_{84}}{\bar{d}_{16}}}, \alpha, C_D, \frac{d_1}{d'_{50}}, \frac{d_2}{d'_{50}}, \alpha \right\}, \dots\dots(16) \end{aligned}$$

ここに、 d_1 および d_2 はそれぞれ粒度分布における最大および最小粒径である。式 (16) で表わされる $\bar{\epsilon}_r$ の定義に対して、式 (7) および式 (13) を代入して計算すれば、右辺に示したような関数関係をうるることができるわけであるが、ここでは簡単につきのような方法をとることとする。すなわち、代表砂礫に対して遮へい効果を支配的におよぼすものは、代表粒径より大きい砂礫であると考えよう。そして一様粒径の場合には、同じ大きさの砂礫の相互の干渉にもとづく遮へい効果として、平均的に $\epsilon=0.4$ をえているわけであるが¹⁸⁾、この場合においても砂礫床面の凹凸は粒径の 2~3 倍程度におよぶものと考えられる。このような事実を考えると、混合砂礫の場合においても、代表粒径の 2~3 倍程度の砂礫は一様粒径の場合の各砂礫の相互干渉の程度しか影響をおよぼさないものとして取り扱うべきであろう。したがって、式 (16) の積分の下限 d_2/d'_{50} は一応仮定することができるので、つぎに式 (16) に相当した計算をいまだし簡単に行なうことを考える。式 (16) の表現は $d_2/d'_{50} < d_1/d'_{50}$ の砂礫に対して遮へい効果を累加することを表わしているわけであるから、そのような砂礫全体を代表する一つの砂礫で表わすことにする。すなわち、 d_2/d'_{50} のある値より大きい砂礫の占める割合を \bar{f}_i と表わし、その \bar{f}_i にふくまれる砂礫の平均的な大きさを \bar{d}_i として、前述した方法によって式 (7) を計算することとする。そして一様粒径の場合における遮へい係数を $\epsilon (=0.4)$ で表わし、 \bar{d}_i 以下の砂礫の遮へい効果はすべて ϵ の程度であると考えことにすれば、平均的遮へい係数は式 (16) に対応したものとして次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} & \bar{d}_i/L \leq 1/a; \\ & \frac{\bar{\epsilon}_r}{\epsilon} = \left[1 - a \left(\frac{\bar{d}_i}{L} \right)^2 - \frac{5}{4} C_D \left(\frac{\bar{d}_i}{L} \right)^{2/3} \right. \\ & \quad \times \left. \left\{ 1 - a^{1/3} \left(\frac{\bar{d}_i}{L} \right)^{4/3} \right\} \left\{ \frac{(L/\bar{d}_i)^{1/3} - a^{1/3}}{(L/\bar{d}_i) - a} \right\} \right]^2, \\ & \bar{d}_i/L \geq 1/a; \\ & \frac{\bar{\epsilon}_r}{\epsilon} = \{ 1 - (\bar{d}_i/L) \}^2, \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

図-3 $\bar{\epsilon}_r/\epsilon$ と \bar{d}_i/L との関係
 Fig. 3 Relation between $\bar{\epsilon}_r/\epsilon$ and \bar{d}_i/L



ここに、

$$\bar{d}_i/L = (\bar{d}_i/d'_{50}) \sqrt{g' f_i} \dots\dots\dots (18)$$

である。

つぎに、以上述べたような多くの仮定にもとづいて得られた式 (17) および式 (18) を、前述した混合砂礫の露出数およびその分布に関する結果をもとにして数値計算した二、三の結果について述べよう。まず式 (17) 中における定数 a に関しては、詳細な値を定めることは不可能であるが、後流に関する実験結果などから推定すれば、 $a=3\sim 4$ 程度であろう¹⁸⁾。つぎに抵抗係数 C_D は通常 Reynolds 数の関数であって、いま近似的に砂礫 \bar{d}_i に対する代表流速を u_0 とすれば、式 (2) を適用して

$$R_e = A'_r (u_c * d'_{50} / \nu) (\bar{d}_i / d'_{50})$$

が得られる。ここに、 A'_r は 8.5 程度の値である。このように C_D を Reynolds 数の関数として取り扱うことにすれば、 $\bar{\epsilon}_r/\epsilon$ の値は $u_c * d'_{50} / \nu$ によっても変わるようになる。いまの場合、便宜上 C_D の値として適当な二、三

