

軸圧縮力を受ける円弧アーチの曲げねじれ座屈に関する研究*

THE BUCKLING OF CIRCULAR ARCHES BY LATERAL FLEXURE
AND TORSION UNDER AXIAL THRUST

深 沢 泰 晴**

By Yasuharu Fukasawa

要旨 アーチの横方向の安定性は、アーチの軸線をふくむ面に垂直方向の曲げ変形と、断面のねじれ中心のまわりのねじれ変形とが達成して起こる座屈によって支配される。このようなアーチの曲げねじれ座屈について、その弾性域内における基本的な諸性質を、円弧アーチを対象に選んで究明した。一連の数値計算を電子計算機によって行ない、解を一般性のある形で若干の図表にまとめた。

モデルテストも理論的な解析と平行して行ない、実験的な裏づけを得た。

1. 緒 言

長径間橋梁の横方向の安定性に関する問題は吊橋だけにかぎったものではない。長径間の橋梁形式として吊橋に続くアーチ橋においても、支間の増大とともに、橋は極度に細長い構造物となり、慣用設計法によった場合、横方向の剛性が不足する可能性が生じてくる。したがって、最近話題となっている海峡連絡橋などに出現する500 mを越えるような長大支間のアーチ橋では、アーチ面内の安定問題よりはむしろ、側方への安定問題が支配的となり、主構形式によっては、橋梁幅員との関連において、支間におのずから限界が存在することにもなる。

従来、一部では主構間隔と限界スパンの比として、1/20 という数字が、アーチ橋設計において、側方への安定を確保させるための一つの目安とされていたといわれるが、明確な理論的根拠のもとづくものではないようである。それはアーチ橋を形成する主構の構造形式によってもいちじるしく相違するものであることは明らかであり、例えばねじり剛性の特に大きい閉断面構造を主構とするパイプアーチ橋などでは、主構間隔すなわち、橋梁幅員によって、スパンが限定される場合はかなり少ないと考えられる。

このような事情を顧慮し、また最近の橋梁工学のすう勢に呼応して、この種の問題の十分なる解明がなされなければならないと思う。

アーチの面内の安定問題に関する研究は、今までに多数の研究者によって扱われてきており、その基本的な

性質はそうとうくわしく究明されている。これに反し、横方向（アーチ面に垂直方向）の安定問題に関する研究は比較的少なく、最も基礎的な事がさえも解明しつくされていないのが現状であると思われる。

薄肉板アーチの面外座屈を論じた S. Timoshenko の論文¹⁾などは、この種の問題を扱った最も初期のものである。1942~43年の国際橋梁構造会議において、F. Stüssi が放物線形アーチの横方向の座屈を Engesser-Vianello 法によって計算し、横方向の振動問題の解とともに報告しているが²⁾、戦時中のためか入手できず、その全容を知りえないのは残念である。タイの剛性が無限大のアーチの、横方向の座屈問題を対象とした W.G. Godden の研究³⁾は100ケースにのぼる実験的研究に教えられるところが多いが、同研究の適用範囲はごく限られている。

最近では、K. Klöppel & W. Protte⁴⁾が円弧アーチの弦に沿って作用する力による面外座屈を論じ、電子計算機による大量の数値計算によって、いろいろな性質を明らかにしているのは興味ぶかい。また、P. Stein⁵⁾は放物線アーチについてたわみ法を用いて解き、C.F. Kee⁶⁾は前記の W.G. Godden の研究をひきつぎ、塑性座屈の問題に発展させている。倉西氏⁷⁾は横桁で結合された2本のアーチリブよりなるアーチ橋を対象として、この種の問題を解析している。

本論文はこのようなアーチの横方向の安定性について、もう一度本質的な問題にたちかえり、いままでに明らかにされていないいくつかの基本的な性質を究明し、長径間アーチ橋の横方向の安定問題解明の基礎的足がかりを築こうとするものである。

円弧アーチがその曲率中心に向かう等分布荷重を受ける場合、また放物線アーチが鉛直等分布荷重を受ける場合、ともにアーチリブは近似的には軸圧縮力を受ける状態にある。直線材が軸圧縮を受ける場合には、断面が2軸対称（重心とせん断中心が一致）であれば、各対称軸に関する曲げ座屈ならびにねじれ座屈の3種の座屈がそれぞれ独立に起こり、また断面が一軸対称であれば、非対称軸に関する曲げ座屈のほか、対称軸に関する曲げ変形とせん断中心に関するねじれ変形とが互いに連成したいわゆる曲げねじれ座屈という不安定現象が存在す

* 一部はすでに第16回土木学会年次学術講演会、ならびに第12回応用力学連合講演会において発表

** 正員 工修 東京大学大学院 数物系研究科博士課程在学

ることはよく知られている。

ところが、アーチのような曲線材が、軸圧縮力を受ける状態にあるときには、たとえ2軸対称断面であっても、惹起される不安定現象は、アーチ面内の曲げ座屈のほか、アーチ面外への曲げ変形とねじれ変形とが連成した座屈である。アーチの横方向の安定性を支配するのはこの後者の座屈である。これを“アーチの曲げねじれ座屈”と呼ぶことにする。この現象は外見的にははりの横座屈によく似ているが、はりの横座屈は作用している曲げモーメントに起因する不安定現象であるのに反し、これは軸圧縮力によるものであるという点で、本質的にはむしろ前記の直線圧縮材の曲げねじれ座屈に通ずるものである。このような意味あいから、あえて“アーチの曲げねじれ座屈”という言葉を用いるものである。

本論文で扱うものは軸圧縮力を受けた円弧アーチの曲げねじれ座屈である。

2. 基本式の誘導

(1) 仮定と約束

円弧アーチの曲げねじれ座屈変形の基礎方程式をエネルギー最小原理にもとづいて、変分問題のオイラーの微分方程式として導く。その計算の出発点となるおまな仮定ないし約束はつぎのようである。

a) 断面のせん断中心を遠らねた線が曲率半径 R , 中心角 θ_0 なる円弧をなすアーチリブ AB が、曲率中心に向かう満載等分布荷重 p を受け、面 OAB 内でつり合い状態にあるとき (図-1 (a)), 任意断面に作用する断面力は近似的に、

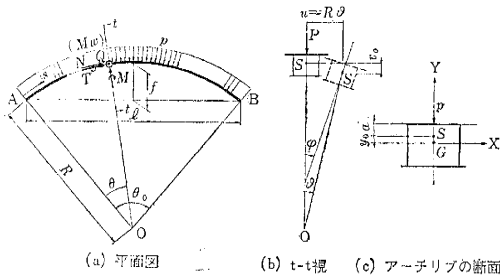
$$N \approx R \cdot p \dots\dots\dots (1)$$

で表わされる軸圧縮力であるとする。支点状態によっては曲げモーメントも生ずるが、アーチの横方向の不安定現象に対する影響は、この場合、軸力にくらべて小さいので無視する。

b) 軸圧縮力 N による弾性変形は無視し、すなわちアーチ載荷前と同じ形状を保持するものとし、またアーチ面 OAB に垂直方向の変位 $u (=R\vartheta)$ およびねじれ角 φ なるアーチリブの面外変形 (図-1 (b)) に際しても、軸力 N の値は変化しないものとする。

c) アーチリブの断面は、半径方向と一致する主軸

図-1 一般図



Y に関して対称であるとする (図-1 (c))。そのほか構造力学の慣用の仮定にしたがう。

なお、アーチリブの任意の位置は、一端Aを原点としてアーチリブに沿ってはかった線座標 s , あるいはAOからの偏角 θ によって表わす ($s=R\theta$)。また面 OAB に垂直方向の変位 u は断面のせん断中心 S の変位である。

(2) 基本量と境界条件

アーチ面外への曲げねじれ変形 $u (=R\vartheta)$, φ によって生ずる半径方向に関する曲率 ρ_R , およびねじれ率 ρ_θ は次式で表わされる、

$$\rho_R \approx \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\varphi}{R} = -\frac{1}{R} \left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \varphi \right),$$

$$\rho_\theta \approx \frac{d\varphi}{ds} - \frac{du}{Rds} = \frac{1}{R} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\vartheta}{d\theta} \right)$$

したがって、断面力すなわち断面の Y 軸のまわりの曲げモーメント M , ねじりモーメント T , そり拘束モーメント M_w , 断面の Y 軸に垂直方向のせん断力 Q はつぎのように書ける。これらの量の正の方向は 図-1 (a) (b) に示す。

$$M = -EI_Y \left(\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\varphi}{R} \right) = -\frac{EI_Y}{R} \left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \varphi \right)$$

$$T = GK \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{R} \cdot \frac{du}{ds} \right) - EC_w \left(\frac{d^3\varphi}{ds^3} - \frac{1}{R} \cdot \frac{d^3u}{ds^3} \right)$$

$$= \frac{GK}{R} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\vartheta}{d\theta} \right) - \frac{EC_w}{R^3} \left(\frac{d^3\varphi}{d\theta^3} - \frac{d^3\vartheta}{d\theta^3} \right)$$

$$M_w = -EC_w \left(\frac{d^3\varphi}{ds^3} - \frac{1}{R} \cdot \frac{d^3u}{ds^3} \right)$$

$$= -\frac{EC_w}{R^3} \left(\frac{d^3\varphi}{d\theta^3} - \frac{d^3\vartheta}{d\theta^3} \right)$$

$$Q = -EI_Y \left(\frac{d^3u}{ds^3} + \frac{1}{R} \cdot \frac{d\varphi}{ds} \right) - \frac{GK}{R} \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{1}{R} \cdot \frac{du}{ds} \right)$$

$$+ \frac{EC_w}{R} \left(\frac{d^3\varphi}{ds^3} - \frac{1}{R} \cdot \frac{d^3u}{ds^3} \right)$$

$$= -\frac{EI_Y}{R^2} \left(\frac{d^3\vartheta}{d\theta^3} + \frac{d\varphi}{d\theta} \right) - \frac{GK}{R^2} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\vartheta}{d\theta} \right)$$

$$+ \frac{EC_w}{R^4} \left(\frac{d^3\varphi}{d\theta^3} - \frac{d^3\vartheta}{d\theta^3} \right)$$

.....(2)

ここに、 EI_Y はアーチリブの断面の Y 軸に関する曲げ剛性、 GK はねじり剛性、 EC_w は曲げねじれ剛性である。

また、アーチ面 OAB に垂直方向のたわみ角 ψ および断面のそり量 w は、

$$\psi = \frac{du}{ds} = \frac{d\vartheta}{d\theta},$$

$$w = C_s \left(\frac{d\varphi}{ds} - \frac{du}{ds} \right) = \frac{C_s}{R} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\vartheta}{d\theta} \right)$$

.....(3)

で表わされる。 C_s は断面のそり定数である。

アーチの面外への曲げねじれ変形に対する支点におけ

る境界条件として、本論文ではつぎの 2 つの場合を扱う。

境界条件 (A) 両支点で位置ならびにねじれ回転が固定され、さらに半径方向に関する曲げならびに断面のそりが自由な場合。境界条件式はつぎようになる。

$$\theta=0, \theta=\theta_0 \text{ で}$$

$$u=R\vartheta=0, \varphi=0, M=-\frac{EI_Y}{R}\left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}+\varphi\right)=0,$$

$$M_w=-\frac{EC_w}{R^2}\left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}-\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}\right)=0$$

すなわち、

$$\theta=0, \theta=\theta_0 : \vartheta=0, \varphi=0, \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}=0, \frac{d^2\varphi}{d\theta^2}=0 \dots\dots\dots(4)$$

$EC_w=0$ の場合には

$$\theta=0, \theta=\theta_0 : \vartheta=0, \varphi=0, \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}=0 \dots\dots(4)'$$

境界条件 (B) 両支点で位置ならびにねじれ回転が固定され、さらに半径方向に関する曲げならびに断面のそりも固定されている場合。境界条件式は

$$\theta=0, \theta=\theta_0 \text{ で}$$

$$u=R\vartheta=0, \varphi=0, \psi=\frac{d\vartheta}{d\theta}=0,$$

$$w=-\frac{C_s}{R}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}-\frac{d\vartheta}{d\theta}\right)=0$$

すなわち、

$$\theta=0, \theta=\theta_0 : \vartheta=0, \varphi=0, \frac{d\vartheta}{d\theta}=0, \frac{d\varphi}{d\theta}=0 \dots\dots\dots(5)$$

$EC_w=0$ の場合には

$$\theta=0, \theta=\theta_0 : \vartheta=0, \varphi=0, \frac{d\vartheta}{d\theta}=0 \dots\dots\dots(5)'$$

つぎに、スパン中央に関する変形の対称条件と逆対称条件とを求めておく。

対称条件 $\theta=\theta_0/2$ で、

$$\psi=\frac{d\vartheta}{d\theta}=0, w=\frac{C_s}{R}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}-\frac{d\vartheta}{d\theta}\right)=0$$

$$T=\frac{GK}{R}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}-\frac{d\vartheta}{d\theta}\right)-\frac{EC_w}{R^2}\left(\frac{d^3\varphi}{d\theta^3}-\frac{d^3\vartheta}{d\theta^3}\right)=0$$

$$Q=-\frac{EI_Y}{R^2}\left(\frac{d^3\vartheta}{d\theta^3}+\frac{d\varphi}{d\theta}\right)-\frac{GK}{R^2}\left(\frac{d\varphi}{d\theta}-\frac{d\vartheta}{d\theta}\right) + \frac{EC_w}{R^2}\left(\frac{d^3\varphi}{d\theta^3}-\frac{d^3\vartheta}{d\theta^3}\right)=0$$

すなわち、

$$\theta=\theta_0/2 : \frac{d\vartheta}{d\theta}=0, \frac{d\varphi}{d\theta}=0, \frac{d^3\vartheta}{d\theta^3}=0, \frac{d^3\varphi}{d\theta^3}=0 \dots\dots\dots(6)$$

$EC_w=0$ の場合には

$$\theta=\theta_0/2 : \frac{d\vartheta}{d\theta}=0, \frac{d\varphi}{d\theta}=0, \frac{d^3\vartheta}{d\theta^3}=0 \dots\dots(6)'$$

逆対称条件 $\theta=\theta_0/2$ で、

$$u=R\vartheta=0, \varphi=0, M=-\frac{EI_Y}{R}\left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}+\varphi\right)=0,$$

$$M_w=-\frac{EC_w}{R^2}\left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}-\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}\right)=0$$

すなわち、

$$\theta=\frac{\theta_0}{2} : \vartheta=0, \varphi=0, \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}=0, \frac{d^2\varphi}{d\theta^2}=0 \dots\dots(7)$$

$EC_w=0$ の場合には

$$\theta=\frac{\theta_0}{2} : \vartheta=0, \varphi=0, \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}=0 \dots\dots\dots(7)'$$

(3) 曲げねじれ変形によるポテンシャル エネルギー

図-1 (a) に示されるようなつり合い状態から、図-1 (b) に示されるようなアーチ面外への曲げとねじれ変形とを起こした状態に移行する際に、系全体が獲得するポテンシャル エネルギー W は次式で計算される。

$$W = \frac{1}{2R} \int_0^{\theta_0} EI_Y \left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \varphi \right)^2 d\theta + \frac{1}{2R} \int_0^{\theta_0} GK \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\vartheta}{d\theta} \right)^2 d\theta + \frac{1}{2R} \int_0^{\theta_0} EC_w \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} \right)^2 d\theta - \frac{1}{2} R \int_0^{\theta_0} N \left[\frac{i_p^2}{R^2} \left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2 - 2 \frac{y_0}{R} \cdot \frac{d\vartheta}{d\theta} \cdot \frac{d\varphi}{d\theta} \right] \times d\theta + V \dots\dots\dots(8)$$

