

つり橋タワーの断面力・変形量・座屈荷重の計算法に関する研究
 BERECHNUNG DER SCHNITTGRÖÖE, VERFORMUNG UND KNICKLAST
 DER PYLONEN DER HÄNGEBRÜCKEN

小西一郎*・高岡宣善**
 Von Ichiro Konishi und Nobuyoshi Takaoka

要旨 この研究は、長大スパンつり橋のタワーの断面力・変形量および座屈荷重の計算方法を積分方程式の理論を用いて誘導し、数値計算例によって実際計算へのこの理論の適用方法を示したものである。本研究で示された方法を用いることにより、上記の諸量を容易に算定することができる。

1. まえがき

長大スパンのつり橋のタワーの下端は、架設上の理由から通常固定端とされる。このような下端固定のタワーは、荷重の作用によるケーブルの移動によってタワー断面に生ずる曲げモーメントをできるだけ小さいものとするために、橋軸方向に十分なわみするように設計される必要がある。それと同時に、タワーは座屈に対して適当な安全率を有するだけの曲げこわさをもたなければならない。したがって、ここにつきの問題が生ずる：i) 塔頂に作用する鉛直荷重および塔頂の水平変位量が与えられたとき、その水平変位を生ずるに要する塔頂水平力の大きさ、ならびに、そのときに各断面に生ずる断面力とたわみ量を求めること。ii) タワーの曲げこわさが与えられたときのそのタワーの座屈荷重の大きさ。

さて、ここで取り扱うタワーは力学的には、自由端に軸方向力、横力およびモーメントをうける変断面の片持ばりである。従来このような問題においては普通微分方程式から出発し、境界条件あるいは初期条件などから積分定数を決定して所要の解を求めている¹⁾。その際、被積分関数が簡単な関数であればその積分は遂行しうるが、一般には簡単に積分できることは少ない。また仮りに積分できたとしても、積分定数を決定する計算が煩雑である場合が多い。積分方程式を用いれば、この煩雑さから解放されるのみならず、実際の数値計算においても、所要の値を迅速に算定できる。

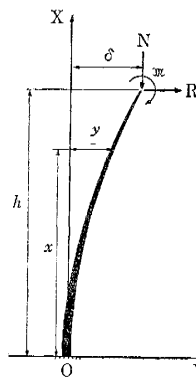
2. 断面力と変形量

(1) 基礎方程式の誘導

以下の所論においては、まずタワーの断面に生ずる曲げモーメント $M(x)$ が Fredholm の積分方程式を満足

することを示し、ついでその積分方程式の数値解法を説明する。そして、このようにして求められた $M(x)$ の値を用いてたわみ y を計算する方法を示すことにする。

図-1 座標軸と記号



座標軸 $O-x, y$ を図-1 のように定める。タワーの断面二次モーメント $J(x)$ は x の任意の関数であってよい。図において N, R, M および δ をそれぞれ塔頂に作用する鉛直力、水平力、モーメントおよび塔頂水平変位とする。 $M(x)$ および $y(x)$ を座標 x におけるタワーの曲げモーメントおよびたわみとすれば、両者の間には

$$EJ(x) \frac{d^2y}{dx^2} = M(x) \dots\dots\dots (1)$$

という関係がある。 $x=0$ における条件、すなわち $y(0) = 0$ および $(dy/dx)_{x=0} = 0$ を考慮して式 (1) を積分すれば

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{M(u)}{EJ(u)} du \dots\dots\dots (2)$$

$$y(x) = \int_0^x dv \int_0^v \frac{M(u)}{EJ(u)} du \dots\dots\dots (3)$$

いま $w(x)dx$ を点 x におけるタワーの微小部分 dx の自重とすれば、点 x における曲げモーメントは

$$M(x) = \mathfrak{R} + R(h-x) + N(\delta-y) + \int_x^h w(t) \{y(t) - y(x)\} dt$$

で与えられる。ここに h はタワーの高さである。この式を x で一度微分するとつぎの式が得られる。

$$\frac{dM}{dx} = -R - \left[N + \int_x^h w(t) dt \right] \frac{dy}{dx} \dots\dots\dots (4)$$

ここで

$$\mathfrak{R}(x) = N + \int_x^h w(t) dt \dots\dots\dots (5)$$

によって $\mathfrak{R}(x)$ を定義すれば、 $\mathfrak{R}(x)$ はタワーの断面 x に作用する全軸方向力を表わしている。式 (2) と式 (5) を式 (4) に代入して一度積分すると、 C_1 を積分定数として

$$M(x) = -Rx - \int_0^x \mathfrak{R}(v) dv \int_0^v \frac{M(u)}{EJ(u)} du + C_1$$

* 正員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室
 ** 学生員 工修 京都大学大学院工学研究科博士課程学生、土木工学専攻