のものを用い、 $a=3$ とし式 (17) を計算した結果が図-3 である。この結果によれば、 $\bar{\epsilon}_r/\epsilon$ は \bar{d}_i/L とともに、一般には減少するようである。 $C_D=10$ の場合の $\bar{d}_i/L \approx 1/a$ 付近における特異な曲線の傾向は、図-2 に示したように、単純に砂礫の後流を表わしたためであろう。図-4 は前述した露出砂礫数の分布に関する結果と図-3 に示した曲線とを用い、 $d_2/d'_{50} = 2$ および 3 のそれぞれの場合に対して式 (18) を計算

した結果である。この結果によると、 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ の値の増加とともに d_i/L の値は増加するが、ある値以後はむしろ若干減少する傾向を示している。しかし、直観と相違するように思われる。図-5 は図-4 の結果を図-3 に適用し、 C_D をパラメータとして、遮へい係数 $\bar{\epsilon}_r/\epsilon$ を $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ との関係で表わしたものであって、この結果からつぎのことがわかる。まず、いずれの場合にも、 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ の値が大きくなると、 $\bar{\epsilon}_r/\epsilon$ の値は一般に減少し、また前述したような仮定にもとづく d_2/d'_{50} に対する取り扱い、たとえば $d_2/d'_{50} = 2$ とするか、あるいは 3 とおくかによって理論曲線はかなり相違することがわかる。一方、理論曲線は C_D の値によってもかなり変わるが、たとえば $C_D = 10$ 程度の値に対しては、 $u_c * d'_{50} / \nu$ の値はきわめて小さいものとなり、実際の場合にはほとんどありえないことである。このことは \bar{d}_i の Reynolds 数に対する簡単な検討からわかるので、実験結果との比較においてはむしろ省略すべきであろう。さらに理論曲

図-4 \bar{d}_i/L の $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ による変化
 Fig. 4 Variation of \bar{d}_i/L with $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$

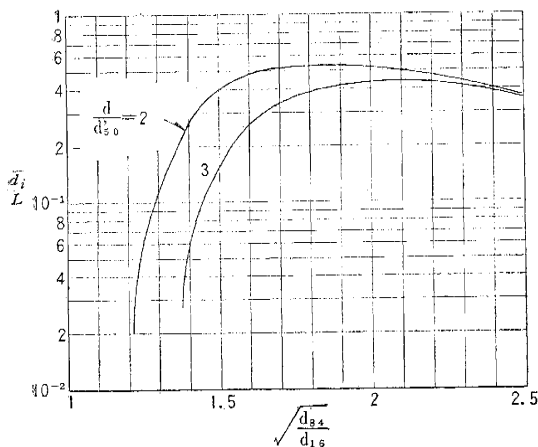


図-5 $\bar{\epsilon}_r/\epsilon$ の $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ による変化
 Fig. 5 Variation of $\bar{\epsilon}_r/\epsilon$ with $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$