ここに、 i_p は断面のせん断中心に関する極回転半径、 y_0 は断面の図心 G とせん断中心 S との距離 (せん断中心が上方の場合を正とする、図-1 (c) 参照) である。式 (8) の右辺の最初の 3 項はアーチリブにたくわえられるひずみエネルギーを表わし、この場合、二次的せん断ひずみによる分は省略した。第 4 項は荷重 p によって生じている軸力 N の得るポテンシャル エネルギーである (例えば文献¹¹⁾の直線材の曲げねじれ座屈の項参照)。断面のせん断中心を連ねた線の曲率半径 R に対し、重心を連ねた線の曲率半径は $R-y_0$ であるから、厳密には式 (8) においてこの両者を区別しなければならないことはいうまでもない。しかしながら、ここでは、一般に $y_0/R \ll 1$ であることを考慮してせん断中心と重心との偏倚の影響は、第一次近似として式 (8) の第 4 項においてのみ考えることにした。

式 (8) の右辺の最終項 V は荷重 p の直接に得るポテンシャル エネルギーを表わし、横変形の際の p の作用方向の変化に対応して、つぎの 3 つの Case が考えられる (図-2)。

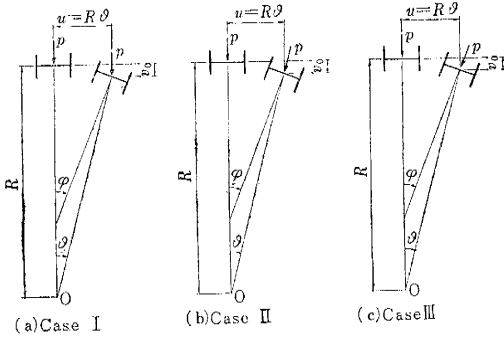
Case I p の作用方向が初めの方向に常に平行な場合で、 p の作用点の作用方向への変位 d は

$$d = v_0 + a(1 - \cos \varphi) \approx v_0 + \frac{1}{2} a \varphi^2$$

したがって、

$$V = - \int_0^{\theta_0} p d R d\theta = - \frac{1}{2} R^2 \int_0^{\theta_0} p \left(2 \frac{v_0}{R} + \frac{a}{R} \varphi^2 \right) d\theta \dots\dots\dots(9) \text{ I}$$

図 2 荷重 p の作用方向の変化による分類



Case II p が常に横変形前の曲率中心 O に向かう場合

$$d = R - \sqrt{(R - v_0)^2 + u^2} + a[1 - \cos(\varphi - \vartheta)]$$

$$\approx v_0 - \frac{1}{2}R\vartheta^2 + \frac{1}{2}a(\varphi - \vartheta)^2$$

したがって、

$$V = -\frac{1}{2}R^2 \int_0^{\theta_0} p \left[2\frac{v_0}{R} - \vartheta^2 + \frac{a}{R}(\varphi - \vartheta)^2 \right] d\theta \dots\dots\dots (9)_{II}$$

Case III p が常に断面の対称主軸方向 Y に向かう場合

$$d = R \cdot \frac{\vartheta}{\varphi} - \sqrt{\left(R \frac{\vartheta}{\varphi} - v_0\right)^2 + u^2}$$

$$\approx v_0 - \frac{1}{2}R\vartheta\varphi$$

したがって、

$$V = -\frac{1}{2}R^2 \int_0^{\theta_0} p \left(2\frac{v_0}{R} - \vartheta\varphi \right) d\theta \dots\dots\dots (9)_{III}$$

式 (9)_I ~ (9)_{III} において、 a は断面のせん断中心と荷重 p の作用点の距離 (荷重作用点が上方の場合に正、図-1 (c) である。また v_0 は横変位 $u (=R\vartheta)$ にもよって生ずる半径方向の変位で、 u と v_0 との間には高次の微小量を省略して次式が成立する。

$$\int_0^{\theta_0} 2\frac{v_0}{R} d\theta = \int_0^{\theta_0} \left(\frac{d\vartheta}{d\theta}\right)^2 d\theta \dots\dots\dots (10)$$

(4) 曲げねじれ座屈の基礎方程式

前節で仮定した曲げねじれ変形は、対応する座屈荷重 $N_{cr} (=Rp_{cr})$ に対して平衡をうるものでなければならない。したがって、そのような変形にもなるポテンシャルエネルギー W は最小値をとらなければならない。すなわち、

$$\delta W = 0$$

この変分演算から、アーチの曲げねじれ座屈変形の弾性方程式が境界条件式 (4)、(5) を考慮して、オイラーの微分方程式としてつぎのように得られる。

Case I に対して、

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left[EI_Y \left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \varphi \right) \right] + \frac{d}{d\theta} \left[GK \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\vartheta}{d\theta} \right) \right]$$

$$- \frac{d^2}{d\theta^2} \left[\frac{EC_w}{R^2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} \right) \right] + R^2 N_{cr} \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}$$

$$- RN_{cr} \frac{d}{d\theta} \left(y_0 \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = 0$$

$$EI_Y \left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \varphi \right) - \frac{d}{d\theta} \left[GK \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\vartheta}{d\theta} \right) \right] + \frac{d^2}{d\theta^2}$$

$$\times \left[\frac{EC_w}{R^2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} \right) \right] - RaN_{cr}\varphi + N_{cr}$$

$$\times \frac{d}{d\theta} \left[i_p^2 \frac{d\varphi}{d\theta} - y_0 R \frac{d\vartheta}{d\theta} \right] = 0 \dots\dots\dots (11)_{I}$$

Case II に対して、

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left[EI_Y \left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \varphi \right) \right] + \frac{d}{d\theta} \left[GK \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\vartheta}{d\theta} \right) \right]$$

$$- \frac{d^2}{d\theta^2} \left[\frac{EC_w}{R^2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} \right) \right] + R^2 N_{cr} \left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \vartheta \right)$$

$$- RN_{cr} \frac{d}{d\theta} \left(y_0 \frac{d\varphi}{d\theta} \right) + RaN_{cr}(\varphi - \vartheta) = 0$$

$$EI_Y \left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \varphi \right) - \frac{d}{d\theta} \left[GK \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\vartheta}{d\theta} \right) \right] + \frac{d^2}{d\theta^2}$$

$$\times \left[\frac{EC_w}{R^2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} \right) \right] - RaN_{cr}(\varphi - \vartheta) + N_{cr}$$

$$\times \frac{d}{d\theta} \left[i_p^2 \frac{d\varphi}{d\theta} - y_0 R \frac{d\vartheta}{d\theta} \right] = 0 \dots\dots\dots (11)_{II}$$

Case III に対して、

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left[EI_Y \left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \varphi \right) \right] + \frac{d}{d\theta} \left[GK \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\vartheta}{d\theta} \right) \right]$$

$$- \frac{d^2}{d\theta^2} \left[\frac{EC_w}{R^2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} \right) \right] + R^2 N_{cr}$$

$$\times \left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \frac{1}{2}\varphi \right) - RN_{cr} \frac{d}{d\theta} \left(y_0 \frac{d\varphi}{d\theta} \right) = 0$$

$$EI_Y \left(\frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} + \varphi \right) - \frac{d}{d\theta} \left[GK \left(\frac{d\varphi}{d\theta} - \frac{d\vartheta}{d\theta} \right) \right] + \frac{d^2}{d\theta^2}$$

$$\times \left[\frac{EC_w}{R^2} \left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2} - \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2} \right) \right] + \frac{1}{2} R^2 N_{cr}\vartheta + N_{cr} \frac{d}{d\theta}$$

$$\times \left[i_p^2 \frac{d\varphi}{d\theta} - y_0 R \frac{d\vartheta}{d\theta} \right] = 0 \dots\dots\dots (11)_{III}$$

特に、アーチリブの断面が全長を通じて一定であり、また $a = \text{const.}$ であるならば、

$$\bar{y}_0 = \frac{y_0}{R}, \quad \bar{a} = \frac{a}{R}$$

とにおいて、式 (11) はつぎのように書きかえられる。

Case I :

$$\left(EI_Y + \frac{EC_w}{R^2} \right) \frac{d^4\vartheta}{d\theta^4} + (R^2 N_{cr} - GK) \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}$$

$$- \frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4\varphi}{d\theta^4} + (EI_Y + GK - R^2 \bar{y}_0 N_{cr}) \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} = 0$$

$$- \frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4\vartheta}{d\theta^4} + (EI_Y + GK - R^2 \bar{y}_0 N_{cr}) \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}$$

$$+ \frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4\varphi}{d\theta^4} - (GK - i_p^2 N_{cr}) \frac{d^2\varphi}{d\theta^2}$$

$$+ (EI_Y - R^2 \bar{a} N_{cr}) \varphi = 0 \dots\dots\dots (12)_{I}$$

Case II :

$$\left(EI_Y + \frac{EC_w}{R^2} \right) \frac{d^4\vartheta}{d\theta^4} + (R^2 N_{cr} - GK) \frac{d^2\vartheta}{d\theta^2}$$

$$+ R^2 N_{cr}(1 - \bar{a})\vartheta - \frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4\varphi}{d\theta^4} + (EI_Y + GK$$

$$- R^2 \bar{y}_0 N_{cr}) \frac{d^2\varphi}{d\theta^2} + R^2 \bar{a} N_{cr}\varphi = 0$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4 \vartheta}{d\theta^4} + (EI_Y + GK - R^2 \bar{y}_0 N_{cr}) \frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2} \\
 & + R^2 a N_{cr} \vartheta + \frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4 \varphi}{d\theta^4} - (GK - i \rho^2 N_{cr}) \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} \\
 & + (EI_Y - R^2 a N_{cr}) \varphi = 0 \dots\dots\dots(12) \text{II}
 \end{aligned}$$

Case III :

$$\begin{aligned}
 & \left(EI_Y + \frac{EC_w}{R^2} \right) \frac{d^4 \vartheta}{d\theta^4} + (R^2 N_{cr} - GK) \frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2} \\
 & - \frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4 \varphi}{d\theta^4} + (EI_Y + GK - R^2 \bar{y}_0 N_{cr}) \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} \\
 & + \frac{1}{2} R^2 N_{cr} \varphi = 0 \\
 & -\frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4 \vartheta}{d\theta^4} + (EI_Y + GK - R^2 \bar{y}_0 N_{cr}) \frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2} \\
 & + \frac{1}{2} R^2 N_{cr} \vartheta + \frac{EC_w}{R^2} \frac{d^4 \varphi}{d\theta^4} - (GK - i \rho^2 N_{cr}) \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} \\
 & + EI_Y \varphi = 0 \dots\dots\dots(12) \text{III}
 \end{aligned}$$

3. 座屈荷重の算出

(1) 無次元パラメータの導入

アーチの曲げねじれ座屈の特性を知るには、また解に一般性を与えるためには、つぎのような断面の剛性に関する無次元量をパラメータとして導入するとよい。すなわち、

$$\alpha = \frac{GK}{EI_Y}, \quad \beta = \frac{EC_w}{EI_Y R^2}, \quad r = \frac{i \rho^2}{R^2} \dots\dots\dots(13)$$

特に座屈形が正弦曲線 $\vartheta = C_1 \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \vartheta$, $\varphi = C_2 \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \vartheta$ で表わされる場合には、曲げねじれ剛性を次式によって、ねじれ剛性に換算できるので都合よい。すなわち、換算ねじれ剛性を \overline{GK} とすると、

$$\overline{GK} = GK + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} EC_w$$

したがって、この場合にはつぎの無次元量を用いる。

$$\bar{\alpha} = \frac{\overline{GK}}{EI_Y} = \frac{GK}{EI_Y} + \frac{n^2 \pi^2}{\theta_0^2} \cdot \frac{EC_w}{EI_Y R^2} \dots\dots\dots(14)$$

座屈荷重は座屈係数 m_R あるいは m_L を用いて、つぎのように表わす。

$$N_{cr} = R p_{cr} = m_R \frac{EI_Y}{R^2}$$

あるいは、

$$N_{cr} = R p_{cr} = m_L \frac{EI_Y}{L^2} \dots\dots\dots(15)$$

ここに、 L はアーチリブの円弧長で、 $L = R\theta_0$ である。したがって、オイラー荷重に対する換算座屈長 L_e は、

$$L_e = R \sqrt{\frac{\pi}{m_R}} = L \sqrt{\frac{\pi}{m_L}}$$

で与えられる。

(2) Case I の解

連立微分方程式 (12) I の一般解はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned}
 \vartheta = & A_0 + B_0 \theta + (A_1 \sin \lambda_1 \theta + B_1 \cos \lambda_1 \theta) + (A_2 \sin^3 \lambda_2 \theta \\
 & + B_2 \cos \lambda_2 \theta) + (A_3 \sin \lambda_3 \theta + B_3 \cos \lambda_3 \theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varphi = & \Phi_1 (A_1 \sin \lambda_1 \theta + B_1 \cos \lambda_1 \theta) + \Phi_2 (A_2 \sin \lambda_2 \theta \\
 & + B_2 \cos \lambda_2 \theta) + \Phi_3 (A_3 \sin \lambda_3 \theta + B_3 \cos \lambda_3 \theta) \dots\dots(16) \text{I}
 \end{aligned}$$

ここに、 λ_1^2 , λ_2^2 および λ_3^2 は次式の根であり、かつ異なる実根であるとする。

$$\begin{aligned}
 \beta \lambda^4 + [\alpha - 2\beta - m_R(\beta + \beta r + r - 2\beta \bar{y}_0)] \lambda^2 \\
 - [2\alpha - \beta + m_R(\alpha + \alpha r + \bar{a} \beta + \bar{a} - 2\alpha \bar{y}_0 - 2\bar{y}_0) \\
 - m_R^2(r - \bar{y}_0^2)] \lambda^2 - (m_R - \alpha)(1 - \bar{a} m_R) = 0 \\
 \dots\dots\dots(17) \text{I}
 \end{aligned}$$

また、 $\Phi_i (i=1, 2, 3)$ は次式で与えられる。すなわち、

$$\Phi_i = \frac{(1 + \beta) \lambda_i^2 - (m_R - \alpha)}{\beta \lambda_i^2 + (1 + \alpha - \bar{y}_0 m_R)}, \quad (i=1, 2, 3) \dots\dots(18) \text{I}$$

式 (16) I にふくまれる 8 個の積分定数 $A_i, B_i (i=0, 1, 2, 3)$ を定める 8 個の境界条件式は A_i, B_i に関する一次の同次式である。したがって、曲げねじれ座屈が存在するためには、 A_i, B_i の係数行列式が 0 でなければならない。この条件から、固有値すなわち、座屈係数 m_R (あるいは m_L) を定める座屈条件式が得られる。