ところが、 $x=h$ において $M(x)=\mathfrak{M}$ であるから

$$\mathfrak{M} = -Rh - \int_0^h \mathfrak{R}(v)dv \int_0^v \frac{M(u)}{EJ(u)} du + C_1$$

$$\therefore C_1 = \mathfrak{M} + Rh + \int_0^h \mathfrak{R}(v)dv \int_0^v \frac{M(u)}{EJ(u)} du$$

したがって $M(x)$ はつぎの式で表わされる。

$$M(x) = \mathfrak{M} + R(h-x) + \int_x^h \mathfrak{R}(v)dv \int_0^v \frac{M(u)}{EJ(u)} du$$

上式の右辺第三項の二重積分の積分順序を逆にすれば*

$$M(x) = \mathfrak{M} + R(h-x) + \int_0^x \frac{M(u)}{EJ(u)} du \int_x^h \mathfrak{R}(v)dv + \int_x^h \frac{M(u)}{EJ(u)} du \int_u^h \mathfrak{R}(v)dv \quad \dots\dots(6)$$

さて

$$W(x) = \int_x^h \mathfrak{R}(v)dv \quad \dots\dots(7)$$

によって $W(x)$ を定義すれば式(6) はつぎのように書ける。

$$M(x) = \mathfrak{M} + R(h-x) + \int_0^x \frac{W(x)M(u)}{EJ(u)} du + \int_x^h \frac{W(u)M(u)}{EJ(u)} du \quad \dots\dots(8)$$

あるいは、もっと簡単に

$$M(x) = \mathfrak{M} + R(h-x) + \int_0^h K(x,u)M(u)du \quad \dots\dots(9)$$

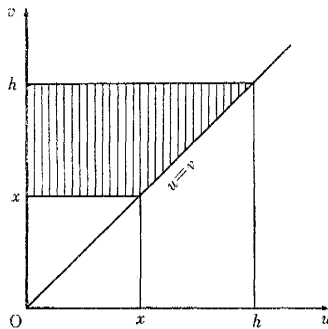
ただし上式において

$$K(x,u) = \begin{cases} W(x)/EJ(u), & [0 \leq u \leq x] \\ W(u)/EJ(u), & [x \leq u \leq h] \end{cases} \quad \dots\dots(10)$$

である。式(9)は $K(x,u)$ を核とする Fredholm の第二種積分方程式である。 $K(x,u)$ および $\mathfrak{M} + R(h-x)$ は既知の関数であり、 $M(x)$ がこれから求めようとする未知関数である。式(9)は J. Courbon が誘導した式に \mathfrak{M} の項を追加したものである²⁾。

上述の諸式においては、タワーの自重が考慮されているが、これを無視する場合には $\mathfrak{R}(x)$ および $W(x)$ は簡単な形となり、それぞれつぎの式で表わされる。

図-2



* この二重積分の積分領域は 図-2 のハッチした部分である。
** $i=1, 2, \dots, n$ として得た x_1, x_2, \dots, x_n は数値的にはそれぞれ u_1, u_2, \dots, u_n に等しい。

$$\mathfrak{R}(x) = N = \text{const} \quad \dots\dots(11)$$

$$W(x) = N(h-x) \quad \dots\dots(12)$$

(2) 積分方程式の数値解法^{3),4)}

積分方程式(9)において核 $K(x,u)$ が x と u の簡単な関数であれば解析的方法によって未知関数 $M(x)$ を求めることができるが、実際問題として、 $K(x,u)$ は x と u の簡単な関数にはならない。そこで以下においては積分方程式の数値解法について考えることにしよう。

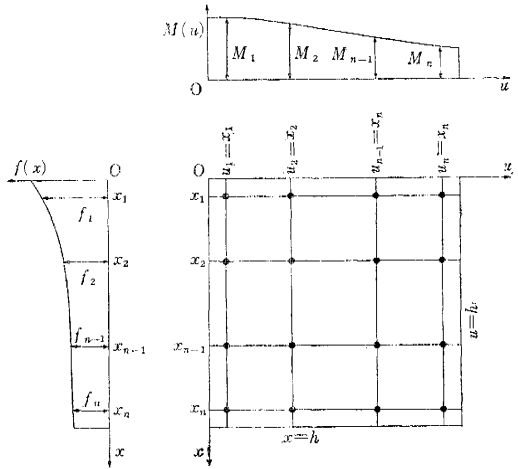
まず、式(9)を変形して

$$M(x) - \int_0^h K(x,u)M(u)du = f(x) \quad \dots\dots(13)$$

ただし、 $f(x) = \mathfrak{M} + R(h-x)$

としておく。いま 図-3 に示すように、 $x-u$ 平面上に

図-3 代表座標点



において適当な代表座標点 (x_i, u_j) を選び、式(13)の左辺第二項の積分を平均値法による数値積分に直すと

$$\int_0^h K(x,u)M(u)du = \sum_{j=1}^n R_j^n K(x, u_j)M(u_j)h$$

となる。ここに R_j^n は代表座標点のとり方によって定まるある定数である。したがって式(13)は

$$M(x_i) - h \sum_{j=1}^n R_j^n K(x_i, u_j)M(u_j) = f(x_i) \quad [i=1, 2, \dots, n] \quad \dots\dots(14)$$