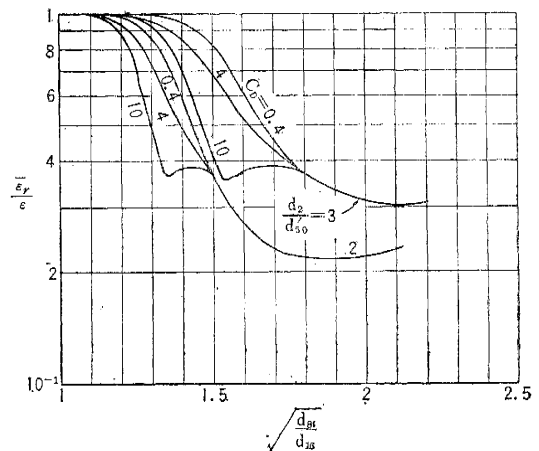


表-1 混合砂礫の限界掃流力に関する実験結果

実験者	d_{30} cm	$(d_{84}/d_{16})^{1/2}$	u_c^{*2} (cm/s) ²	$u_c^* d'_{50}/\nu$	$u_c^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd'_{50}$	$\bar{\epsilon}_r$
著者	0.1435	1.145	7.73	31.0	0.0355	0.389
"	"	1.403	8.90	27.8	0.0444	0.306
"	"	1.553	9.74	25.6	0.0549	0.244
"	"	1.823	10.95	18.2	0.105	0.137
"	0.203	1.252	12.3	50.4	0.0432	0.359
"	"	1.522	14.3	42.6	0.0646	0.247
"	"	1.842	14.6	29.4	0.0999	0.130
"	0.0480	2.220	5.32	2.65	0.259	0.126
"	0.0805	1.873	5.39	7.39	0.0995	0.171
Kramer	0.0706	1.83	5.11	7.72	0.0892	0.175
"	0.0558	1.64	3.83	6.66	0.0676	0.248
"	0.0800	1.95	4.81	7.18	0.148	0.109
Schaffernak	0.154	1.33	7.36	35.7	0.0337	0.421
P.E.I.	0.115	2.29	5.01	6.45	0.107	0.160
"	0.0846	2.22	4.12	4.78	0.109	0.202
"	0.0836	2.16	5.69	5.98	0.138	0.155
"	0.0686	1.72	4.90	8.46	0.0794	0.189
"	0.0744	2.06	5.49	6.14	0.125	0.142
"	0.0806	2.08	5.49	6.46	0.123	0.140
Engels	0.148	2.48	9.81	3.59	0.216	0.125
Gilbert	0.371	1.12	29	195	0.0496	0.399
"	0.530	1.14	48	356	0.0492	0.409
U.S.W.E.S.	0.0586	1.93	4.64	5.30	0.117	0.173
"	0.0541	1.56	4.21	7.44	0.0717	0.223
"	0.0525	1.44	4.21	8.30	0.0643	0.235
"	0.0506	1.77	4.02	5.27	0.0947	0.213
"	0.0483	1.60	3.83	6.06	0.0768	0.234
"	0.0347	1.28	2.87	5.21	0.0579	0.354
"	0.0310	1.50	3.16	3.96	0.0876	0.276
"	0.0205	1.37	2.25	2.25	0.0827	0.408
"	0.408	1.47	27.8	160	0.0565	0.344
石原	0.0921	1.75	5.22	11.2	0.0681	0.202
"	0.0708	1.99	6.38	6.96	0.150	0.116
安芸, 佐藤	0.0700	2.62	7.36	2.96	0.436	0.0696
"	0.122	1.96	9.61	15.3	0.117	0.112

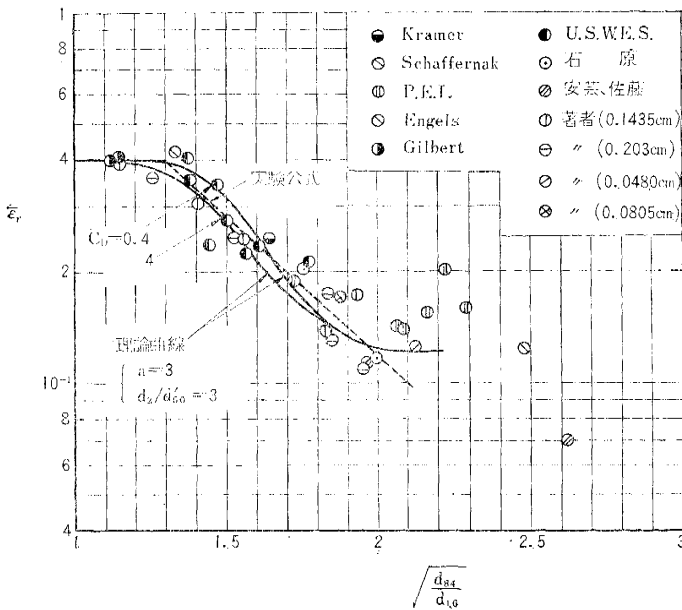
線は、 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ の値が大きくなると、ある値において $\bar{\epsilon}_r/\epsilon$ が極小値をとるような傾向を示しているが、これは 図-4 についてすでに述べたような理由によるものである。

(3) 理論曲線と実験結果との比較

すでに述べたように、混合砂礫の限界掃流力に関する実験は、従来よりかなり行なわれてきたが、ここでは前述した理論的考察にもとづいて実験結果を整理し、理論曲線と比較して二、三の考察をすることにしよう。まず式(14)にもとづいて、著者の実験値と従来の実験値とを整理し、一括表示して表-1に示しておいた。このように実験値をとりまとめるにあたっては、まず d_{30} の値から d'_{50} を求めるには式(6)の係数を用いた。また $\tan \bar{\phi}$ としてはさきの論文⁽⁵⁾に示した結果を、砂礫 d_r の静止摩擦係数としてそのまま用いることは、かなり問題があると思われるが、混合砂礫の平均の静止摩擦係数は標準偏差

図-6 遮へい係数 $\bar{\epsilon}_r$ に対する実験結果と理論曲線との比較

Fig. 6 Comparison of theoretical curves for sheltering coefficient and experimental results.