境界条件 (A) および (B) に対して、それぞれの座屈条件式と座屈形とを求める。

a) 境界条件 (A) の場合 式 (16) I で与えられる ϑ

および φ を境界条件式 (4) に代入し、 $A_i, B_i (i=0, 1, 2, 3)$ に関する 8 次の係数行列式の値 $|D|$ を計算すると $|D| = \theta_0 \sin \lambda_1 \theta_0 \sin \lambda_2 \theta_0 \sin \lambda_3 \theta_0 [\lambda_2^2 \lambda_3^2 \Phi_1 (\Phi_2 - \Phi_3) + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \Phi_2 (\Phi_3 - \Phi_1) + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \Phi_3 (\Phi_1 - \Phi_2)]^2$

となる。 $\lambda_1^2 \neq \lambda_2^2 \neq \lambda_3^2$ より $\Phi_1 \neq \Phi_2 \neq \Phi_3$ であるから、座屈条件式は、

$$\sin \lambda_i \theta_0 = 0 \quad \text{すなわち} \quad \lambda_i \theta_0 = n\pi \dots\dots\dots(19)$$

これを式 (17) I に代入することによって、座屈係数 m_R は、次式から容易に計算される。

$$\begin{aligned}
 [n^2 r - \nu^2 \bar{y}_0^2 + \nu^2 \bar{a}] \nu^2 m_R^2 - [(\nu^2 + n^2 \bar{\alpha}) \nu^2 \\
 - 2n^2 \nu^2 \bar{y}_0 (1 + \bar{\alpha}) + (n^2 + \nu^2 \bar{\alpha})(\nu^2 \bar{a} + n^2 r)] m_R \\
 + \bar{\alpha} (n^2 - \nu^2)^2 = 0 \dots\dots\dots(20) \text{I}
 \end{aligned}$$

ここに、 $\nu = \theta_0 / \pi$ である。

座屈形は

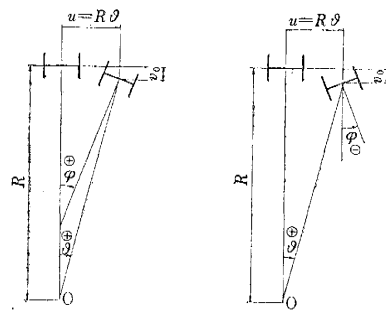
$$\vartheta = C \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta$$

$$\varphi = C \frac{n^2 - \nu^2 (m_R - \bar{\alpha})}{\nu^2 (1 + \bar{\alpha} - \bar{y}_0 m_R)} \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \dots\dots\dots(21) \text{I}$$

図-3 ϑ と φ との関係

C は任意定数を意味する。

式 (20) I から、2 つの m_R が求まるが、小さいほうは ϑ と φ とが同符号の座屈に対する値であり(図-3 (a)), 大きい



(a) 同位相の場合

(b) 逆位相の場合

ほうは異符号の座屈に対する値である (図-3 (b))。このことは他の Case についても同じである。

b) 境界条件 (B) の場合 この場合は、対称座屈と逆対称座屈とにわけて扱ったほうが計算が簡単になる。一般に、最小座屈荷重を与えるのは、対称座屈であるから、ここには対称座屈に対する解のみを記すにとどめる。

式 (16) I の ϑ と φ を、境界条件式 (5) および対称条件式 (6) に代入し、 $A_i, B_i (i=0,1,2,3)$ に関する 8 次の係数行列式の値 $|D|$ を計算すると、

$$|D| = -\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 [\lambda_2^2 \lambda_3^2 \lambda_1 (\Phi_2 - \Phi_3) + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \lambda_2 (\Phi_3 - \Phi_1) + \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3 (\Phi_1 - \Phi_2)] \left[\lambda_2 \lambda_3 \Phi_1 (\Phi_2 - \Phi_3) \cos \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} \sin \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} \sin \lambda_3 \frac{\theta_0}{2} + \lambda_3 \lambda_1 \Phi_2 (\Phi_3 - \Phi_1) \cos \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} \sin \lambda_3 \frac{\theta_0}{2} \sin \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} + \lambda_1 \lambda_2 \Phi_3 (\Phi_1 - \Phi_2) \cos \lambda_3 \frac{\theta_0}{2} \sin \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} \sin \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} \right]$$

となる。したがって、対称座屈に対する座屈条件式は、次式で与えられる。すなわち、

$$\lambda_2 \lambda_3 \Phi_1 (\Phi_2 - \Phi_3) \cot \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} + \lambda_3 \lambda_1 \Phi_2 (\Phi_3 - \Phi_1) \cot \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} + \lambda_1 \lambda_2 \Phi_3 (\Phi_1 - \Phi_2) \cot \lambda_3 \frac{\theta_0}{2} = 0 \quad \dots\dots\dots(22) \text{ I}$$

式 (17) I と連立させて解けば座屈係数 m_R が求まる。C を任意定数として、座屈形はつぎのようになる。

$$\vartheta = C \left[\lambda_2 \lambda_3 (\Phi_2 - \Phi_3) \frac{\cos \lambda_1 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right) - \cos \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}}{\sin \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}} + \lambda_3 \lambda_1 (\Phi_3 - \Phi_1) \frac{\cos \lambda_2 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right) - \cos \lambda_2 \frac{\theta_0}{2}}{\sin \lambda_2 \frac{\theta_0}{2}} + \lambda_1 \lambda_2 (\Phi_1 - \Phi_2) \frac{\cos \lambda_3 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right) - \cos \lambda_3 \frac{\theta_0}{2}}{\sin \lambda_3 \frac{\theta_0}{2}} \right]$$

$$\varphi = C \left[\lambda_2 \lambda_3 \Phi_1 (\Phi_2 - \Phi_3) \frac{\cos \lambda_1 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\sin \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}} + \lambda_3 \lambda_1 \Phi_2 (\Phi_3 - \Phi_1) \frac{\cos \lambda_2 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\sin \lambda_2 \frac{\theta_0}{2}} + \lambda_1 \lambda_2 \Phi_3 (\Phi_1 - \Phi_2) \frac{\cos \lambda_3 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\sin \lambda_3 \frac{\theta_0}{2}} \right] \quad \dots\dots\dots(23) \text{ I}$$

特に、 $EC_w = 0$ の場合には、座屈条件式および座屈形は、それぞれつぎのようになる。

座屈条件式：

$$\Phi_1 \lambda_2 \cos \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} \sin \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} - \Phi_2 \lambda_1 \sin \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} \cos \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} = 0 \quad \dots\dots\dots(22) \text{ I}'$$

座屈形：

$$\vartheta = C \left[\lambda_2 \frac{\cos \lambda_1 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right) - \cos \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}}{\sin \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}} - \lambda_1 \frac{\cos \lambda_2 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right) - \cos \lambda_2 \frac{\theta_0}{2}}{\sin \lambda_2 \frac{\theta_0}{2}} \right]$$

$$\varphi = C \left[\lambda_2 \Phi_1 \frac{\cos \lambda_1 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\sin \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}} - \lambda_1 \Phi_2 \frac{\cos \lambda_2 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\sin \lambda_2 \frac{\theta_0}{2}} \right] \quad \dots\dots\dots(23) \text{ I}'$$

ここに、 λ_1^2, λ_2^2 は $\beta = 0$ とおいた式 (16) I の根であり、 Φ_1, Φ_2 は、式 (18) I で $\beta = 0$ としたものである。

(3) Case II の解

連立方程式 (12) II の一般解は

$$\vartheta = \sum_{i=1}^4 (A_i \sin \lambda_i \theta + B_i \cos \lambda_i \theta)$$

$$\varphi = \sum_{i=1}^4 \Phi_i (A_i \sin \lambda_i \theta + B_i \cos \lambda_i \theta) \quad \dots\dots\dots(16) \text{ II}$$

と書くことができる。 $\lambda_i^2 (i=1,2,3,4)$ は、特性方程式

$$\beta \lambda^8 + [\alpha - 2\beta - m_R(\beta + \beta r + r - 2\beta \bar{y}_0)] \lambda^6 - [2\alpha - \beta + m_R(\alpha + \alpha r - \beta + \bar{a} - 2\alpha \bar{y}_0 - 2\bar{y}_0) + m_R^2(\bar{y}_0^2 - r)] \lambda^4 - [\alpha + m_R(1 - \alpha - 2\bar{a}) - m_R^2(\bar{a} - r + \bar{a} r - 2\bar{a} \bar{y}_0)] \lambda^2 + m_R(1 - \bar{a} - \bar{a} m_R) = 0 \quad \dots\dots\dots(17) \text{ II}$$

の根である。これらは、相異なる実根であるとする。 Φ_i はつぎの式で表わされるものである。

$$\Phi_i = \frac{(1 + \beta) \lambda_i^4 - (m_R - \alpha) \lambda_i^2 + m_R(1 - \bar{a})}{\beta \lambda_i^4 + (1 + \alpha - \bar{y}_0 m_R) \lambda_i^2 - \bar{a} m_R} \quad (i=1,2,3,4) \quad \dots\dots\dots(18) \text{ II}$$

a) 境界条件 (A) の場合 座屈条件式は、式 (19) と一致する。したがって、 m_R は次式から求まる。すなわち、

$$[n^2 r (n^2 - \nu^2 + \nu^2 \bar{a}) - n^2 \bar{y}_0 (n^2 \bar{y}_0 + 2\nu^2 \bar{a}) + \nu^2 \bar{a} (n^2 - \nu^2)] \nu^4 m_R^2 - [(n^2 - \nu^2) (n^2 \bar{a} + \nu^2) \nu^2 - 2n^4 \nu^2 \bar{y}_0 (1 + \bar{a}) + n^4 r (n^2 + \nu^2 \bar{a}) + \bar{a} \nu^2 (n^2 - \nu^2)^2] \nu^2 m_R - n^2 \nu^2 \bar{a} (n^2 - \nu^2)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(20) \text{ II}$$

座屈形は、

$$\vartheta = C \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta,$$

$$\varphi = C \frac{n^4 + n^2 \nu^2 \bar{a} - \nu^2 (n^2 - \nu^2 + \nu^2 \bar{a})}{n^2 \nu^2 \bar{a} + n^2 \nu^2 (1 - \bar{y}_0 m_R) - \nu^4 \bar{a} m_R} \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad \dots\dots\dots(21) \text{ II}$$

b) 境界条件 (B) の場合 対称座屈に対する座屈条件式は、

$$e_1 \lambda_1 \phi_1 \tan \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} + e_2 \lambda_2 \phi_2 \tan \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} + e_3 \lambda_3 \phi_3 \tan \lambda_3 \frac{\theta_0}{2} + e_4 \lambda_4 \phi_4 \tan \lambda_4 \frac{\theta_0}{2} = 0 \quad (22)_{II}$$

となり、特性方程式 (17)_{II} と連立に解いて、 m_R が定まる。

座屈形は、

$$\vartheta = C \sum_{i=1}^4 e_i \frac{\cos \lambda_i \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\cos \lambda_i \frac{\theta_0}{2}}$$

$$\varphi = C \sum_{i=1}^4 e_i \phi_i \frac{\cos \lambda_i \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\cos \lambda_i \frac{\theta_0}{2}} \quad \dots\dots\dots(23)_{II}$$

となる。

式 (22)_{II}, (23)_{II} における $e_i (i=1, 2, 3, 4)$ は、

$$e_1 = (\phi_4 - \phi_3) \lambda_2 \tan \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} + (\phi_2 - \phi_4) \lambda_3 \tan \lambda_3 \frac{\theta_0}{2} + (\phi_3 - \phi_2) \lambda_4 \tan \lambda_4 \frac{\theta_0}{2}$$

$$e_2 = -(\phi_1 - \phi_4) \lambda_3 \tan \lambda_3 \frac{\theta_0}{2} - (\phi_3 - \phi_1) \lambda_4 \tan \lambda_4 \frac{\theta_0}{2} - (\phi_4 - \phi_3) \lambda_1 \tan \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}$$

$$e_3 = (\phi_2 - \phi_1) \lambda_4 \tan \lambda_4 \frac{\theta_0}{2} + (\phi_1 - \phi_2) \lambda_1 \tan \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} + (\phi_1 - \phi_4) \lambda_2 \tan \lambda_2 \frac{\theta_0}{2}$$

$$e_4 = -(\phi_3 - \phi_2) \lambda_1 \tan \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} - (\phi_1 - \phi_3) \lambda_2 \tan \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} - (\phi_2 - \phi_1) \lambda_3 \tan \lambda_3 \frac{\theta_0}{2}$$

である。

特に、 $EC_w = 0$ の場合には、つぎようになる。

座屈条件式：

$$\lambda_1 (\phi_3 - \phi_2) \tan \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} + \lambda_2 (\phi_1 - \phi_3) \tan \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} + \lambda_3 (\phi_2 - \phi_1) \tan \lambda_3 \frac{\theta_0}{2} = 0 \quad \dots\dots\dots(22)_{II}'$$

座屈形：

$$\vartheta = C \left[(\phi_3 - \phi_2) \frac{\cos \lambda_1 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\cos \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}} + (\phi_1 - \phi_3) \frac{\cos \lambda_2 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\cos \lambda_2 \frac{\theta_0}{2}} + (\phi_2 - \phi_1) \frac{\cos \lambda_3 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\cos \lambda_3 \frac{\theta_0}{2}} \right]$$

$$\varphi = C \left[\phi_1 (\phi_3 - \phi_2) \frac{\cos \lambda_1 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\cos \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}} \right]$$

$$+ \phi_2 (\phi_1 - \phi_3) \frac{\cos \lambda_2 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\cos \lambda_2 \frac{\theta_0}{2}} + \phi_3 (\phi_2 - \phi_1) \frac{\cos \lambda_3 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\cos \lambda_3 \frac{\theta_0}{2}} \quad \dots\dots\dots(23)_{II}'$$

式 (22)_{II'}, (23)_{II'} において、 $\lambda_i^2 (i=1, 2, 3, 4)$ は $\beta=0$ とおいた式 (16)_{II} の根であり、 ϕ_i は式 (18)_{II} で $\beta=0$ とおいたものである。

(4) Case III の解

連立微分方程式の (12)_{III} 一般解は、式 (16)_{II} と同一の形で表わすことができる。ただし、同式における $\lambda_i^2 (i=1, 2, 3, 4)$ は、式 (12)_{III} の特性方程式

$$\beta \lambda^8 + [\alpha - 2\beta - m_R(\beta + \beta\tau + \tau - 2\beta\bar{y}_0)] \lambda^6 - [2\alpha - \beta + m_R(\alpha + \alpha\tau - \beta - 2\alpha\bar{y}_0 - 2\bar{y}_0) + m_R^2(\bar{y}_0^2 - \tau)] \lambda^4 + [\alpha + m_R\alpha - m_R^2\bar{y}_0] \lambda^2 - \frac{1}{4} m_R^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(17)_{III}$$

の根であり、また ϕ_i は

$$\phi_i = \frac{(1 + \beta)\lambda_i^4 - (m_R - \alpha)\lambda_i^2}{\beta\lambda_i^4 + (1 + \alpha - \bar{y}_0 m_R)\lambda_i^2 - \frac{1}{2} m_R} \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots(18)_{III}$$

で計算しなければならない。

a) 境界条件 (A) の場合 座屈条件式は式 (19) と一致する。したがって、 $\lambda = n/\nu$ を式 (17)_{III} に代入して、 m_R の計算式がつぎのように求まる。

$$[4n^4\tau - \nu^4 - 4n^2\bar{y}_0(n^2\bar{y}_0 + \nu^2)]\nu^4 m_R^2 - 4[\nu^2\bar{\alpha}(n^2 - \nu^2) + n^2\tau(\nu^2\bar{\alpha} + n^2) - 2n^2\nu^2\bar{y}_0] \times (1 + \bar{\alpha}) n^2\nu^2 m_R + 4n^2\nu^2\bar{\alpha}(n^2 - \nu^2)^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(20)_{III}$$