となる**。式(14)を簡単のために

$$M_i - h \sum_{j=1}^n R_j^n K_{ij} M_j = f_i \quad [i=1, 2, \dots, n] \quad \dots\dots(15)$$

と書くことにする。代表座標点 (x_i, u_j) における K_{ij} の値、および x_i における f_i の値を与えると式(15)は M_i に関する連立一次方程式になるから、これを解いて M_1, M_2, M_3, \dots を求めることができる。 M_i の値がわかれば、任意の x に対する $M(x)$ の値は

$$M(x) = f(x) + h \sum_{j=1}^n R_j^n K(x, u_j)M(u_j) \quad \dots\dots(16)$$

によって容易に求められる。

Fredholm の第二種積分方程式の数値解法にあたっては平均値方式として、核が正則の場合には Tschebyscheff

あるいは Gauss の方法が、また核が特異核の場合には Nyström あるいは日高の方法などがよく用いられる。現在のわれわれの問題においては、核 $K(x,u)$ は式 (10) が示すように特異核であるから、計算の精度を高めるためには、たとえば Gauss の方法を用いるよりも日高の方法を用いることが好ましい。計算値の精度については後述する。

代表座標点の取り方は、日高の方法においては変域 $0 \leq x \leq h$ を n 個に等分し $x_i = (i/n) \cdot h$, $[i=0,1,2,\dots,n]$ とする。 $n=10$ とした場合の定数 R_j^n の値については文献を参照されたい⁵⁾。日高の方法に反して、Gauss の方法においては代表座標点は、変域の等分点にはこない。 $n=4$ とした場合の Gauss の方法における代表座標点およびその場合の定数 R_j^n の値はつぎのようである⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 0.069432h, & x_2 &= 0.330009h, \\ x_3 &= 0.669991h, & x_4 &= 0.930568h. \end{aligned} \right\} \dots\dots(17)$$

$$\left. \begin{aligned} R_1^4 &= R_4^4 = 0.173927, & R_2^4 &= R_3^4 = 0.326073 \end{aligned} \right\} \dots\dots(18)$$

(3) たわみの計算法

式 (16) によって曲げモーメント $M(x)$ が求められたから、つぎにタワーのたわみ $y(x)$ を算定する方法を考えよう。すでに式 (3) で示したように、たわみ $y(x)$ は

$$y(x) = \int_0^x dx \int_0^x \frac{M(x)}{EJ(x)} dx \dots\dots(19)$$

によって与えられる。ただし上式においては積分変数をすべて x で表わしてある。式 (19) の右辺の二重積分を簡単に行なうために、ここでつぎの変換を行なう。

$$\frac{x}{h} = \xi, \quad \alpha = \frac{h^2 M_0}{EJ_0}, \quad \frac{M}{M_0} \cdot \frac{EJ_0}{EJ} = g(\xi) \dots\dots(20)$$

上式において、 M_0 および EJ_0 はそれぞれ基準曲げモーメントおよび基準曲げこわさであって、それらの値は計算に便利なように任意に選ぶことができる。式 (20) の変換により、積分変数は x から ξ にかわり、式 (19) はつぎのようになる。

$$y(\xi) = \alpha \int_0^\xi d\xi \int_0^\xi g(\xi) d\xi \dots\dots(21)$$

$\xi = \xi_m$ におけるたわみ $y(\xi_m)$ を数値的に算出するには、つぎの式を用いるのが便利である。

表-1 $k_i(\xi_m)$ の値
Table 1 $k_i(\xi_m)$ -Werte

ξ_m	k_0	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8	k_9	k_{10}
0.1	39	13	-2	1	-1	0	0	0	0	0	0
0.2	90	101	9	-1	0	0	0	0	0	0	0
0.3	140	208	98	11	-2	1	0	0	0	0	0
0.4	190	302	200	99	10	-1	0	0	0	0	0
0.5	240	403	299	201	98	10	-1	1	0	0	0
0.6	290	502	399	300	200	99	10	-1	0	0	0
0.7	340	603	499	401	299	201	99	10	-1	1	0
0.8	390	702	599	500	400	300	200	99	10	-1	0
0.9	440	803	699	601	500	400	300	201	98	11	-1
1.0	490	902	799	700	600	500	400	300	201	98	10

$$y(\xi_m) = \alpha \int_0^{\xi_m} d\xi \int_0^\xi g(\xi) d\xi = \alpha \sum_{i=0}^{10} g_i \cdot \frac{k_i(\xi_m)}{10^4} \dots\dots(22)$$