$(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ のみの関数であると考えたことにした。そして表-1に示した遮へい係数 $\bar{\epsilon}_r$ の値は、 $u_c^* d'_{50}/\nu$ の値に対応して、後述する 図-7に示した一様砂礫の限界掃流力に対する岩垣博士の理論曲線から得られる $u_c^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd'_{50}$ の値と、実験値との比として求めたものである。この場合、代表粒径 d'_{50} の比重 σ/ρ は全体の平均値 σ/ρ で代用した。なお、表-1においては、従来の実験値において、混合砂礫の粒度分布が対数正規分布といちじるしく相違する二、三の実験値は省略した。

図-6は、表-1に示した実験結果のうち、遮へい係数 $\bar{\epsilon}_r$ と $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ との関係を図示して、理論曲線と比較したものである。図中に示した理論曲線は 図-5に示したもののうち、比較的実験結果に近いものとして、 $d_r/d'_{50}=3$ の場合の曲線を示した。この結果によると、前

述したように $C_D=10$ の場合を除いて、理論曲線は実験結果とかなり似た傾向を示していることがわかる。そして $(d_{84}/d_{16})^{1/2} \approx 2$ 付近までは実験もかなりまとまり、理論曲線とかなりよく一致しており、 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ の値が大きくなるほど、 $\bar{\epsilon}_r$ が小さくなっていくことがわかる。しかしながら、 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ の値が 2 以上の範囲では、 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ の広い範囲にわたった一連の実験値がないので、 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ の値が大きくなるにしたがって $\bar{\epsilon}_r$ が減少するのか、あるいは一定値に近づくのかはよくわからない。安芸博士らの実験値によれば、 $\bar{\epsilon}_r$ の値は単調に減少していく傾向を示しているのに反し、P.E.I., Engels および著者の実験値の一つは、むしろ一定値に近づく傾向を示している。一方、多くの問題点はあるが、前述した理論的考察の結果では、 $\bar{\epsilon}_r$ の値は一定値に近づくか、または減少の仕方がゆるやかになるようである。このように理論的考察においても明確ではなく、また、その上、実験結果も定まった傾向を示していないことから、まず第一にこれらの範囲での実験を行なうべきであり、将来の問題として考えるべきであろう。なお、表-1 に示したように、 $\bar{\epsilon}_r$ におよぼす $u_c^* d'_{50}/\nu$ の影響は、図-6 に示した実験値の実験範囲内では、ほとんど見出すことはできない。このことは、実際の場合を対象とし、計算上 $0.4 < C_D < 4$ 程度であることを考えると、理論的考察から推論される事実と一致する。

3. 混合砂礫の限界掃流力に関する実験公式

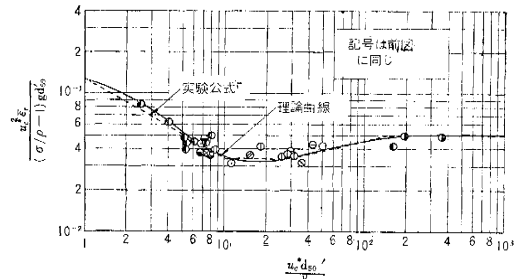
ここでは任意の混合砂礫の限界掃流力を、なるべく簡単に見出すための実験公式を提案するとともに、従来の実験公式との関連について二、三考察することにしよう。