座屈形は

$$\vartheta = C \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta$$

$$\varphi = C \frac{n^4 - n^2\nu^2(m_R - \bar{\alpha})}{n^2\nu^2(1 + \bar{\alpha} - \bar{y}_0 m_R) - \frac{1}{2}\nu^4 m_R} \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta \quad \dots\dots\dots(21)_{III}$$

b) 境界条件 (B) の場合 対称座屈に対する座屈条件式および座屈形は、それぞれ式 (22)_{II} および式 (23)_{II} と同一な表現で与えられる。もちろん、これらの式の中の $\lambda_i, \phi_i (i=1, 2, 3, 4)$ としては、それぞれ式 (17)_{III}, (18)_{III} を用いなければならないことは、いうまでもない。

(5) 近似解法

以上述べた厳密解法では、境界条件 (B) の場合には、座屈係数 m_R は代数方程式と、超越関数方程式とを連立に解いて求めなければならないので、その計算はそうとうめんどうである。あまり高い精度を必要としない場合には、近似的な解法もまた有力な手段となるので、こ

に簡単にふれておくことにする。

境界条件 (B)、すなわち式 (5) を満足する対称座屈形として次式を仮定する。

$$\vartheta = \sum_{i=1}^n A_i \left(1 - \cos \frac{2i\pi}{\theta_0} \theta\right), \varphi = \sum_{i=1}^n B_i \left(1 - \cos \frac{2i\pi}{\theta_0} \theta\right) \dots \dots \dots (24)$$

以下、Case I で、しかも断面の重心、せん断中心、荷重作用点が合致する場合について述べる。

座屈変形ともなる系のポテンシャル エネルギー W の式 (8) に、式 (24) を代入し、積分演算を遂行すると、

$$W = \frac{EI_Y}{R^3} \cdot \frac{\theta_0^2}{4} \left[\sum_{i=1}^n \left(4 \frac{i^2}{\nu^2} A_i - B_i\right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n B_i\right)^2 + \alpha \sum_{i=1}^n 4 \frac{i^2}{\nu^2} (A_i - B_i)^2 + \beta \sum_{i=1}^n 16 \frac{i^4}{\nu^4} (A_i - B_i)^2 - m_R \sum_{i=1}^n 4 \frac{i^2}{\nu^2} (A_i^2 - \tau \beta_i^2) \right]$$

となる。したがって、 $A_i, B_i (i=1, 2, 3, \dots, n)$ を定める

$$[II] = \begin{matrix} \begin{matrix} n=1 & n=2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 + \left(\frac{\nu}{2}\right)^2 \alpha + \beta & 1 + \alpha + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 \beta & \dots & 0 & 0 \\ & 3 + \left(\frac{2}{\nu}\right)^2 \alpha + \left(\frac{2}{\nu}\right)^4 \beta & \dots & 0 & 2 \end{matrix} \\ \dots \dots \dots \\ \begin{matrix} \text{対} & \text{称} \\ & 1 + \left(\frac{\nu}{4}\right)^2 \alpha + \beta & 1 + \alpha + \left(\frac{4}{\nu}\right)^2 \beta & \dots & 0 & 0 \\ & 3 + \left(\frac{4}{\nu}\right)^2 \alpha + \left(\frac{4}{\nu}\right)^4 \beta & \dots & 0 & 2 \end{matrix} \\ \dots \dots \dots \\ \begin{matrix} & & & & 1 + \left(\frac{\nu}{2n}\right)^2 \alpha + \beta & 1 + \alpha + \left(\frac{2n}{\nu}\right)^2 \beta \\ & & & & & 3 + \left(\frac{2n}{\nu}\right)^2 \alpha + \left(\frac{2n}{\nu}\right)^4 \beta \end{matrix} \\ \dots \dots \dots \end{matrix} \quad (26)$$

$$[K] = \begin{matrix} \begin{matrix} n=1 & n=2 & \dots & 0 & 0 \\ (\nu/2)^2 & (2/\nu)^2 \tau & \dots & 0 & 0 \\ & (\nu/4)^2 & \dots & 0 & 0 \\ & & (4/\nu)^2 \tau & \dots & 0 \\ & 0 & & (\nu/2n)^2 & 0 \\ & & & & (2n/\nu)^2 \tau \end{matrix} \\ \dots \dots \dots \end{matrix} \quad (27)$$

いま、 ϑ および φ として、式 (24) の第 2 項までとした場合は、上記の $[H], [K]$ において、 $n=2$ の鎖線で仕切られた左上方の要素のみを用いればよい。所要の精度に応じて、マトリックスの要素をとることができる。

4. アーチの曲げねじれ座屈の特性

(1) 座屈係数の計算

アーチの曲げねじれ座屈の特性を調べるためには、前章で導入した無次元のパラメータを変化させて、座屈係数を計算してみる必要がある。

方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial A_i} = 0 & : \left[\left(\frac{2i}{\nu}\right)^2 + \alpha + \left(\frac{2i}{\nu}\right)^2 \beta - m_R \right] A_i - \left[1 + \alpha + \left(\frac{2i}{\nu}\right)^2 \beta \right] B_i = 0 \\ \frac{\partial W}{\partial B_i} = 0 & : - \left[\frac{2i}{\nu}\right] \left[1 + \alpha + \left(\frac{2i}{\nu}\right)^2 \beta \right] A_i + \left[1 + \left(\frac{2i}{\nu}\right)^2 \alpha + \left(\frac{2i}{\nu}\right)^4 \beta - \left(\frac{2i}{\nu}\right)^2 \tau m_R \right] B_i + 2 \sum_{i=1}^n B_i = 0 \end{aligned}$$

$A_i, B_i (i=1, 2, \dots, n)$ が同時に 0 となる以外の値を有するためには、係数行列式の値が 0 でなければならぬ。すなわち、座屈条件式がつぎの形で得られる。

$$[[H] - m_R[K]] = 0 \dots \dots \dots (25)$$

ここに、 $[H]$ および $[K]$ は、ともに $2n$ 次の対称マトリックスであり、各要素はつぎのようになる。

境界条件 (A) に対する座屈係数 $m_L (=m_R \theta_0^2)$ の値は、Case I, Case II, Case III について、それぞれ式 (20)_I, (20)_{II}, (20)_{III} から直接に求まるので、計算は容易である。計算の結果を $\alpha, \nu (= \theta_0/\pi)$ をパラメータとして図表化したものが、図-4.5, 6 である。あとに述べるように、 $r = i\beta^2/R^2$ がアーチの曲げねじれ座屈におよぼす影響は、普通の寸法のアーチでは非常に小さいので、一般に十分な精度で、 $r=0$ とすることができる。したがって、図-4.5, 6 は $r=0$ として計算したものであり、また断面の重心、せん断中心、荷重作用点の 3 点が一致す

図-4 境界条件 (A) のアーチの曲げねじれ座屈係数 m_L の値 ($\gamma=0$)—Case I

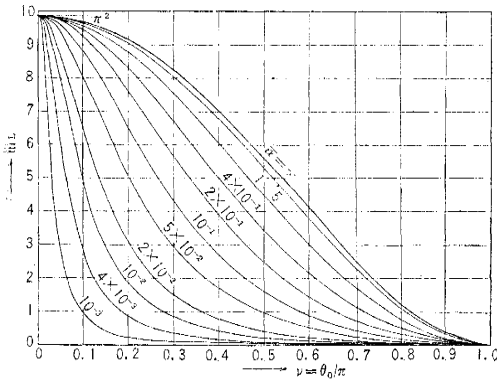


図-5 境界条件 (A) のアーチの曲げねじれ座屈係数 m_L の値 ($\gamma=0$)—Case II

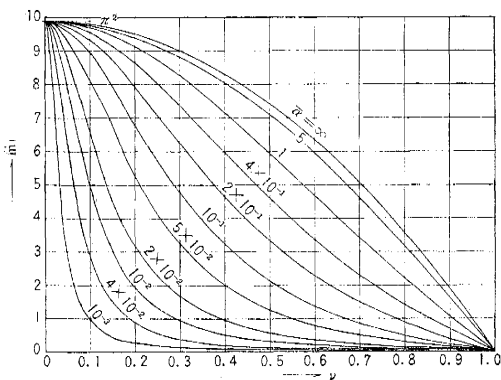
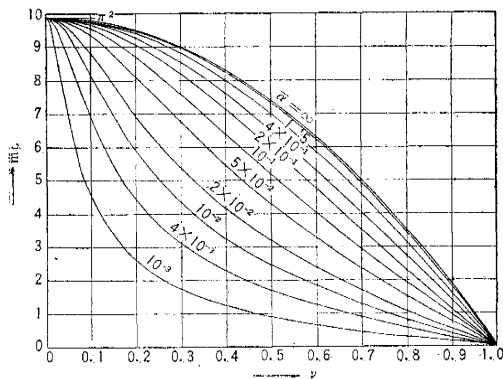


図-6 境界条件 (A) のアーチの曲げねじれ座屈係数 m_L の値 ($\gamma=0$)—Case III



る場合 ($\bar{y}_0 = a = 0$) の値である。

境界条件 (B) の場合の座屈係数の計算は、非常に煩雑であるから、高速度の電子計算機によらなければおぼつかない。実際の数値計算を行なうにあたっては、 λ_i^2 が負、すなわち λ_i が虚数の場合もありうるので、座屈条件式 (22)_I, (22)_{II}, (22)_{III} ならびに座屈形 (23)_I, (23)_{II}, (23)_{III} の諸式に、あらかじめつぎのような操作をほどこしておく必要がある。Case I の場合を例にとって述べ

る。

$\lambda_i^2 (i=1,2,3)$ を定める代数方程式は、 $x_i = \lambda_i^2$ とおくとつぎのようになる。

$$f(x) \equiv a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$$

ここに、

$$a_0 = a - (1 + \alpha \bar{a})m_R + \bar{a}m_R^2$$

$$a_1 = -2\alpha + \beta - (\alpha + \alpha r - 2\bar{y}_0 - 2\alpha\bar{y}_0 + a + \beta a) \times m_R + (r - \bar{y}_0^2)m_R^2$$

$$a_2 = \alpha - 2\beta - (\beta + \beta r + r - 2\beta\bar{y}_0)m_R$$

$$a_3 = \beta$$

通常のアーチでは、 $a_i (i=0,1,2,3)$ の符号は、

$$a_0 < 0, a_1 < 0, a_2 \geq 0, a_3 > 0$$

である。したがって $f(x)=0$ が3実根を有するものであれば、Descartes の符号法則によって、一根が正根であり、他の二根は負根である。すなわち、 $x_1 > 0, x_2 < 0, x_3 < 0$ とすると、

$$\lambda_1 = \sqrt{x_1}, \lambda_2 = \bar{\lambda}_2 j = \sqrt{x_2}, \lambda_3 = \bar{\lambda}_3 j = \sqrt{x_3} \dots (28)$$

ここに、 $\lambda_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3$ は実数であり、 $j = \sqrt{-1}$ である。

したがって、この場合には、座屈条件式 (22)_I および座屈形 (23)_I を $\sin jx = j \sinh x, \cos jx = \cosh x$ なる変換をほどこして、書きかえればよい。すなわち、式 (22)_I は

$$F(m_R) \equiv -\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \phi_1 (\phi_2 - \phi_3) \cot \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} + \bar{\lambda}_3 \lambda_1 \phi_2 (\phi_3 - \phi_1) \coth \bar{\lambda}_2 \frac{\theta_0}{2} + \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \phi_3 (\phi_1 - \phi_2) \coth \bar{\lambda}_3 \frac{\theta_0}{2} = 0 \dots (29)$$

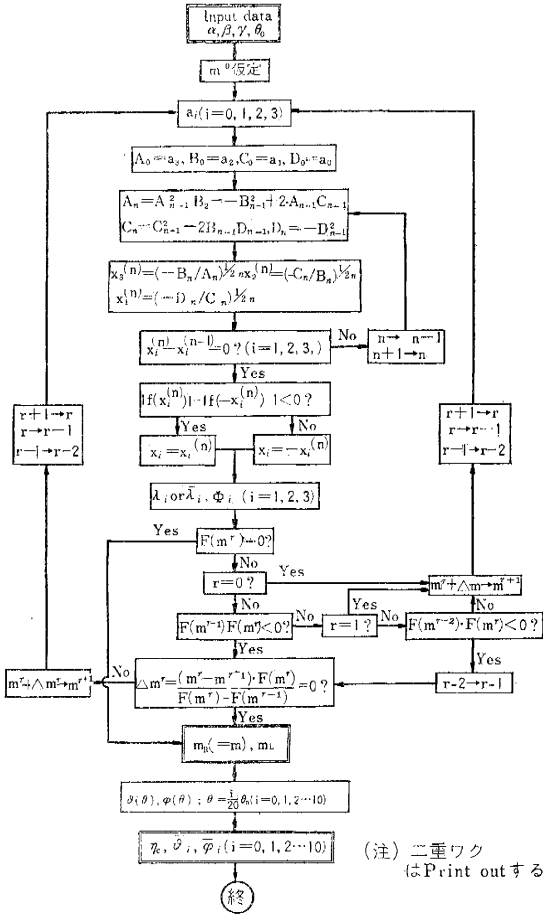
式 (23)_I は、

$$\vartheta = C \left[-\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 (\phi_2 - \phi_3) \frac{\cos \lambda_1 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right) - \cos \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}}{\sin \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}} + \bar{\lambda}_3 \lambda_1 (\phi_3 - \phi_1) \frac{\cosh \bar{\lambda}_2 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right) - \cosh \bar{\lambda}_2 \frac{\theta_0}{2}}{\sinh \bar{\lambda}_2 \frac{\theta_0}{2}} + \lambda_1 \bar{\lambda}_2 (\phi_1 - \phi_2) \frac{\cosh \bar{\lambda}_3 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right) - \cosh \bar{\lambda}_3 \frac{\theta_0}{2}}{\sinh \bar{\lambda}_3 \frac{\theta_0}{2}} \right]$$

$$\varphi = C \left[-\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \phi_1 (\phi_2 - \phi_3) \frac{\cos \lambda_1 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\sin \lambda_1 \frac{\theta_0}{2}} + \bar{\lambda}_3 \lambda_1 \phi_2 (\phi_3 - \phi_1) \frac{\cosh \bar{\lambda}_2 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\sinh \bar{\lambda}_2 \frac{\theta_0}{2}} + \lambda_1 \bar{\lambda}_2 \phi_3 (\phi_1 - \phi_2) \frac{\cosh \bar{\lambda}_3 \left(\frac{\theta_0}{2} - \theta \right)}{\sinh \bar{\lambda}_3 \frac{\theta_0}{2}} \right] \dots (30)$$