上式において g_i は $g_i = g(\xi_i)$ の意味であり、また $i = 0,1,2,\dots,10$ に対して、それぞれ $\xi_i = 0,0.1,0.2,\dots,1.0$ である。また $k_i(\xi_m)$ の値は表-1 に与えられている。

3. 座屈荷重

(1) 基礎方程式の誘導

図-4 に示すような座標軸および記号を用いると、タワーの微分方程式はつぎのようになる。

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{N}{EJ(x)} \{y(x) - \delta\} = 0 \dots\dots(23)$$

ここに N は塔頂に作用する軸方向圧縮力である。ここで以下の計算の便宜のためにつぎのような変換を行なう。

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{h} &= \xi, & \frac{EJ_0}{EJ} &= X(\xi), \\ \frac{Nh^2}{EJ_0} &= \lambda \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

ここに EJ_0 は任意に選んだ基準曲げこわさである。

式 (24) を用いると式 (23) は

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + \lambda X(\xi) \{y(\xi) - \delta\} = 0 \dots\dots(23')$$

と書きかえられる。ここでさらに

$$y(\xi) - \delta = Y(\xi) \dots\dots(25)$$

とおくと、 $y' = Y'$ であるから、式 (23') は

$$\frac{d^2 Y(\xi)}{d\xi^2} + \lambda X(\xi) Y(\xi) = 0 \dots\dots(26)$$

となる。これを ξ で 2 回積分して

$$Y(\xi) + \lambda \int_0^\xi \int_0^\xi X(\xi) Y(\xi) d\xi d\xi = C_1 \xi + C_2 \dots\dots(27)$$

あるいは右辺の二重積分を単積分になおして

$$Y(\xi) + \lambda \int_0^\xi (\xi - \eta) X(\eta) Y(\eta) d\eta = C_1 \xi + C_2 \dots\dots(27')$$

積分定数 C_1, C_2 は境界条件

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0: & Y(0) = -\delta \text{ および } dY/d\xi = 0 \\ \xi = 1: & Y(1) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(28)$$

からきまる。すなわち

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \lambda \int_0^1 (1-\eta) X(\eta) Y(\eta) d\eta = -\delta \quad (29)$$

いま式 (29) の C_2 の右辺の積分の積分区間 $[0,1]$ を 2 つの区間 $[0,\xi]$ と $[\xi,1]$ にわけると

$$C_2 = \lambda \int_0^\xi (1-\eta) X(\eta) Y(\eta) d\eta + \lambda \int_\xi^1 (1-\eta) X(\eta) Y(\eta) d\eta$$

となるから、これを式 (27') に代入して整理すると

$$Y(\xi) = \lambda \int_0^1 K(\xi, \eta) Y(\eta) d\eta \dots\dots\dots (30)$$

となる。ここに

$$K(\xi, \eta) = \begin{cases} (1-\xi)X(\eta), & [0 \leq \eta \leq \xi] \\ (1-\eta)X(\xi), & [\xi \leq \eta \leq 1] \end{cases} \dots\dots\dots (31)$$

である。式(30)は、式(31)で定義される $K(\xi, \eta)$ を核とする Fredholm の第二種同次積分方程式である。積分方程式の理論によれば、式(30)は λ がある特定の値 λ_0 をとるときにのみ $Y=0$ 以外の解をもつ。この特定の λ_0 の値、すなわち核 $K(\xi, \eta)$ に属する固有値がわかれば、式(24)の最後の式から、タワーの座屈荷重 N_k を算定できる。

$$N_k = \lambda_0 \cdot \frac{EJ_0}{h^2} \dots\dots\dots (32)$$

(2) 固有値の計算法

a) 数値積分法による方法 この方法は、適当な代表座標点 (ξ_i, η_i) を選びだし、積分方程式(30)を連立一次方程式

$$Y_i - \lambda \sum_{j=1}^n R_j^n K_{ij} Y_j = 0 \quad [i=1, 2, \dots, n] \dots\dots\dots (33)$$

で表わし、式(33)の Y_i の係数行列式を0とおいた特性方程式の根として固有値 λ の値を求めようとするものである。いま $1/\lambda = \omega$ とおくと、式(33)から λ をきめる特性方程式として式(34)が得られる。

$$\begin{vmatrix} R_1^n K_{11} - \omega & R_1^n K_{12} & \dots & R_1^n K_{1n} \\ R_2^n K_{21} & R_2^n K_{22} - \omega & \dots & R_2^n K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_n^n K_{n1} & R_n^n K_{n2} & \dots & R_n^n K_{nn} - \omega \end{vmatrix} = 0 \quad (34)$$