(1) 実験公式

まず 図-6 に示した $\bar{\epsilon}_r$ と $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ との関係において、 $(d_{84}/d_{16})^{1/2} \approx 2$ より小さい範囲のみを対象とし、理論曲線および実験結果を考慮して、図中の破線によって両者の関係を近似することにする。そして、この関係を用いて、式(14)を $u_c^{*2} \bar{\epsilon}_r / (\sigma/\rho - 1) g d'_{50}$ と $u_c^* d'_{50}/\nu$ との関係によって一つの曲線で表わせば、当然、理論曲線は限界掃流力に関する岩垣博士の理論曲線と一致することになる。図-7 はこのようにして、表-1 に示した実験値のうち $(d_{84}/d_{16})^{1/2} < 2$ のものを点描して、理論曲線と比較したものである。この図から明らかなように、このようにすれば、大体 $(d_{84}/d_{16})^{1/2} < 2$ の範囲における実験値を統一的に表わすことができる。したがって、実験公式は 図-7 の理論曲線を折線で近似した限界掃流力に関する岩垣公式と同じ形式になり、ただ混合砂礫の標準偏差のみの関数である $\bar{\epsilon}_r$ が付加的に導入されることになる。こうしたことから、図に折線で示した実験公式は次式によって表わされる。

図-7 混合砂礫の限界掃流力に関する理論曲線と実験結果との比較 ($\epsilon=0.4$)

Fig. 7 Comparison of theoretical critical tractive force of graded sands and gravels, and experimental results ($\epsilon=0.4$).



$$\left. \begin{aligned}
 R^* \geq 671 & ; u_c^{*2} = 0.050 (\sigma/\rho - 1) \epsilon_r'' g d'_{50}, \\
 162.7 \leq R^* \leq 671 & ; = \{0.015 \ 05 (\sigma/\rho - 1) \epsilon_r'' g\}^{25/22} \\
 & \quad \nu^{-3/11} d'_{50}{}^{31/22}, \\
 54.2 < R^* \leq 162.7 & ; = 0.0340 (\sigma/\rho - 1) \epsilon_r'' g d'_{50}, \\
 2.14 \leq R^* \leq 54.2 & ; = \{0.123 \ 5 (\sigma/\rho - 1) \epsilon_r'' g\}^{25/32} \\
 & \quad \nu^{7/16} d'_{50}{}^{11/32}, \\
 R^* \leq 2.14 & ; = 0.140 (\sigma/\rho - 1) \epsilon_r'' g d'_{50}, \\
 & \dots\dots\dots (19)
 \end{aligned} \right\}$$

ここに、 $R^* = \{(\sigma/\rho - 1) \epsilon_r'' g\}^{1/2} d'_{50}{}^{3/2} / \nu$ であり、また ϵ_r'' は 図-6 に折線で示したものであって、次式によって表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 1 \leq (d_{84}/d_{16})^{1/2} \leq 1.3 & ; \epsilon_r'' (= \bar{\epsilon}_r/\epsilon) = 1, \\
 1.3 \leq (d_{84}/d_{16})^{1/2} < 2 & ; = 3.80 \exp\{-1.73 \\
 & \quad (d_{84}/d_{16})^{1/2}\}. \\
 & \dots\dots\dots (20)
 \end{aligned} \right\}$$

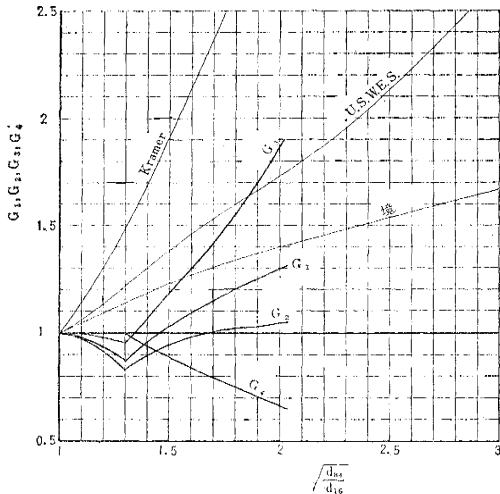
さらに、式(19)における d'_{50} を d_{50} によって表わせば、つぎの関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned}
 R^* \geq 671 & ; u_c^{*2} = 0.050 G_1 (\sigma/\rho - 1) g d_{50}, \\
 162.7 \leq R^* \leq 671 & ; = G_2 \{0.015 \ 05 (\sigma/\rho) g\}^{25/22} \\
 & \quad \nu^{-3/11} d_{50}{}^{31/22}, \\
 54.2 \leq R^* \leq 162.7 & ; = 0.0340 G_1 (\sigma/\rho - 1) g d_{50}, \\
 2.14 \leq R^* \leq 54.2 & ; = G_3 \{0.123 \ 5 (\sigma/\rho - 1) g\}^{25/32} \\
 & \quad \nu^{7/16} d_{50}{}^{11/32}, \\
 R^* \leq 2.14 & ; = 0.140 G_1 (\sigma/\rho - 1) g d_{50}, \\
 & \dots\dots\dots (21)
 \end{aligned} \right\}$$