となる。

図-7 電子計算機による計算の流れ図



電子計算機による計算は、図-7 に記した流れ図に示すような順序で計算が流れるようにプログラミングを行なった。流れ図の上半分は、代数方程式を解く演算であるが、ここでは Graeffe の根二乗法によって計算した。この方法は根の初期値を仮定しなくてもよいので、電子計算機によって多数の代数方程式を解くような場合には、最も有力な方法であると思われる。流れ図の下半分は、直線内挿法によって超越関数方程式を解く演算であり、この種の問題のすべてに応用できるものである。求めるべき座屈係数の初期値としては、既述の近似解法による近似値を用いて取れんをはやめ、またパラメータを連続的に変化させて多数の計算を行なう場合には、すぐ前のパラメータに対する解を第一近似値(初期値)に採用した。なお 図-7 に現われる $\bar{\theta}, \bar{\varphi}, \eta$ はつぎのようなものである。

$$\bar{\theta} = \theta / \theta_{\max}, \quad \bar{\varphi} = \varphi / \varphi_{\max}, \quad \eta_c = \varphi_{\max} / \theta_{\max} \quad \dots \dots \dots (31)$$

Case I に対するこれらの計算の結果を $f/l=0.10$; 0.15 ; 0.20 (それぞれ、 $\theta_0=0.7896$; 1.1659 ; 1.5220) の3つの場合について、 α, β をパラメータとして図表化したものが 図-8, 9, 10 である。これらの値は 図-4, 5, 6 のときと同様に、 $r=0, \alpha=\bar{\gamma}=0$ の場合のものである。

(2) アーチの曲げねじれ座屈を支配する要素とその特性

アーチの曲げねじれ座屈荷重は、多数の幾何学量ならびに力学量の関数として定められる。つぎにそのおもなものを掲げて、その性質を調べてみよう。

a) アーチリブのねじれ剛性と曲げねじれ剛性
 アーチの曲げねじれ座屈荷重を、座屈係数を用いた式(15)の形で書き表わすと、座屈荷重に対するアーチリブのねじれ剛性および曲げねじれ剛性の影響は、 $\alpha = GK/EI_Y$, $\beta = EC_w/EI_Y R^2$ (特に、境界条件(A)の場合には $\alpha = \overline{GK}/EI_Y$) が座屈係数に与える効果の様子から知ることができる。

ごく細長い断面は別として、一般に均整のとれた断面では、 α の値はほぼ $10^{-4} \sim 10$ の範囲内にあり、特に I 型、H 型、溝型、 π 型などの開いた断面の場合には $10^{-4} \sim 10^{-2}$ 、閉じた断面あるいは solid な断面の場合には $10^{-1} \sim 10$ の範囲にあるのが普通である。 β の値は、通常の断面および寸法のアーチでは $0 \sim 10^{-3}$ の範囲内で変化する。ちなみに、solid な円形断面およびパイプ断面ではともに、 $\alpha=0.769, \beta=0$ である。

境界条件(A)の場合には、さきに掲げた 図-4, 5, 6 の図表から、3つの Case について、それぞれ $\bar{\alpha}$ の果たす効果の度合とその特徴が一目りよう然に読みとれるであろう。

境界条件(B)については、Case I に対する 図-7,

図-8 境界条件(B), Case I のアーチ曲げねじれ座屈係数 m_L の値 ($\gamma=0$)— $f/l=0.10$

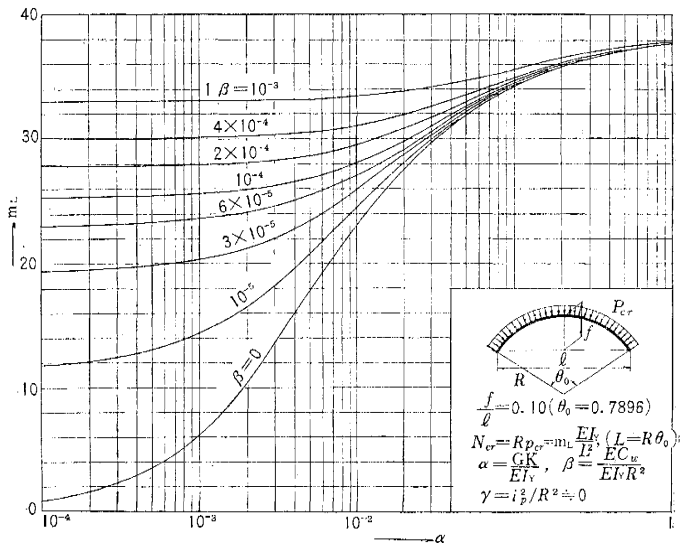


図-9 境界条件 (B), Case I のアーチの曲げねじれ座屈係数 m_L の値 ($\gamma=0$)— $f/l=0.15$

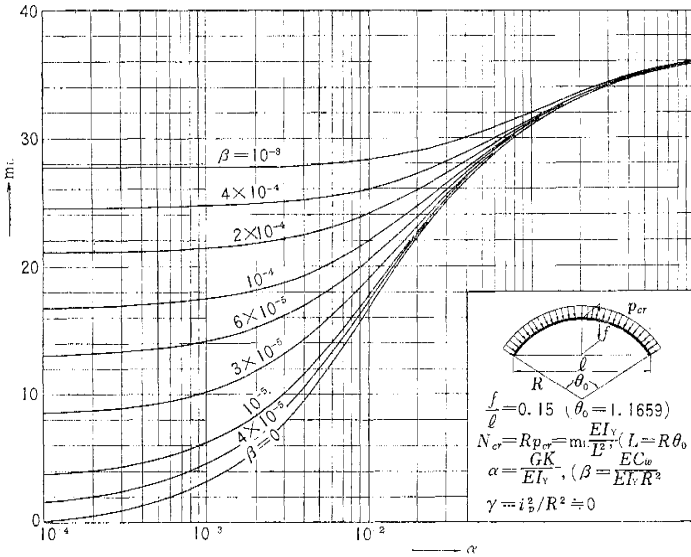
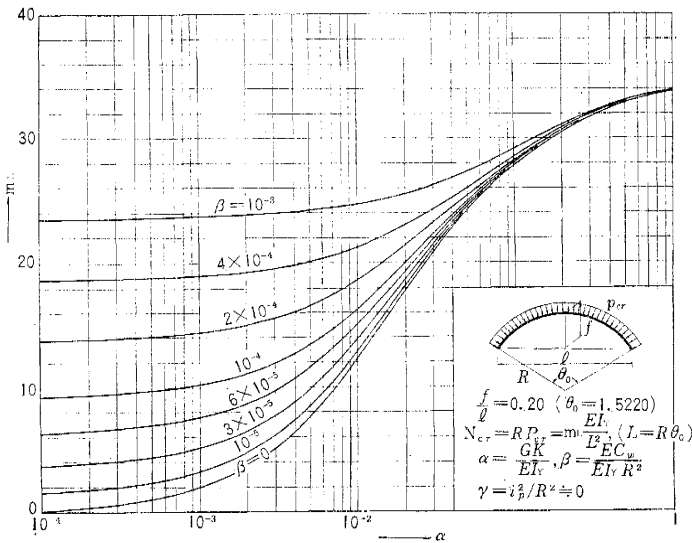


図-10 境界条件 (B), Case I のアーチの曲げねじれ座屈係数 m_L の値 ($\gamma=0$)— $f/l=0.20$



8,9 にみられるように、 α の値が前記の範囲のうちで比較的小さい場合には、 β の効果が顕著であるが、 α の増大とともに β の影響力はなくなり、 $\alpha > 10^{-1}$ では $\beta = 0$ とみなしても実用上大差がない。このことは α と β とを逆にしてもいえることであり、 β の小さいときは α の影響がきびしく、 β の値が大きくなるほど α の変化はききめが鈍くなる。

ねじれ剛性あるいは曲げねじれ剛性を大きくすれば、いくらでも曲げねじれ座屈荷重は上昇するというものではない。 α あるいは β のどちらか一方でも、ある程度以上に大きくなれば、ねじれ変形にくらべてアーチ面外への曲げ変形（横曲げ変形）が支配的となるので、曲げね

じれ座屈というよりはむしろ横曲げ座屈の性質が強まる。したがって、ねじれ剛性あるいは曲げねじれ剛性をそれ以上大きくしても、座屈荷重はほとんど横ばいとなり、ある一定値に収れんしてしまう。この極限の横曲げ座屈については、節を改めて述べる。

b) r の影響 アーチの曲げねじれ座屈荷重におよぼす $r = i_p^2/R^2$ の影響は、直線材の曲げねじれ座屈に対する i_p^2/l^2 の影響と同様で、非常にずんぐりしたアーチを除いて、一般に微小である。表-1 は境界条件 (B) のアーチで、 $\alpha = 10^{-4}$, 10^{-3} , 2×10^{-1} , 1 ; $\beta = 10^{-3}$; $f/l = 0.15$ の場合の曲げねじれ座屈係数 m_L と r との関係を示したものである。通常のアーチでは、 $r < 10^{-4}$ であるから、 $r = 0$ としたときに犯す誤差は、実用上大して問題にならない程度のものであることがわかる。

境界条件 (A) の場合のほうが、(B) の場合より r の影響は小さく、また α あるいは β が小さいほど r の影響は大きい。

c) 荷重状態 荷重 p の作用方向の変化（図-2）がアーチの曲げねじれ座屈荷重に与える影響については、境界条件 (A) の解のうち、 $\bar{\alpha} = 10^{-1}$, 1 , 10 の3種の値について、座屈係数 m_L の値を比較した図-11 (a), (b), (c) から十分にうかがい知ることができる。もちろん、座屈荷重が三者のうちで最も大きいのは、荷重 p の作用方向が常に断面の主軸と一致する Case III の場合で、荷重 p がその作用方向を変えない Case I の場合が最小で、荷重 p が常に曲率中心に向かう Case II の場合がそれらの間にある。曲率が大きいほど、それらの差の割合は増大する。

$\bar{\alpha} = 1$ 近辺では Case II の座屈係数 m_L の値は、Case I の m_L と Case III の m_L の値のほぼ中間に位するが、 $\bar{\alpha}$ が 1 より小さくなればなるほど、Case II の m_L は Case I の m_L にいよいよ接近し、逆に $\bar{\alpha}$ が 1 より大きくなると、Case III の m_L の値に近づき、 $\bar{\alpha}$ が無限大の場合には Case II と Case III とは完全に一致する。

以上述べたような性質は、境界条件 (B) の場合にもあてはまる。

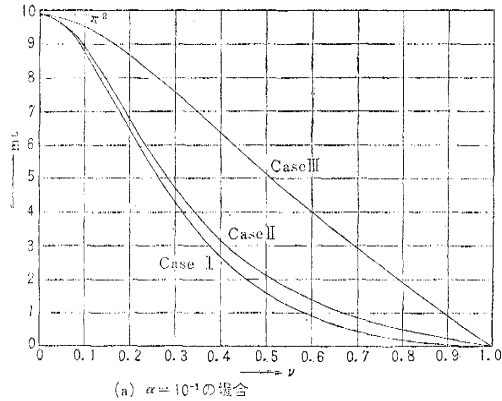
d) 境界条件 境界条件 (A) の第二座屈荷重と、境

表-1 境界条件 (B) のアーチの曲げねじれ座屈係数 m_L と γ との関係, $\beta=10^{-3}$, $f/l=0.15$

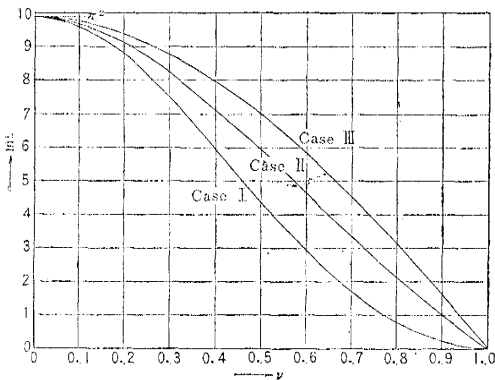
α	γ	0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
10^{-4}		27.65	27.63	27.44	25.29
10^{-3}		27.73	27.70	27.51	23.39
10^{-2}		28.40	28.38	28.21	26.32
2×10^{-1}		33.52	33.51	33.47	33.01
1		35.93	35.93	35.92	35.81

界条件 (B) の第一座屈荷重とは一致しないことに注意しなければならぬ。両者の関係を示した表-2 から

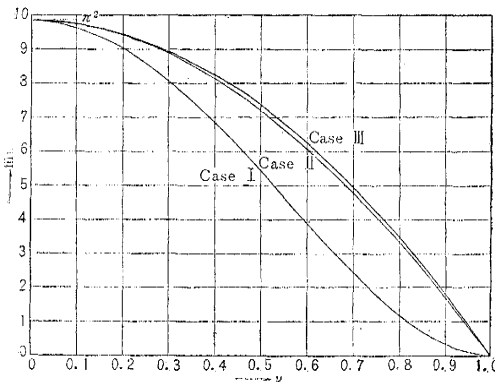
図-11 境界条件 (A) のアーチの座屈係数 m_L の荷重状態の変化による比較 ($\gamma=0$)



(a) $\alpha=10^{-1}$ の場合



(b) $\alpha=1$ の場合



(c) $\alpha=10$ の場合

表-2 アーチの曲げねじれ座屈における境界条件 (A) の第二座屈係数 m_L と境界条件 (B) の第一座屈係数 m_L との比較, Case I, $\beta=0$, $\gamma=0$

α	境界条件と次数	円弧中心角 θ_0					
		0	0.1π	0.2π	0.3π	0.4π	0.5π
1	(A), $n=2$	39.48	38.18	38.31	36.89	34.98	32.66
	(B), $n=1$	39.48	39.19	38.24	37.03	35.40	33.57
10^{-1}	(A), $n=2$	39.48	38.32	35.18	30.79	25.99	21.35
	(B), $n=1$	39.48	38.38	35.78	32.73	29.70	26.78
10^{-2}	(A), $n=2$	39.48	31.43	19.35	11.61	7.28	7.49
	(B), $n=1$	39.48	33.29	25.41	18.74	13.67	10.05
10^{-3}	(A), $n=2$	39.48	11.22	3.52	1.605	0.887	0.546
	(B), $n=1$	39.48	18.21	7.47	3.732	2.168	1.390

かるように、ねじれ剛性あるいは曲げねじれ剛性が大きいとき、また曲率が小さいときは両者はかなり一致するが、ねじれ剛性あるいは曲げねじれ剛性が小さいほど、曲率が大きいほど、その差はひろく。この場合、境界条件 (B) の第一座屈荷重は、境界条件 (A) の第二座屈荷重より常に大きい。

境界条件 (A) の座屈形は式 (21)_I, (21)_{II}, (21)_{III} からわかるように、 $\vartheta=C \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta$, $\varphi=C' \sin \frac{n\pi}{\theta_0} \theta$ で表わされるから、もし境界条件の (B) 座屈形が、 $\vartheta=C \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{\theta_0} \theta\right)$, $\varphi=C' \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{\theta_0} \theta\right)$ の形で表わされるならば、境界条件 (A) の第二荷重と境界条件 (B) の第一荷重とは完全に一致する。これは直線圧縮材の曲げ座屈で、両端ヒンジの第二荷重が、両端固定の第一荷重に等しいのに対応する。ところが、境界条件 (B) のアーチの曲げねじれ座屈の場合には、次節に述べるように、特にねじれ角 φ は α, β がともに小さければ、 $\varphi=C' \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{\theta_0} \theta\right)$ とはかなり異なった形状をとり、このずれが表-2 に示したような両座屈荷重の差異に通ずるのである。