この行列式を ω について展開すると

$$\omega^n - a_1 \omega^{n-1} + a_2 \omega^{n-2} - \dots + a_n = 0$$

あるいは、これを λ で表わすと

$$p(\lambda) \equiv 1 - a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 - a_3 \lambda^3 + \dots + a_n \lambda^n = 0 \dots\dots (35)$$

が得られる。 $p(\lambda) = 0$ の最小の根 λ_0 を式(32)に代入すれば座屈荷重 N_k が決定される。

b) 逐次代入法による方法 まず、式(29)を式(27)に代入すると

$$Y(\xi) = -\delta - \lambda \int_0^\xi X(\xi) Y(\xi) d\xi \dots\dots (36)$$

となる。そこで式(36)の右辺全体を式(36)の右辺の積分記号下の $Y(\xi)$ に代入すると

$$Y(\xi) = -\delta + \lambda \delta \int_0^\xi X(\xi) d\xi + \lambda^2 \int_0^\xi X(\xi) d\xi \int_0^\xi X(\xi) Y(\xi) d\xi d\xi$$

この式の右辺第三項の $Y(\xi)$ に、さらに式(36)の右辺全体を代入する。以下この操作をくり返していけば

$$Y(\xi) = -\delta(1 - \lambda I_1 + \lambda^2 I_2 - \lambda^3 I_3 + \dots) \dots\dots (37)$$

となる。ただし式(37)において

$$I_0 = 1, I_n \equiv \int_0^\xi X(\xi) \int_0^\xi X(\xi) I_{n-1} d\xi \quad [n=1, 2, 3, \dots] \dots\dots (38)$$

である。ところが境界条件より $Y(1) = 0$ であるから、 $\delta \neq 0$ であることに注意して、式(37)より

$$p(\lambda) \equiv 1 - a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 - a_3 \lambda^3 + \dots = 0 \dots\dots (39)$$

が得られる。ただし $a_n = I_n(1)$ である。 $p(\lambda) = 0$ の最小の根 λ_0 を求めるには Telemaco van Langendonck の方法を用いるのが便利である⁷⁾。また式(38)で定義された I_n の、 $\xi = \xi_m$ における値 $I_n(\xi_m)$ はつぎの式によって容易に計算できる：

$$I_n(\xi_m) = \int_0^{\xi_m} d\xi \int_0^\xi X(\xi) I_{n-1}(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^{10} j_i \cdot g_i \cdot \frac{k_i(\xi_m)}{10^4} \dots\dots (40)$$

ただし、上式において

$$j_i = X(\xi_i) = \frac{EJ_0}{EJ_i}, g_i = I_n(\xi_i) \dots\dots (41)$$

であり、また $i=0, 1, 2, \dots, 10$ に対して ξ_i はそれぞれ0.1, 0.2, ..., 1.0の値をとる。 $k_i(\xi_m)$ の値は、表-1に与えられている。

4. 数値計算例

上述した諸式を用いて、以下においては明石海峡連絡つり橋第二次案のタワーの断面諸元にもとづく数値計算例を示すことにする。図-5に示すように、タワーの高さは $h=200$ mである。またタワーの10等分点における曲げこわさ EJ_i および式(7)による W_i の値を表-2に示す。

図-5 数値計算例

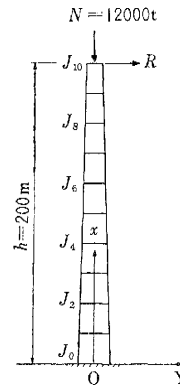


表-2 数値計算例 Table 2 Zahlenbeispiel

分割点番号 i	EJ_i (10^6tm^2)	W_i (10^6tn)
0	1956.570	2.9996
1	1614.450	2.6212
2	1185.745	2.2650
3	903.417	1.9294
4	711.439	1.6124
5	553.554	1.3124
6	408.452	1.0276
7	282.401	0.7560
8	186.337	0.4960
9	120.798	0.2434
10	78.735	0

(1) 曲げモーメントおよびたわみ

塔頂に作用する鉛直力(ケーブルの鉛直反力)は、 $N=12000$ tとする。求めようとする値は、この鉛直力およびタワーの自重が作用するとき、塔頂に水平変位 $\delta=1$ mを与えるのに要する塔頂水平力 R 、ならびにそのときのタワーの各断面の曲げモーメントおよびたわみである。 M および y は R と線型関係にあるから、 R を単位として計算を進めることができる。