ここに、 $R^* = G_1^{3/2} (\sigma/\rho - 1)^{1/2} g^{1/2} d_{50}{}^{3/2} / \nu$ (22) であり、 G_1, G_2, G_3 および G_4 は後述するように標準偏差 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ のみの関数である。また簡単のために $\sigma/\rho = 2.65$ 、 $\nu = 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$ (20.3°C) および $g = 980 \text{ cm/s}^2$ を用いれば、式(21)はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 d_{50} G_4 \geq 0.303 \text{ cm} & ; u_c^{*2} = 80.9 G_1 d_{50}, \\
 0.118 \leq d_{50} G_4 < 0.303 & ; = 134.6 G_2 d_{50}{}^{31/22}, \\
 0.056 \ 5 \leq d_{50} G_4 \leq 0.118 & ; = 55.0 G_1 d_{50}, \\
 0.006 \ 5 \leq d_{50} G_4 < 0.056 \ 5 & ; = 8.41 G_3 d_{50}{}^{11/32}, \\
 d_{50} G_4 \leq 0.006 \ 5 & ; = 22.6 G_1 d_{50}. \\
 & \dots\dots\dots (23)
 \end{aligned} \right\}$$

図-8 G_1, G_2, G_3 および G_4 の $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ による変化
 Fig. 8- Variations of G_1, G_2, G_3 and G_4 with $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$



式 (21) および式 (23) 中にふくまれる G_1, G_2, G_3 および G_4 は 図-6 に示した実験公式と式 (6) に示した関係とを用いて、それぞれ 図-8 に示したように表わされる。いうまでもなく、係数 G_1, G_2 および G_3 は、中央粒径 d_{50} に対応して求められる一様粒径の限界掃流力と混合砂礫のそれとの比である。この結果から明らかなように、限界掃流力におよぼす混合特性の効果は砂礫の特性によってかなり相違する一方、特に $(d_{84}/d_{16})^{1/2} \approx 1.3$ 付近においては、混合特性の効果はむしろ限界掃流力を小さくするように表わされている。全体的には $(d_{84}/d_{16})^{1/2} \approx 1.4 \sim 1.5$ 付近までは、限界掃流力は一様粒径の場合より若干小さくなるのがわかるが、その傾向は砂礫の特性によって大きく相違し、特に G_3 すなわち $2.14 \leq R^* \leq 54.2$ の場合には顕著である。

つぎに、以上述べた実験公式で与えられる混合砂礫の限界掃流力を求める方法について簡単に述べておこう。まず、混合砂礫の特性として、中央粒径、標準偏差および比重が与えられると、図-8 において $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ の値に対応する G_i を求め、それから式 (22) によって R^* を計算して式 (21) のどの領域にそうとうするかを確かめたのち、その領域に応じて $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ の値に対応する G の値を 図-8 から求めれば、式 (21) から所要の限界掃流力の値を知ることができる。また砂礫の比重が 2.65 に近い場合には、式 (23) に示した簡略式を用いると便利なことはいうまでもない。

(2) 従来の実験公式との比較

最後に、従来限界掃流力に関して提案された諸公式のうち、なんらかの形で混合特性が導入されているものの二、三について、前述した著者の公式と比較し、若干の考察をすれば、つぎのようである。限界掃流力に関する従来諸公式に対する検討は石原博士¹⁹⁾、安芸博士⁹⁾および岩垣博士⁵⁾らの論文においてくわしくなされている

ので、ここでは改めて考察しないことにするが、いま混合砂礫の混合特性をなんらかの形で実験公式の中に導入した代表的なものとして、Kramer⁹⁾、U.S.W.E.S.⁷⁾ および境 博士¹⁰⁾らの公式をとりあげ、二、三検討しておくことにする。

まず、Kramer および U.S.W.E.S. の公式では、均等比 M を用いて、限界掃流力をそれぞれつぎのように表わした。

Kramer の公式：

$$\tau_c = \rho u_c^{*2} = (100/6) d_m (w_s - w_0) / M, \dots\dots (24)$$

ここに、 τ_c : gr/m^2 , d_m : 平均粒径 mm, w_s および w_0 : それぞれ砂礫および水の単位体積あたりの重さ gr/cm^3 , である。