(3) 座屈形

境界条件 (A) のアーチの曲げねじれ座屈の場合には、2つの座屈変形 ϑ と φ とはともに正弦曲線である (式 (21)_I, (21)_{II}, (21)_{III})。 ϑ と φ との割合

$$\eta = \varphi / \vartheta$$

は ϑ と φ とが相似であるので、断面の位置には無関係に一定であり、例えば Case I に対しては、

$$\eta = \frac{n^2 - \nu^2 (m_R - \bar{\alpha})}{\nu^2 (1 + \bar{\alpha} - \bar{\gamma}_0 m_R)}$$

となる。ここに、 m_R は式 (20)_I から定まる。したがって、境界条件 (A) の場合には、座屈形 ϑ, φ はともに $\bar{\alpha}, \theta_0$ などの座屈荷重を支配する要素には無関係に常に正弦曲線であるので、 $\bar{\alpha}, \theta_0$ などによる座屈荷重の変化は、これらのパラメータの関数である η のみによってもたらされることがわかる。

境界条件 (B) の場合には、座屈荷重を支配する要素 α, β, θ_0 などが η のみならず、座屈形 ϑ, φ そのものを

図-12 境界条件(B)のアーチの曲げねじれ座屈形(Case I, $f/l=0.15$)— $\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}, \eta_c$ と α, β との関係—

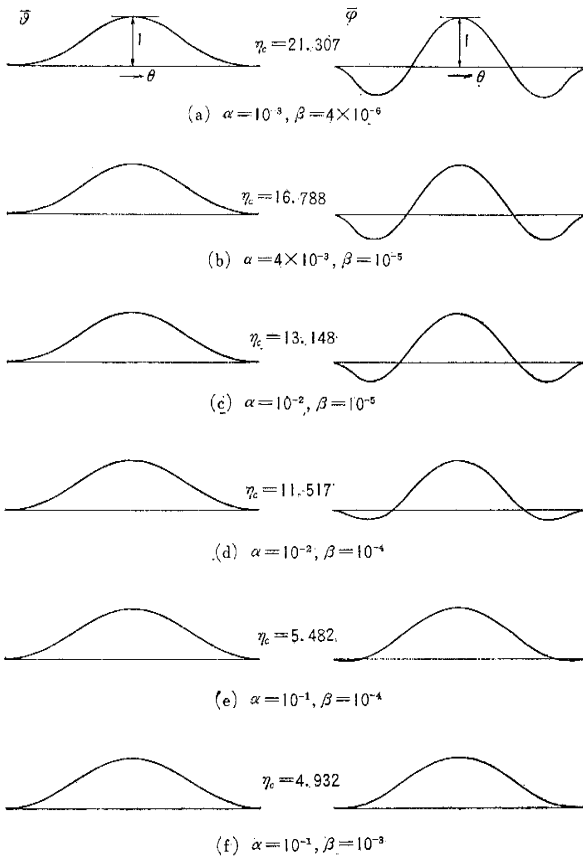
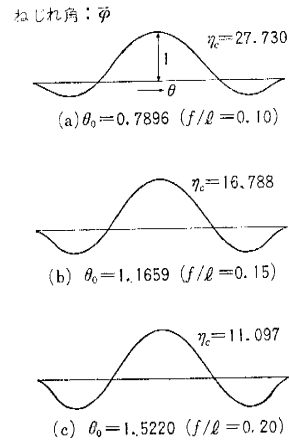


図-13 境界条件(B)のアーチの曲げねじれ座屈形(Case I, $\alpha=4 \times 10^{-3}, \beta=10^{-5}$)— $\bar{\vartheta}, \eta_c$ と θ_0 との関係—



も支配する。逆にいえば、各座屈形状 ϑ, φ と両者の比 η によって座屈荷重がきまってくる。パラメータ α, β, θ_0 によって座屈形 ϑ, φ がどのように変化するかを図-12, 13 に示す。この境界条件の場合には ϑ と φ とは相似でないので、 η は断面の位置すなわち θ の関数であるから、ここでは φ_{\max} と ϑ_{\max} (ともに $\theta = \theta_0/2$ の値) との比 η_c で代表させた(式(31)参照)。

座屈形のうち、 ϑ はパラメータ α, β, θ_0 などによる変化は比較的微小であり、 $\vartheta = C \left(1 - \cos \frac{2n\pi}{\theta_0} \theta \right)$ の形状にかなり近い。これに反し、 φ のほうは α, β がとも大きくときは ϑ とよく似ているが、 α, β が小さくなるにつれて、中間節点を有する座屈形すなわち、両端に近い断面ではスパン中央部の断面とは反対方向にねじれるという性質を示してくる(図-12)。曲率が大きいほどこの傾向は強まる(図-13)。 φ に関するこのような性質が、前に述べたように、境界条件(B)の第一座屈荷重が、境界条件(A)の第二座屈荷重より大きいという結果をもたらしている。

η あるいは η_c が大きいということは横変形にくらべて、ねじれ変形が大きいことであるから、曲げとねじれの連成座屈といっても、現象的にはねじれ座屈に近づ

き、逆に η あるいは η_c が小さければ、横曲げ座屈の性質を帯びてくる。

(4) アーチの横曲げ座屈

アーチの曲げねじれ座屈のうちで、ねじれ剛性あるいは曲げねじれ剛性が無限大の場合が、アーチの横曲げ座屈である。この座屈はすでに述べたように、アーチの曲げねじれ座屈荷重の極限を与えるものであるから、ここに検討しておくことにする。

アーチの横曲げ座屈の基本微分方程式は、3つのCaseに対してそれぞれつぎのようになる。

$$\text{Case I : } \frac{d^4 \vartheta}{d\theta^4} + [2 + m_R(1 + r - 2\bar{y}_0)] \frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2} + (1 - am_R)\vartheta = 0 \dots\dots\dots(32) \text{ I}$$

$$\text{Case II, III : } \frac{d^4 \vartheta}{d\theta^4} + [2 + m_R(1 + r - 2\bar{y}_0)] \frac{d^2 \vartheta}{d\theta^2} + (1 + m_R)\vartheta = 0 \dots\dots\dots(32) \text{ II}$$

この場合、見かけのねじれ角 φ は存在するが、実質的なねじれ角 $\varphi - \vartheta$ は 0 である。したがって、アーチリブの断面の半径方向の主軸は、座屈変形に際しても常に曲率中心に向かうことになるので、Case II と Case III とは同一となるのである。

境界条件(A)に対する解は

$$\text{Case I : } m_L = \frac{\pi^2(n^2 - \nu^2)^2}{n^2(1 + r - 2\bar{y}_0) + a\nu^2} \dots\dots\dots(33) \text{ I}$$

$$\text{Case II, III : } m_L = \frac{\pi^2(n^2 - \nu^2)^2}{n^2(1 + r - 2\bar{y}_0) - \nu^2} \dots\dots\dots(33) \text{ II}$$

となる。特に、 $a = \bar{y}_0 = r = 0, n = 1$ の場合には

$$\text{Case I : } m_L = \pi^2(1 - \nu^2)^2,$$

$$\text{Case II, III : } m_L = \pi^2(1 - \nu^2)$$

となり、これらはすでに図-4, 5, 6 に示されている。

境界条件(B)に対しては、座屈条件式は次式で表わされる。

$$\lambda_1 \sin \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} \cos \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} - \lambda_2 \sin \lambda_2 \frac{\theta_0}{2} \cos \lambda_1 \frac{\theta_0}{2} = 0$$

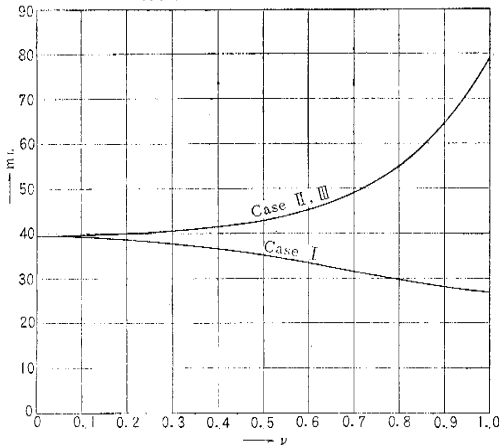
ここに、 λ_1, λ_2 は

$$\text{Case I : } \lambda_{1,2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} m_R (1+r-2\bar{y}_0)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{m_R^2 (1+r-2\bar{y}_0)^2 + 4 m_R (1+r+a-2\bar{y}_0)}$$

$$\text{Case II, III : } \lambda_{1,2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} m_R (1+r-2\bar{y}_0)} \pm \frac{1}{2} \sqrt{m_R^2 (1+r-2\bar{y}_0)^2 + 4 m_R (r-2\bar{y}_0)}$$

で与えられる。 $a=\bar{y}_0=r=0, n=1$ の場合の各 θ_0 の値に対する座屈係数 $m_L (=m_R \theta_0^2)$ を計算して、その結果を図-14 に示した。この図表は各曲率に対して、曲げねじれ座屈係数の上限を与える点で意義がある。

図-14 境界条件 (B) のアーチの横曲げ座屈係数 m_L の値



円弧中心角 $\theta_0=0$ のときは、円弧長 L に等しい長さの直線材の曲げ座屈に相当する。この場合の座屈係数は、 $\bar{y}_0=0$ ならば α, β に無関係に、境界条件 (A), (B) に対してそれぞれ $m_L = \pi^2, 4\pi^2$ であるから、図-4, 5, 6 および図-14 からわかるように、Case I のアーチの場合には、ねじれ剛性あるいは曲げねじれ剛性が無限大の横曲げ座屈荷重でさえも、これに対応する直線材の曲げ座屈荷重より常に小さいということに注意すべきである。

(5) アーチの面内座屈と曲げねじれ座屈との関係

扁平なアーチにおいて起こる可能性のある飛移現象は別とすれば、弾性安定問題からくるアーチの耐力は、アーチ面内において起こる曲げ座屈と、本論文で扱ってきたアーチ面から外に変形の起こる曲げねじれ座屈とのうちで、小さい座屈荷重を与えるほうの座屈によってきまる。この関係は、アーチ面内における曲げ剛性 EI_X と横曲げ剛性 EI_Y との比を表わすパラメータとして

$$\mu = \frac{EI_X}{EI_Y} \dots\dots\dots(34)$$

を導入すると、つぎのような式で表現することができる、

$$m(\alpha, \beta, r, \theta_0, r) \geq \mu \bar{m}(\theta_0, \bar{r}) \dots\dots\dots(35)$$

> : アーチ面内の曲げ座屈

< : 曲げねじれ座屈

$m(\alpha, \beta, r, \theta_0, r)$ はアーチの曲げねじれ座屈係数であり、パラメータ $\alpha, \beta, r, \theta_0$ およびアーチ面外への曲げねじれ変形に対する境界条件 r によって規制されることを意味する。同様に、

$\bar{m}(\theta_0, \bar{r})$ はアーチ面内の曲げ座屈係数で、 θ_0 およびアーチ面内における変形に対する境界条件 \bar{r} によって定まり、アーチ面内の座屈荷重を $\bar{N}_{cr} (=R\bar{p}_{cr})$ とすると、式 (15) に対応してつぎの関係がある。

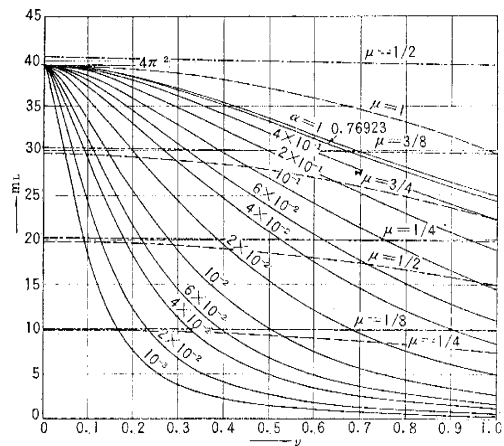
$$\bar{N}_{cr} = \bar{m}_R \cdot \frac{EI_X}{R^2} = \bar{m}_R \cdot \mu \frac{EI_Y}{R^2}$$

あるいは、

$$\bar{N}_{cr} = \bar{m}_L \frac{EI_X}{L^2} = \bar{m}_L \cdot \mu \frac{EI_Y}{L^2} \dots\dots\dots(36)$$

曲げねじれ座屈係数 m_L を与える図表に $\mu \bar{m}_L$ -line を同時に書き込んでおくと、与えられたアーチに対して起こる座屈の種類とその座屈荷重は一目瞭然である。図-15 はそのような図表の一例である。同図より例えば、境界条件 (B) の 2 ヒンジアーチで、断面が solid な円形断面あるいはパイプ断面の場合には、 $\alpha \approx 0.769$ であるから常に曲げねじれ座屈が先に起こることがわかる。

図-15 境界条件 (B) のアーチの曲げねじれ座屈と面内座屈との関係 ($\beta=0, r=0$ の場合)



固定アーチ : ———, ニヒンジアーチ : - - -

一方、アーチ面内の座屈荷重と曲げねじれ座屈荷重とが等しい条件

$$m(\alpha, \beta, r, \theta_0, r) = \mu \bar{m}(\theta_0, \bar{r}) \dots\dots\dots(37)$$

はアーチの断面の弾性安定論的対称条件 (仮称) とでも名づけることができ、これは弾性安定論の立場からみたアーチの最も合理的な断面形を示唆するものであるといえよう。例えば、境界条件 (B) のアーチでは、solid な円形断面あるいはパイプ断面は、弾性安定論上からは $\theta_0=0$, すなわち直線材のとき、最も合理的な断面形であ

るといえる。

通常の曲率 ($f/l=1/5\sim 1/10$)のアーチでは、2 ヒンジアーチで大略 $m_L \approx 40$ 、固定アーチで $m_L \approx 80$ である。したがって、境界条件 (B) のアーチに対し、上記の曲率の範囲内でつぎのことがいえる：固定アーチであればねじれ剛性がどんなに大きい断面でも $\mu > 1/2$ 、すなわち、横曲げ剛性 EI_Y が面内曲げ剛性 EI_X の2倍以上ならば、曲げねじれ座屈が面内座屈に先がけて起こる。ねじれ剛性が小さい場合、例えば I 断面では必ず曲げねじれ座屈が起こり、H断面では曲率によってかなり差があるが、 $m_L < 20$ であるので、 $\mu < 1/4$ すなわち EI_Y が EI_X の4倍以下ならば、必ず曲げねじれ座屈が先行する。境界条件 (A) の場合には、 $m_L < 10$ であるからよほど幅の広い断面でないかぎりほとんど曲げねじれ座屈できる。

以上のべたように、単一アーチでは曲げねじれ座屈が意外に支配的である。なかんずく、開断面の場合においては。

5. 実験的研究

(1) 概 説

アーチの曲げねじれ座屈の現象を実証し、それを正しく把握するために、今まで述べてきた理論計算と平行して、モデルアーチによる実験的研究をも行なった。

理論の妥当性を確認するためには、その理論的解析の出発点あるいは基礎となったすべての条件が、そのまま実験において再現されるのがもちろん望ましい。しかし本論文で取り扱ってきた問題の場合、外荷重がアーチの曲率中心に向かうという条件は、それが円弧をなすとするアーチの幾何学的性質に適するため、理論的解析を簡明にしたが、一方この条件を手頃な実験装置で再現するのはむずかしく、本実験では鉛直方向に向かう荷重すなわち円弧の弦に垂直に作用する荷重で代替せざるをえなかった(逆に、このような載荷状態に対しては、理論解は厳密にははなはだしく複雑で、近似的手法がさけられず、解の明快性が失われるという欠点がある)。したがって、ここでは実験結果を理論値とそのまま比較することはできないが、しかし、この実験によっても、アーチの曲げねじれ座屈の現象とその特性とは、十分にとらえることができると思う。