以上の諸数値を用い、日高の方法によって連立方程式(15)を作ると式(42)のようになる。

点	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	f_i
0	0.989 779	-0.043 296	-0.025 469	-0.056 951	-0.030 219	-0.063 223	-0.033 545	-0.071 388	-0.035 491	-0.053 732	200 R
1	-0.010 048	0.963 469	-0.041 728	-0.030 893	-0.060 437	-0.031 611	-0.067 089	-0.037 925	-0.059 891	-0.045 336	180 R
2	-0.007 718	-0.037 412	0.974 531	-0.056 951	-0.030 219	-0.063 223	-0.033 545	-0.071 388	-0.035 491	-0.053 732	160 R
3	-0.007 396	-0.026 889	-0.036 611	0.969 745	-0.060 437	-0.031 611	-0.067 089	-0.037 925	-0.059 891	-0.045 336	140 R
4	-0.005 494	-0.026 633	-0.018 131	-0.047 594	0.969 781	-0.063 223	-0.033 545	-0.071 388	-0.035 491	-0.053 732	120 R
5	-0.005 031	-0.018 290	-0.024 903	-0.020 580	-0.049 192	0.968 389	-0.067 089	-0.037 925	-0.059 891	-0.045 336	100 R
6	-0.003 501	-0.016 973	-0.011 555	-0.030 332	-0.019 259	-0.049 503	0.966 455	-0.071 388	-0.035 491	-0.053 732	80 R
7	-0.002 898	-0.010 536	-0.014 345	-0.011 855	-0.028 337	-0.018 210	-0.049 357	0.962 075	-0.059 891	-0.045 336	60 R
8	-0.001 690	-0.008 193	-0.005 577	-0.014 671	-0.009 296	-0.023 894	-0.016 191	-0.046 836	0.964 509	-0.053 732	40 R
9	-0.000 938	-0.003 392	-0.004 619	-0.003 817	-0.009 123	-0.005 863	-0.015 891	-0.013 723	-0.023 742	0.954 664	20 R

表-3 g_i の計算過程

Table 3 Ermittlung von g_i -Werten

分割点番号 i	$\frac{M_i}{M_0}$	$j_i = \frac{EJ_0}{EJ_i}$	g_i
0	1.000 000	1.000 000	1.000 000
1	0.920 499	1.211 911	1.115 563
2	0.837 141	1.650 077	1.381 347
3	0.749 269	2.165 743	1.622 724
4	0.656 899	2.750 157	1.806 575
5	0.559 610	3.534 563	1.977 977
6	0.457 757	4.790 205	2.192 750
7	0.359 741	6.928 327	2.492 403
8	0.238 532	10.500 173	2.504 627
9	0.120 880	16.196 983	1.957 891
10	0	24.850 000	0

この連立一次方程式の解は

$M_0 = 258.163 R$, $M_1 = 237.638 R$, $M_2 = 216.118 R$,
 $M_3 = 193.433 R$, $M_4 = 169.587 R$, $M_5 = 144.470 R$,
 $M_6 = 118.176 R$, $M_7 = 92.872 R$, $M_8 = 61.580 R$,

$M_9 = 31.207 R$

となる。つぎに式 (22) によつてたわみを求めるわけであるが、そのためには、まず式 (20) によつて α と g の値を計算しておく(表-3 参照)。基準曲げモーメントおよび基準曲げこわさとしてタワー基礎の各値を採用すれば

$$\alpha = \frac{h^2 M_0}{EJ_0} = \frac{200^2 \times 258.163 R}{1.956 570 \times 10^9} = 0.527 787 \times 10^{-2} R$$

となる。表-4 にタワーの 10 等分点のたわみの計算過程を示す。塔頂のたわみが $\delta = 1 \text{ m}$ であるという条件から R の値がつかうように定まる。

$$y(1) = \alpha \sum_{i=0}^{10} g_i \frac{k_i(1)}{10^i} = \delta = 1$$

$$0.527 787 \times 10^{-2} R \times \frac{8128.899}{10^4} = 1$$

∴ $R = 233.082 \text{ t}$

∴ $\alpha = 0.527 787 \times 10^{-2} \times 233.082 = 1.230 176$

表-4 たわみの計算過程

Table 4 Rechnungsgang von Ausbiegungen

ξ_m	$g_0 k_0$	$g_1 k_1$	$g_2 k_2$	$g_3 k_3$	$g_4 k_4$	$g_5 k_5$	$g_6 k_6$	$g_7 k_7$	$g_8 k_8$	$g_9 k_9$	$\sum g_i k_i$
0.1	39.000	14.502	-2.763	1.623	-1.807	0	0	0	0	0	50.555
0.2	90.000	112.672	12.432	-1.623	0	0	0	0	0	0	213.481
0.3	140.000	226.459	135.372	17.850	-3.613	1.978	0	0	0	0	518.046
0.4	190.000	336.900	276.269	160.650	18.066	-1.978	0	0	0	0	979.907
0.5	240.000	449.572	413.028	326.168	177.044	19.780	-2.193	2.492	0	0	1 625.886
0.6	290.000	560.013	551.157	486.817	361.315	195.820	21.928	-2.492	0	0	2 464.558
0.7	340.000	672.684	689.292	650.712	540.166	397.573	217.082	24.924	-2.505	1.958	3 531.886
0.8	390.000	783.125	827.427	811.362	722.630	593.393	438.550	246.748	25.046	-1.958	4 836.323
0.9	440.000	895.797	965.562	975.257	903.288	791.191	657.825	500.973	245.453	21.537	6 396.883
1.0	490.000	1 006.238	1 103.696	1 135.907	1 083.945	988.989	877.100	747.721	503.430	191.873	8 128.899