U.S.W.E.S. の公式：

$$\tau_c = 0.00595 \{(\sigma/\rho - 1) d_m / M\}^{0.5}, \dots\dots (25)$$

ここに、 τ_c : lbs/ft^2 , d_m : mm, である。

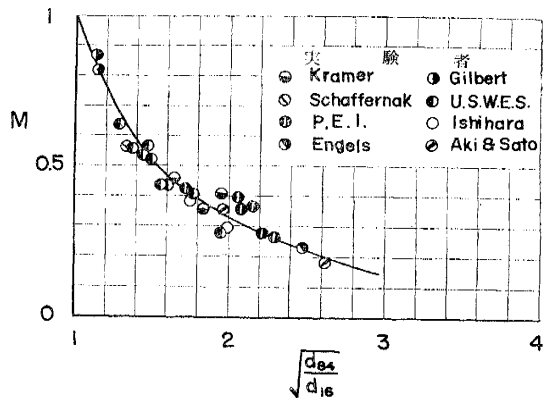
境 公式：

$$\tau_c = (100/3) (\sigma/\rho - 1) \beta d_m^{6/5}, \dots\dots (26)$$

ここに、 τ_c : gr/m^2 , d_m : mm, $\beta = (2+M)/(1+2M)$, である。

いま混合特性が限界掃流力におよぼす効果のみに着目して、著者の実験公式と比較することにすれば、Kramer の公式では $1/M$ 、U.S.W.E.S. の公式では $M^{-1/2}$ 、境公式では β に比例することになるが、 M および β がいずれも一様砂礫の場合に 1 となることから、その比例定数は 1 に等しい。ところが前述した標準偏差 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ と均等比 M との関係は明確でないが、一応、自然の混合砂礫に対する実測値にもとづいて両者の関係を求めれば、図-9 のようになる。こうした関係に対するくわしい議論は省略するが、いま図中に示した曲線によって両者の関係が表わされるものとして、 M を $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ の関数で表わし、前述した関係と著者の公式とを比較して 図-8 に示しておいた。これから明らかなように、Kramer の公式は混合効果を過大に見積りすぎており、それに続

図-9 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ と M との関係
 Fig. 9 Relation between $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ and M .



いて U.S.W.E.S. のものとなっている。全体的には、境公式がこれら3つのなかでは最も著者のものに近いようであるが、その細部にわたってはかなり相違した傾向を示している。これらの公式のほか、混合特性を実験公式の中に導入したものとして、安芸および佐藤公式あるいは栗原公式などがあるけれども、前者においては混合状態を表わすために提案された係数 λ と $(d_{84}/d_{16})^{1/2}$ との関係が明確でないし、また後者は各粒径によって相違することになるが、栗原博士が示している近似式にもとづけば、前述した境公式と全く同一の混合効果の評価になることをつけ加えるのみで、その詳細は省略する。

一方、岩垣博士は混合砂礫の限界掃流力における問題点を考察し、また一様砂礫を用いた実験の結果と理論結果とにもとづいて決定した実験公式と、混合砂礫の限界掃流力に関する従来の実験値とを比較検討して、限界掃流力におよぼす混合特性の効果は明確でなく、 M , λ あるいは β のような混合状態を表わす係数を公式の中に導入する意義が明らかでない現在では、平均粒径で十分代表しうることを述べている。図-6 に示したように最大 $(d_{84}/d_{16})^{1/2}=3$ 程度まである従来の実験値は、中央粒径に対応して岩垣公式から求められる値の最大2倍程度であり、一方、ほとんど一様である砂礫を対象とした従来の実験値にもかなりのばらつきがあって、約2倍にもおよんでいる。したがって、実験値のばらつきと混合効果が同一程度であることから、図-8 に示したように一様粒径の場合を平均値で代表させ、さらに、この結果のように系統的に表わさないかぎり、混合効果が求められなかったことは当然のことと考えてよいであろう。