また、上に述べた2つの荷重状態に対する座屈値は、扁平なアーチではかなり接近し通常のアーチ ($f/l < 1/5$) では概算的には両者の関係は、次式によって近似することができる。

$$w_{cr} \approx \frac{p_{cr} \cdot L}{l} \dots \dots \dots (38)$$

これはアーチのになう全荷重が相等しいという条件から得られるもので、 $f/l < 1/5$ ではその誤差は数 % をでな

いことを確かめた。式 (38) において w_{cr} は円弧の弦に垂直に作用し、弦に沿って等分布する荷重、 p_{cr} は曲率中心に向かって作用し、円弧に沿って等分布する荷重のそれぞれ座屈値である。

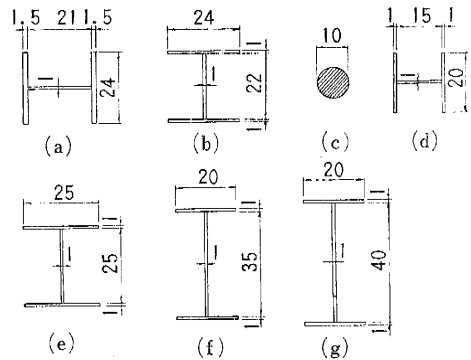
(2) 実験用アーチ桁

実験に用いたモデルアーチは総数16本であり、その線形は表-3に示した4種類である。断面の形状は図-16に示した7種類であるが、図中の寸法は設計寸法であり、でき上がったモデルの寸法とはもちろんわずかの差はある。以上の線形と断面形とを組合わせてつくった16本のアーチの諸元は、表-4にまとめたとおりである。スパン、ライズなどの製作誤差にくらべて、断面寸法、特に板厚の誤差はきびしくひびくので、表-4における断面定数はマイクロメータによって、各アーチの5つの断面について、精密に測定した値を用いて計算したものである。

表-3 モデルアーチの線形

線形番号	曲率半径 R(cm)	円弧中心角 θ_0	スパン l(cm)	円弧長 L(cm)	f/l
I	272.5	1.1659	300	317.7	0.15
II	299.0	0.7896	230	236.1	0.10
III	208.9	1.1659	230	243.6	0.15
IV	166.8	1.5220	230	253.8	0.20

図-16 模型アーチの断面形状



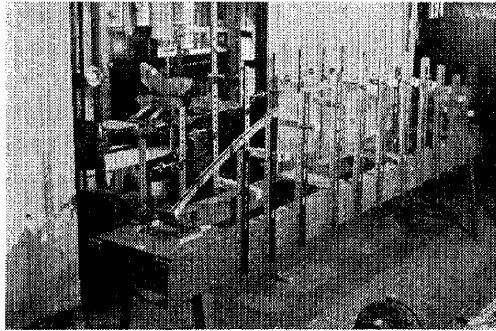
モデルアーチの材質は No. 1 と No. 2 は真ちゅう (ヤング係数 $E=1.01 \times 10^6$ kg/cm², 比例限界のひずみ $\epsilon \approx 900 \times 10^{-6}$) であり、他はすべて SS 41 である。フランジプレートとウェブプレートとの結合は、入念なハンダ付けによったが、SS 41 に対するこの接合方法には不安が残った。しかし、モデルアーチの大きさは、荷重の Capacity との関係から制約されたものであり、厚さ 1 mm の薄板に対しては、溶接接合では溶接ひずみがそうとう残ることが予想され、このような製作上の不整は座屈実験では致命的な欠陥となるので、溶接接合をさけて、あえてハンダ付けにしたのである。なお、I および H 断面のアーチには 9 つの断面 (No. 1 と No. 2 では 11 の断面) に補剛材をとりつけてある。

(3) 実験装置と実験手順

表-4 実験に用いたアーチ桁の諸元

No.	線形	断面形	$F(\text{cm}^2)$	$I_X(\text{cm}^4)$	$I_Y(\text{cm}^4)$	$K(\text{cm}^4)$	$C_w(\text{cm}^6)$	α	β	γ
1	I	(a)	1.294 0	0.388 0	1.075 0	6.945×10^{-3}	0.502 5	2.485×10^{-3}	6.295×10^{-6}	1.523×10^{-5}
2	I	(b)	0.746 9	0.670 8	0.245 6	2.703 "	0.345 1	4.233 "	1.758×10^{-5}	1.652 "
3	II	(c)	0.785 5	0.049 09	0.049 09	9.818×10^{-2}	0	7.629×10^{-1}	0	1.399×10^{-6}
4	II	(c)	0.785 5	0.049 09	0.049 09	9.818 "	0	7.629 "	0	1.399 "
5	III	(c)	0.785 5	0.049 09	0.049 09	9.818 "	0	7.629 "	0	$2.862 \times "$
6	III	(c)	0.785 5	0.049 09	0.049 09	9.818 "	0	7.629 "	0	2.862 "
7	IV	(c)	0.785 5	0.049 09	0.049 09	9.818 "	0	7.629 "	0	4.493 "
8	IV	(c)	0.785 5	0.049 09	0.049 09	9.818 "	0	7.629 "	0	4.493 "
9	II	(d)	0.555 8	0.133 3	0.306 4	1.853×10^{-3}	0.091 63	2.324×10^{-3}	3.144×10^{-6}	$7.050 \times "$
10	III	(d)	0.563 8	0.136 9	0.326 7	1.879 "	0.099 20	2.212 "	6.958 "	1.884×10^{-5}
11	IV	(d)	0.552 3	0.134 1	0.290 3	1.841 "	0.087 44	2.439 "	1.083×10^{-5}	2.763 "
12	II	(e)	0.774 3	1.007 4	0.274 3	2.688 "	0.467 4	3.769 "	1.906 "	1.852 "
13	III	(e)	0.740 6	0.984 8	0.259 0	2.353 "	0.440 1	3.494 "	3.896 "	3.737 "
14	II	(f)	0.767 9	1.672 0	0.134 5	2.601 "	0.437 0	7.438 "	7.445 "	1.0374×10^{-4}
15	II	(g)	0.810 8	2.247 0	0.136 0	2.752 "	0.574 4	7.783 "	4.724 "	3.290×10^{-5}
16	III	(g)	0.830 5	1.870 4	0.141 3	2.756 "	0.602 5	7.502 "	9.766 "	5.596 "

写真-1



a) モデルアーチのすえ付け 2本の溝型鋼を約40cm間隔に向かい合わせてタイプレートで結合したものを実験台とし、その上にモデルアーチをすえ付けた(写真-1)。アーチの断面が開断面の場合には特にねじれやすく、これを正しくすえ付けることは容易なわざではなかった。しかも、このすえ付けの良否が、実験結果に最も大きな影響を与えるとあっては、いやがうえにも慎重を期さねばならなかった。

b) 支点構造 境界条件(A)を満たすような支点構造は、横方向に対するヒンジをボールベアリングを用いて製作しても、ベアリングの摩擦が座屈荷重に微妙に影響し、座屈荷重のばらつきが大きいことがわかった。また、断面のそりが自由という条件の現出も厳密には非常にむずかしい。

これに反し、境界条件(B)は比較的完全に、しかも容易に現出できるので、本実験ではすべてこの支点条件を対象とした。また、アーチ面内変形に対する端部条件としては、2ヒンジアーチを選んだ。結局、支点構造は写真-2に示すように、アーチ端部を固定した板をボールベアリングの軸受で支持された軸棒に取りつけた構造とし、上記のアーチ面外と面内に関する2つの理論上の支点条件を同時に満足させることができた。

c) 載荷方法 実験桁に何らかの乱をも与えずに、

写真-2

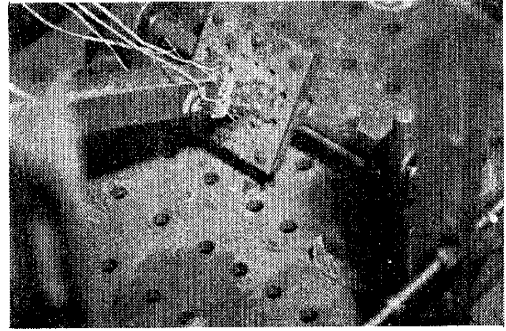
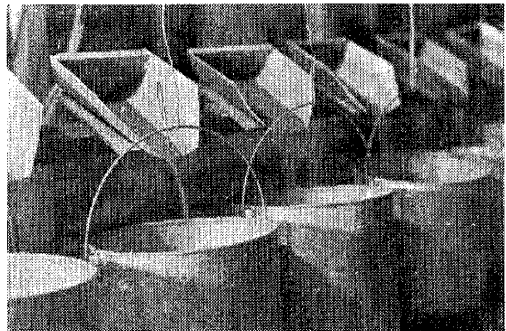


写真-3

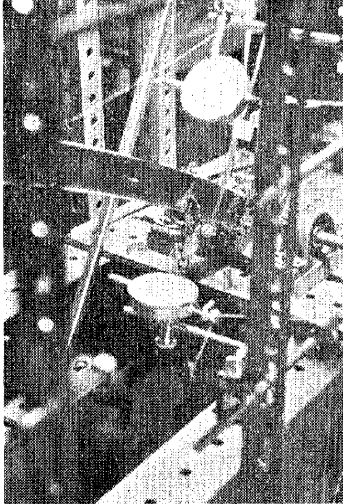


荷重を漸次増加させていくことはなかなかむずかしい。本実験では写真-3に示すように、アーチの各等分点にバケツ状容器Iを吊り下げ(No.1とNo.2では12個、他の桁では10個)、さらに同一シャフトにとりつけた容器IIにあらかじめ計量した乾燥砂を入れておき、シャフトの回転によってこの砂を容器IIから容器Iに、ごく少量ずつ落下させていくという単純な載荷方法を採用した。注意ぶかく行なえば、アーチに与えるショックは感知できないまでに除くことができた。また容器別の不均一も、ほとんどなくすることができた。一段階で落下させる砂の量は、一点で50~500g程度の間で変化させた。すなわち座屈荷重に近づくにつれて、その量を減じ

ていった。荷重段階は 10~20 ぐらいにした。

d) 変形と垂直ひずみの測定 アーチ リブの各 10 等分点 (No. 1 と No. 2 では 12 等分点) の変形と垂直ひずみとを各荷重段階ごとに測定した。変形は各測定断面にとりつけたアーム (写真-4) に上下 2 点の標点 (標点間隔 20 cm) を印し、その横方向の変位をダイヤルゲージではかり、ねじれ角は両者の差から計算した。

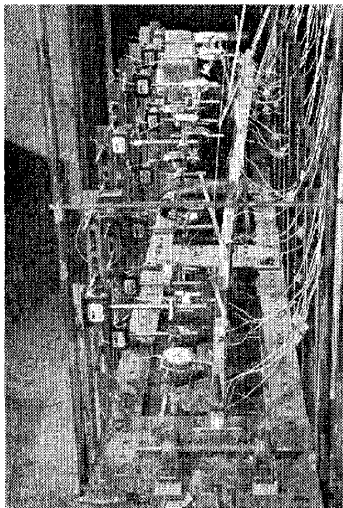
写真-4



ダイヤルゲージはあらかじめそのストロークをしぼっておき、測定時にそのしぼりをゆるめながら、細心の注意をはらって標点に近づけ、機械的接触前の電氣的接触をブザーで知るように工夫し (写真-4)、その状態でダイヤルゲージの読みをとった。この場合、ダイヤルゲージによってアーチに外力を加えないようにすることが重要なのである。

座屈変形によって新たに生じた垂直ひずみの測定は、横方向の曲げによる垂直ひずみと、そり拘束による垂直

写真-5



ひずみとを別個にとりだして、ワイヤー ストレインゲージによって測定した。荷重と直接につながる軸方向力による垂直ひずみをも別にとりだして測った。

曲げねじれ座屈変形を起こし、崩壊寸前のつり合い状態にある実験中の No. 2 のアーチを写真-5 に示す。

(4) 実験結果

拱頂点の変形ならびに垂直ひずみと各等分点に作用した集中荷重 P との関係を図に描くと、例えば No. 2 のアーチ (I-断面) の場合には 図-17, No. 8 のアーチ (丸棒) の場合には 図-18 のようになる。図中に同

図-17 モデルアーチ No. 2 の座屈変形ならびに垂直ひずみと荷重 P との関係、境界条件 (B)

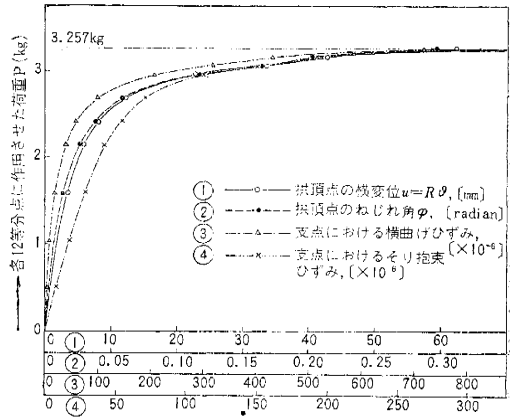
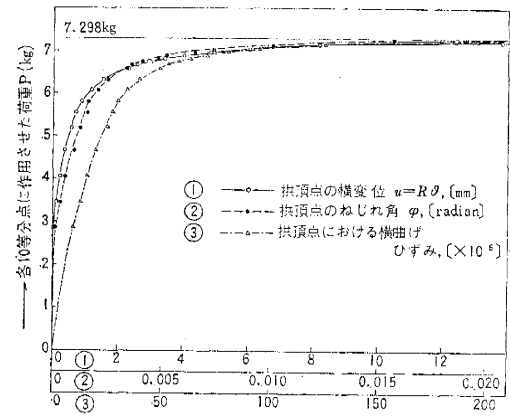


図-18 モデルアーチ No. 8 の座屈変形ならびに垂直ひずみと荷重 P との関係、境界条件 (B)



時に書き込んである横軸に平行な直線は、実験においてアーチが座屈崩壊したときの荷重の値を示したものである。このような荷重-変形 (あるいは、ひずみ) 曲線から、座屈荷重を定める方法については、いろいろと異論のあるところであるが、本実験では座屈崩壊時の荷重と、荷重-変形 (ひずみ) 曲線の漸近線とがかなり一致しているので、ここでは便宜上この座屈崩壊時の荷重をもって、座屈荷重とみなすことにした。

No. 8 の丸棒アーチの場合には、最終荷重の手前で

は、荷重一変形(ひずみ)曲線はほとんど水平となっているのに対し、開いた断面の No. 2 のアーチの場合には、まだやや上昇みである。この違いは実験上の誤差からきたものではなく、断面形状の特性に起因するものである。このことは他の多くの実験結果から判断して断定できる。なお、いずれの場合でも Southwell's Plot あるいは Donnell's Plot は直線とはならない。

上記のような処理によって、実験結果からきめられた座屈荷重 W_{cr} をまとめると表-5 のようになる。ここに、 $W_{cr}(=w_{cr} \cdot l)$ は集中荷重の座屈値 P_{cr} の合計である。この実験値と、前記の概算式 (38) を通して比較する意味で理論計算値 $p_{cr} \cdot L$ を並記した。等分布荷重 w を 10 個 (No. 1 と No. 2 では 11 個) の集中荷重 P で代行されたことによる誤差は小さいと思われる。