図-6 曲げモーメントとたわみ

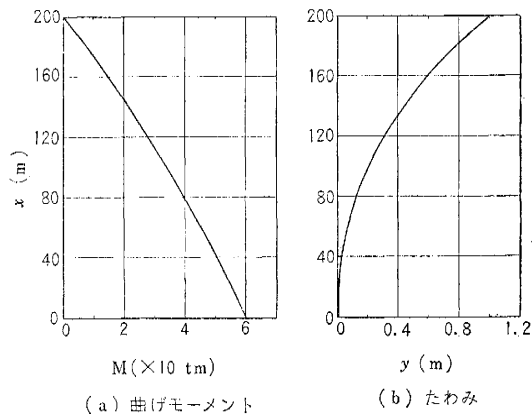


表-5 M と y の計算結果

Table 5 Berechnungsergebnisse von M und y

分割点番号 i	旧商の方法による解		Gaußの方法による解	
	M_i (tm)	y_i (m)	M_i (tm)	y_i (m)
0	60 173	0.000 0	60 289	0.000 0
1	55 389	0.006 2	55 497	0.006 2
2	50 373	0.026 3	50 430	0.026 3
3	45 086	0.063 7	45 385	0.063 8
4	39 528	0.120 5	39 619	0.120 8
5	33 673	0.200 0	33 592	0.200 5
6	27 545	0.303 2	27 634	0.303 9
7	21 647	0.434 5	21 358	0.435 4
8	14 353	0.595 0	14 258	0.595 8
9	7 274	0.786 9	7 227	0.787 4
10	0	1.000 0	0	1.000 0

この R と α の値がわかれば、 M と y の値はすべて計算される。計算結果を 表-5 および 図-6 に示す。

表-5 にはまた Gauß の方法で $n=4$ とした場合の計算結果も記入されている。この場合、塔頂に $\delta=1\text{m}$ の水平変位を生ぜしめるのに必要な水平力の値は $R=233.300\text{t}$ である。2つの方法による計算結果を比較することにより、現在のわれわれの問題においては、核が特異核であるにもかかわらず、Gauß の方法 ($n=4$) によって実用上十分な精度で所要の値を算定できることがわかる。日高の方法によって M_i を求めるためには10元の連立一次方程式を解かなければならぬのに反して、Gauß の方法によれば4元の連立方程式でことたりる。したがって実用計算にさいしては、後者の方法を用いることによって計算労力を軽減することができる。ただしGauß の方法によって M_i を求めた場合には、代表座標点の位置がタワーの高さの等分点にはこないで、等分点における M_i の値が欲しいときには式(16)によって計算を行なう必要がある。

(2) タワーの自重の影響

上述の計算においては、タワーの自重を考慮して解を求めたわけであるが、ここでその結果と、タワーの自重を無視した場合の結果とを比較してみよう。

タワーの自重を無視する場合には、 $W(x)$ は式(12)によって計算すればよい。この場合、 $\delta=1\text{m}$ を生ぜしめる R の値は $R=241.014\text{t}$ となる。その他の計算結果を 表-6 に示す (Gauß の方法によって M_i を計算した。 $n=4$)。これらの値と、表-5 の値とを比較することにより、タワーの自重がたわみおよび曲げモーメントにおよぼす影響は、高々数パーセントであることがわかる。

表 6 タワーの自重を無視した場合の計算結果
Table 6 Berechnungsergebnisse beim Vernachlässigen des Pyloneneigengewichts

分割点番 号 i	M_i (tm)	y_i (m)	分割点番 号 i	M_i (tm)	y_i (m)
0	60 304	0.000 0	6	27 748	0.303 4
1	55 401	0.006 2	7	21 493	0.434 9
2	50 310	0.026 3	8	14 424	0.595 5
3	45 219	0.063 8	9	7 003	0.789 4
4	39 559	0.120 5	10	0	1.000 0
5	33 653	0.200 2			

(3) 座屈荷重

つぎに、このタワーの座屈荷重を逐次代入法で求めてみる。式(41)で定義される j_i の値は 表-3 に与えられている。式(40)で計算される I_n の計算過程を 表-7 に示す。

これより式(39)の $p(\lambda)$ としてつぎの式が得られる。

$$p(\lambda) = 1 - 1.49719\lambda + 0.520389\lambda^2 - 0.079071\lambda^3 + 0.00689711\lambda^4 - 0.000395270\lambda^5 + \dots = 0$$