4. 結 語

以上、混合砂礫の限界掃流力に関して考察した結果について述べた。こうした現象が砂礫床面における現象であることから、砂礫の特性を表わすためには、砂礫床面に露出している砂礫の分布に立脚すべきだという見解のもとに、限界掃流力を代表する砂礫に対して平衡条件式を求め、さらに砂礫床面における砂礫分布の一様性を仮定し、砂礫からなる後流の特性を考慮して、その代表砂礫におよぼす遮へい効果を解析するという方法により、限界掃流力に関する理論的考察を行なった。多くの仮定にもとづく理論的考察の結果ではあるが、実験結果と比較してかなりその傾向を説明しうることがわかった。こうした現象はきわめて複雑であって、今後の研究にまたねばならない多くの問題があるけれども、最後にそれらの結果をもとにして、混合砂礫の限界掃流力に関する実験公式を提案したが、限界掃流力に関する岩垣公式と関連して十分実用に供しうるものと考えている。

最後に本研究を行なうにあたって、終始ご指導を賜った石原藤次郎教授および岩垣雄一教授に厚く謝意を表わすとともに、本研究の実験を行なうにあたり、とおといご教示を仰いだ名古屋工業大学 橋本規明教授に深く謝意を表す。なお、この実験が遂行できたのは、辻暢博氏および長谷川淳一氏の熱心な助力によるものであることを記して謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Rouse, H.: Engineering Hydraulics, John Wiley & Sons, 1949, p. 795.
- 2) White, C.M.: The Equilibrium of Grains on the Bed of a Stream, Proc. Roy. Soc., A 174, 1940, pp. 322-338.
- 3) 栗原道徳: 限界掃流力に就いて, 九州大学流体力学研究所報告, 第4巻, 第3号, 昭23, pp. 1-26.
- 4) Tison, L.J.: Recherches sur la tension limite d'entraînement des matériaux constitutifs du lit, Proc. Minnesota International Hydraulic Convention, I.A.H.R., and A.S.C.E., 1953, pp. 21-36.
- 5) 岩垣雄一: 限界掃流力の流体力学的研究, 土木学会論文集, 第41号, 昭31, pp. 1-21.
- 6) Kramer, H.: Sand Mixtures and Sand Movement in Fluvial Models, Trans. A.S.C.E., Vol. 61, 1935, pp. 798-878.
- 7) Studies of River Bed Materials and Their Movement, with Special Reference to the Lower Mississippi River, U.S. Waterways Experiment Station, Paper 17, 1935.
- 8) Chang, Y.L.: Laboratory Investigation of Flume Traction and Transportation, Trans. A.S.C.E., Vol. 104, 1939, pp. 1246-1313.
- 9) 安芸皎一: 河相論, 岩波書店, 昭25, pp. 58.
- 10) 境 隆雄: 河床砂礫に対する限界掃流力に就いて, 土木学会誌, 第31巻, 第2号, 昭21, pp. 1-8.
- 11) Einstein, H.A.: The Bed Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows, U.S. Department of Agriculture, Soil Conservation Service, Technical Bulletin, No. 1027, pp. 1-71.
- 12) 土屋義人: 滑面水路床の下流端における洗掘限界, 土木学会論文集, 第80号, 昭37, pp. 18-29.
- 13) 土屋義人: 水門下流部における洗掘限界に関する研究, 土木学会論文集, 第82号, 昭37, pp. 21-51.
- 14) 岩垣雄一・土屋義人: 砂面上におかれた礫の限界掃流力について, 土木学会論文集, 第41号, 昭31, pp. 22-38.
- 15) 土屋義人・西平福宏: 砂礫床面における砂礫の二, 三の特性について, 土木学会論文集 第94号, 昭38, pp. 13-18.
- 16) Swain, L.M.: On the Turbulent Wake Behind a Body of Revolution, Proc. Roy. Soc., A 125, 1929, p. 647, または Schlichting, H.: Boundary Layer Theory, McGraw-Hill, 1960, p. 604.
- 17) 足立昭平: 人工粗度の実験的研究—イボ型粗度—, 京都大学防災研究所年報, 第5号A, 昭37, pp. 252-259.
- 18) Schaefer, J.W. and Eskinazi, S.: An Analysis of the Vortex Street Generated in a Viscous Fluid, Jour. Fluid Mech., Vol. 6, 1959, pp. 241-260.
- 19) 石原藤次郎: 橋脚による河床洗掘に関する実験的研究, 土木学会誌, 第24巻, 第1号, 昭13, pp. 23-55.

(原稿受付: 1963. 4. 22)