表-5 アーチの曲げねじれ座屈荷重の実験値 W_{cr} と理論値 $p_{cr} \cdot L$

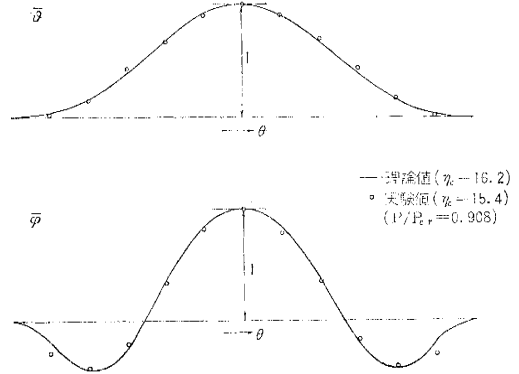
No.	理 論 値				実 験 値
	EI_y/L^2 (kg)	mL	N_{cr} (kg)	$p_{cr} \cdot L$ (kg)	
1	9.584	8.2	78.6	91.6	87.3
2	2.190	13.3	29.2	34.2	35.8
3	1.849	37.6	69.5	54.9	42.5*
4	1.849	37.6	69.5	54.9	45.4
5	1.737	35.6	61.8	72.1	67.6
6	1.737	35.6	61.8	72.1	67.4
7	1.601	33.6	53.8	81.9	73.4
8	1.601	33.6	53.8	81.9	73.0
9	11.54	12.5	144.3	113.9	76.7
10	11.56	8.1	93.5	109.1	60.3
11	9.465	5.2	49.3	75.1	58.4
12	10.33	21.0	217.0	171.3	101.2
13	9.166	14.7	134.7	157.0	94.5
14	4.760	19.7	93.8	109.4	71.0
15	5.124	25.8	132.2	104.4	56.8
16	5.001	20.8	104.0	121.3	91.3

* 印は面内座屈

No. 3 のアーチの面内座屈を起こしてしまったものであり、表中の $W_{cr}=42.3$ kg は面内座屈荷重である。計算上は面内座屈荷重は $p_{cr} \cdot L=56.9$ kg であり、曲げねじれ座屈が先行するはずである。この No. 3 を除いて、No. 1~No. 8 のアーチでは、実験値 W_{cr} と理論値 $p_{cr} \cdot L$ とはかなりよく類似しており、満足すべきものであったが、No. 9~No. 16 のアーチでは、両者の差は 3~4 割程度におよび、良好な結果が得られたとはいえない。これは前にもふれたように、SS 41 に対してフランジプレートとウェブプレートの結合をハンダ付けによったため断面剛性低下に起因するものであると思われる。真ちゅうに対しては十分であったことは、同じ接合断面である No. 1 と No. 2 のアーチの実験結果が示している。なお、同一断面でライズを変えた場合の座屈荷重の変化は、No. 9~No. 16 のアーチの場合にも理論値と同じ傾向を示している。

座屈形の測定結果を No. 2 のアーチについてプロットしてみると、図-19 のようになる。これは作用荷

図-19 境界条件 (B) のアーチ (No. 2) の曲げねじれ座屈形



重 P が座屈荷重 P_{cr} の 0.908 倍のときあらわれた変形を示したものである。実線で示した p_{cr} に対する理論上の座屈形とかなりの一致を見せており、理論上と実験上との荷重の作用方向の違いによる影響は、それほど大きくないことを物語っている。特に端部に近い断面と、拱頂付近の断面とは、 α, β が小さい場合には反対方向にねじれるという計算前には予想できなかった性質をも、実験結果はあざやかに示した。これは注意ぶかく観察すれば、写真-5 からもうかがえるであろう。

6. 結 語

円弧アーチが等分布荷重を受ける場合を対象に選んで、アーチ曲げねじれ座屈という不安定現象について、理論的ならびに実験的研究を行なった。電子計算機という新しい計算手段の導入を考慮して、計算の煩雑さをいわず問題の微分方程式をできるだけ厳密に設立し、座屈条件式として複雑な形の超越関数方程式を導いた。なおアーチ断面のせん断中心と重心との偏倚の影響は近似的に考慮された。

ぼう大な数値計算はいっさい電子計算機によって行ない、得られた結果を若干の数表にまとめた。解は一般的な使用に役立つためと、アーチの曲げねじれ座屈の基本的な性質を知るという2つの目的のために、すべて無次元のパラメーターを用いて表わした。これらの図表をもとにして、アーチの曲げねじれ座屈の特性について、広範な角度から検討を加え、その基本的ないくつかの性質を明らかにすることができた。

本研究の理論的部分は直接的には、曲率中心に向かう等分布荷重を受ける円弧アーチの曲げねじれ座屈に対してなされたものであるが、ここに解明された事からは、本質的には鉛直荷重を受ける円弧アーチ、さらに放物線アーチの曲げねじれ座屈にもあてはまり、アーチの一般的な安定問題の検討に役立つものと思う。

アーチの横方向の安定問題は、橋梁構造として出現する長径間アーチ橋において重要な意義を有することは、

最初に指摘したとおりである。この問題の取り扱いについては、例えばスパンドレルアーチ橋の場合には、アーチ橋全体を、すなわち左右の両主構と上下の横構よりなる閉じた立体トラス構造を、静力学的に等値な1本の閉断面桁におきかえ、本論文で扱ったような単一アーチの理論を適用するという解析方法が有力である。ソリッドリブアーチ橋の場合には、2本のアーチ桁を横桁および縦構で結合した構造であるから、横桁などの変形を無視できるときには、やはり橋全体を1本の桁におきかえることは容易である。横桁などの変形を考慮しなければならぬときには、さらに複雑な系の座屈問題となる(近似的取り扱いには倉西氏によってなされている⁸⁾)。これらについては別の機会にゆずることとする。

おわりに、この研究は指導教官 東大平井教授のもとで行なった修士論文の一部を、さらに発展させとりまとめたものであることを付記し、終始ご指導いただいた同教授をはじめ、お世話になった奥村教授、伊藤助教授、島田講師ならびに東北大 倉西助教授の諸先生方に厚く御礼申し上げる次第である。また、実験においてご協力いただいた大学院学生 林 国安、川崎重工 佐野信一郎(当時卒論学生)の両氏に感謝の意を表したい。

参 考 文 献

1) 平井 敬:「鋼橋Ⅲ」, 技報堂.

- 2) Timoshenko, S.: "Kippsicherheit des gekrümmten Stabes mit kreisförmiger Mittellinie", Z.A.M.M. Heft 3 (1923).
- 3) Stüssi, F.: "Lateral Buckling and Vibration of Arches" Int. Assoc. of Bri. and Str. Engrs. Pubs., Vol. 7. 1943-44.
- 4) Godden, W.G.: "The Lateral Buckling of Tied Arches". Proc. of I.C.E. Part III, August, (1954).
- 5) Klöppel, K. & Protte, W.: "Ein Beitrag zum kipp-Problem des Kreisförmig gekrümmten Stabes" Stahlbau, Heft 1. (1961).
- 6) Stein, P.: "Die Anwendung des "Duchbiegungs Verfahrens" zur Ermittlung der kritischen Last von Bogenträgern beim Ausweichen senkrecht zu ihrer Ebene unter Berücksichtigung von biegeweichen Hängern" Bauingenieur, Heft 5. (1961).
- 7) Kee, C.F.: "Lateral Inelastic Buckling of Tied Arches" Proc. of A.S.C.E. Vol. 87, ST. (1961).
- 8) 倉西 茂:「アーチ橋のねじれ座屈について」, 土木学会論文集, 第75号 (1961).
- 9) Kee, C.F.: "The Design of the Unbraced Stab-bogen Arches" Structural Engineer, Sept. (1959).
- 10) Timoshenko, S.: "Theory of Elastic Stability" McGraw-Hill. (1936).
- 11) Bleich, F.: "Buckling Strength of Metal Structure" McGraw-Hill. (1952).
- 12) 長柱研究委員会:「弾性安定要覧」, コロナ社.

(原稿受付: 1963. 2. 6)

昭和38年度土木学会論文集編集委員

委員長	奥村敏志	副委員長	吉川秀夫	委員	土肥正彦	委員	三木五三郎
委員	安芸井一	委員	小池重一郎	委員	中川博次	委員	村上良郎
委員	伊藤浩	委員	小寺重正	委員	中瀬明男	委員	村田二郎
委員	池田睦治	委員	佐藤武昭	委員	林正夫	委員	八木田功
委員	池守幸	委員	佐藤木典	委員	久武啓夫	委員	山根孟治
委員	大沼功	委員	鈴木雄次	委員	藤田嘉一	委員	箭内寛也
委員	岡田宏	委員	多部恒彦	委員	堀井健一郎	委員	山崎徳也
委員	神光男	委員	玉野治	委員	堀川清司	委員	吉田巖
委員	栗林榮一	委員		委員	西尾元充	幹事	西脇威夫
					増田重隆		

昭和38年8月15日印刷
昭和38年8月20日発行

土木学会論文集 第96号

定価 150 円 (〒 20 円)

編集兼発行者 東京都新宿区四谷一丁目 社団法人 土木学会 羽田 巖
印刷者 東京都港区赤坂溜池5 株式会社 技報堂 大沼 正吉

発行所 社団法人 土木学会 振替東京 16828 番
東京都新宿郵便局区内 新宿区四谷一丁目 電話(351)代表 5138 番

MARUI

短時間 厚さ及び構造物の弾性係数が判定 できる

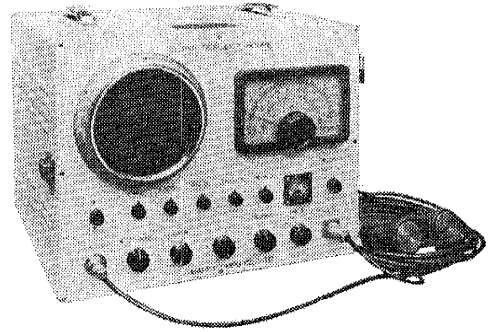
- ① 時間の節約になります (時代に即応)
- ② 正確な判断の参考資料となります
- ③ 無破壊で常に測定出来ます

用 途

- 型枠取除き判定 (経済助力となる)
- ゴム・コンクリート等の品質管理
- 道路隧道の厚さ及びボイドの判定
- コンクリートの経年変化・強度の推定等

営 業 品 目

セメント・コンクリート・土質・アスファルト
水理各試験機・無破壊試験器・計量器・各種材料試験機



超音波反射測定器

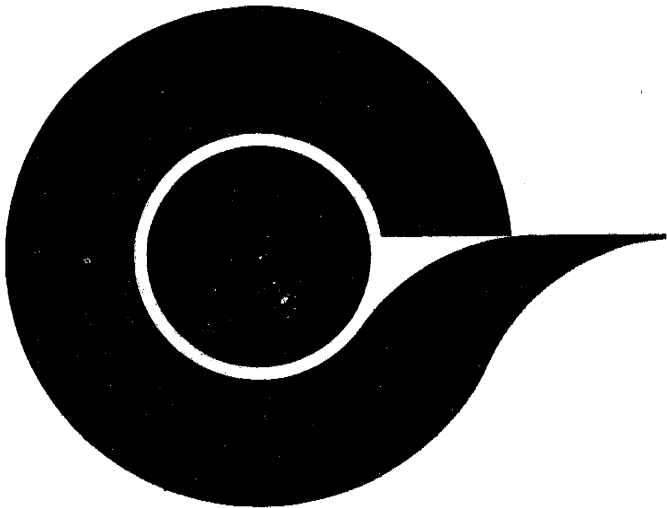


株式
會社

丸井製作所

本 社 大阪市城東区蒲生町4ノ10番地
電話 大阪 (931) 3541番 (代表)
東京出張所 東京都港区芝田村町5ノ4番地(吉田ビル)
電話 東京 (431) 7563番

学会・協会誌一手取扱



日本機械学会誌
化学と工業
精密機械
土木学会論文集
燃料協会誌
日本水産学会誌
月刊建設
埋立と浚渫
機械学会論文集
工業化学雑誌
産業機械
電気協会雑誌
日本工学会々報
大ダム・石灰石
選炭・港湾
コンクリートジャーナル
機械学会英文論文集
日本化学雑誌
建設の機械化
電気化学
同位体と放射線
塩業時報
日本時計学会誌
日本鉱業会誌
日本鋳物協会誌
土木学会誌
早稲田電気工学会報
港湾荷役
東北鉱山
月刊JICST情報管理
其他学術技術専門誌
取扱



学・協会専門広告代理店

株式会社共栄通信社

本社 東京都中央区銀座西8の8(新田ビル内) 電話(572) 3381 代表~5

長い線でも
 同じ細さに

かき始めも 先端がくずれない
 途中でもかき減りが少ない

6H→6B14硬度 1 ダース Y600

uni



三菱鉛筆

ウノサワポンプ・ブロー

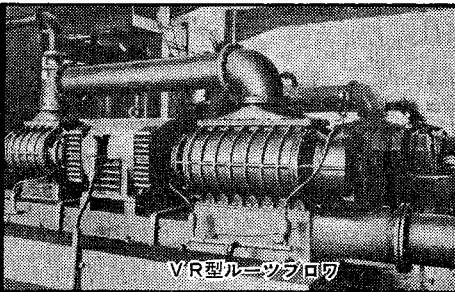
← **ウノサワ空気力輸送機**
 各種粉粒体の輸送・真空圧送型および併用型

ウノサワ・ルーツブロー
 小型から大型まで生産・各種工業の空気源
 真空ポンプおよび密閉軸封装置付特殊ガス用

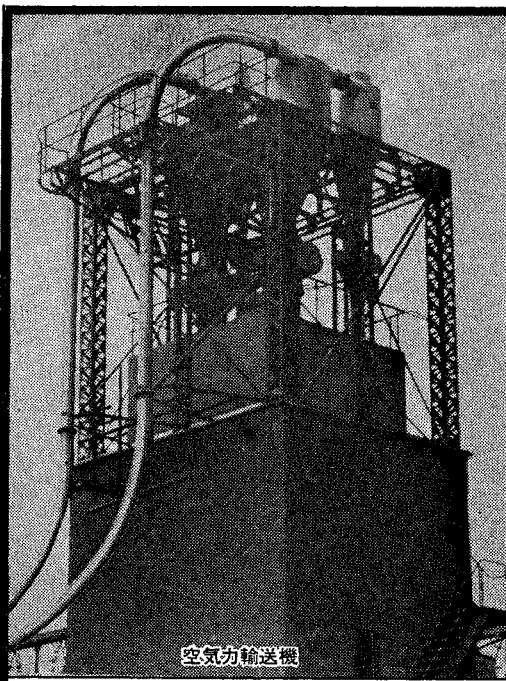


製作品目

- ルーツブロー
- 真空ポンプ
- 給水ポンプ
- 暖房真空ポンプ
- 空気力輸送機



VR型ルーツブロー



空気力輸送機

株式会社 **宇野沢組鉄工所**

本社/渋谷工場 東京都渋谷区山下町6-2 電話東京(44)2211(代)
 玉川工場 東京都大田区矢口町9-4-5 電話東京(738)4191(代)
 大阪出張所 大阪府北区曾根崎新地3の12(不動ビル内) 電話大阪(361)0684