Telemaco van Langendonck の方法によって $p(\lambda) = 0$

表-7 I_n の計算過程
Table 7 Rechnungsgang von I_n -Werten

ξ_m	$10^{-1} \cdot I_1$	I_2	$10 \cdot I_3$	$10^2 \cdot I_4$	$10^3 \cdot I_5$
0.1	0.000 509	0.000 044	-0.000 005	-0.000 001	
0.2	0.002 251	0.000 083	0.000 005	-0.000 001	
0.3	0.005 696	0.000 632	0.000 053	0.000 005	
0.4	0.011 244	0.002 390	0.000 218	0.000 012	
0.5	0.019 601	0.007 702	0.001 495	0.000 275	
0.6	0.031 474	0.019 708	0.005 101	0.000 757	
0.7	0.048 486	0.049 828	0.023 859	0.008 261	
0.8	0.071 652	0.108 383	0.075 375	0.024 644	
0.9	0.102 771	0.226 665	0.209 343	0.108 704	
1.0	0.149 719	0.520 389	0.790 710	0.689 711	0.395 270

の最小の根 λ_0 を求めると

$$\lambda_0 = 0.928\ 208 \approx 0.93$$

となる。したがって式(32)より求める座屈荷重は

$$N_k = \lambda_0 \frac{EJ_0}{h^2} = 0.93 \times \frac{1.956\ 570 \times 10^9}{200^2} = 45\ 490\ \text{t}$$

である。

5. む す び

この論文においては、変断面を有するつり橋タワーの曲げモーメント・たわみ・座屈荷重を算定する方法を、積分方程式の理論によって誘導した。ここに示された方法を用いることによって、卓上計算機によって実際の数値計算を迅速に遂行することができる。

ここで取り扱ったような問題を積分方程式の理論によって解くほうが、直接微分方程式を解くよりもすぐれている点はずいぶん多い。

- ① 積分定数を決定するという煩雑な計算から解放される。
- ② 求めようとする値をただ一回の計算操作によって算出することができる。かつ、また微分方程式による数値計算よりも誤差が少なくてすむ。
- ③ タワーの断面二次モーメントが任意に変化していても一般的に議論をすすめることができる。

曲げモーメントおよびたわみを計算する際、塔頂に作用する鉛直力・水平力・モーメント、ならびにタワーの自重が考慮されている。タワーの曲げモーメント $M(x)$ は Fredholm の第二種積分方程式を満足する。この積分方程式を数値的に解くにあたっては、その核が特異核であるので、まず日高の数値解法を採用した(分割点数 $n=10$)。つぎに比較のために、核が正則核の場合の解法であるところのGaußの方法 ($n=4$) によっても計算を行なった。これらの2つの計算方法による計算結果は互いによく似ている。後者の方法によれば、前者の方法によるよりも計算労力をいちじるしく軽減できるので、予備計算においてはGaußの方法によって計算を行なうことができる。また数値計算の結果、タワーの自重は曲げモーメントおよびたわみに対してほとんど影響しないことがわかった。したがって実用計算に際しては、タワー

の自重を無視してよく、そうすることによって、また計算を簡単にすることができる。

座屈荷重を算定する方法は2つ示されている。第一の方法は、タワーのたわみが Fredholm の第二種同次積分方程式を満足しているので、この積分方程式の固有値を計算するという方法である。この積分方程式の核は特異核であるので、これを数値的に解くためには、たとえば口高の方法によらなければならない。この場合、正則核の場合の解法である Gauss の方法を用いると誤差が大きくなる (Gauss の方法で $n=4$ とした場合の解は $N_k=42138 t$ である。これに対して、Telemaco van Langendonck の方法で求めた値は $N_k=45490 t$ である)。

座屈荷重を求める第二の方法として、Telemaco van Langendonck の方法を説明した。卓上計算機によって

座屈荷重を計算する場合には、第一の方法によるよりもこの方法によるほうが計算が容易である。

参考文献

- 1) Birdsall, B. : The Suspension Bridge Tower Cantilever Problem. Proc. of ASCE, vol. 67, No. 4, pp. 517-532, 1941.
- 2) Courbon, J. : Calcul des pylônes flexibles des ponts suspendus. Publications of IABSE (1949), pp. 69-82.
- 3) 日高孝次 : 数値積分法上巻 (昭 23, 岩波) pp. 141-217.
- 4) 近藤次郎 : 積分方程式 (昭 34, 培風館) pp. 105-131.
- 5) 上掲文献 3) の pp. 205-210 参照
- 6) 上掲文献 4) の pp. 117 参照
- 7) Telemaco van Langendonck : Eine numerische Lösung des Knickproblems. Publications of IABSE (1954), pp. 111-123.

(原稿受付 : 1962. 6. 18)