

# 直格子斜桁橋の曲げモーメントに関する研究

## STUDIES ON THE BENDING MOMENT OF RIGHT GRILLAGE-SKEW GIRDER BRIDGES

藤尾武明\*・大村裕\*\*・成岡昌夫\*\*\*  
By Takeaki Fujii, Hiroshi Ohmura and Masao Naruoka

**要 旨** 両端単純支持の直格子斜桁橋を、相対する2辺で単純支持され、他の2辺で自由な直交異方性平行四辺形板とみなし、著者の提案した斜交座標階差法を用いて、電子計算機によって数値計算を行ない、曲げモーメントの影響係数を求めた。これをを利用して、鋼道路橋設計示方書に示す荷重が載荷された場合、主桁の曲げモーメントが、stiffness parameter, torsional parameter、および、skew parameterによって、いかに低減されるかの公式を求め、斜桁橋の設計の合理化に寄与しようとした。

### 1. はしがき

格子桁構造の荷重分配横桁による荷重分配理論、あるいは、床板をもつ桁橋構造における荷重分配理論には、種々の研究があり、日常設計にあたるものにとって便利なように、公式、表が提示されている。格子桁の計算において、F. Leonhardt の計算法における荷重分配係数の公式、H. Homberg の方法における図表、あるいは、Guyon-Massonet の直交異方性板理論による荷重分配係数の近似公式、および充備した図表などは、実際の業務に貢献するところが大きい。以上は平面構造としての直桁橋についてであるが、斜桁橋について、上記に匹敵するものとしては、イリノイ大学で行なわれた T.Y. Chen らの研究があるにすぎない。この研究では、5本の主桁のスパン中央断面の曲げモーメントの和が、相間剛比（桁の曲げ剛度÷板剛度）によっていかに変わるかを、斜角 30°, 45°, 60° の場合について求めている。著者らは、上記の研究と立場を異にし、単純支持された直格子斜桁橋を、相対する2辺で単純に支持され、他の2辺で自由な直交異方性平行四辺形板とみなして、これを斜交座標階差法で解くことを、昭和 32 年以来研究してきた。しかしながら、この研究の当初には、電子計算機の使用が思うようにならず、大学外のものを使用したので、単に逆マトリックスの求解に利用するにとどまり、また、計算の対象としたのも、torsional parameter が 1 と 0 との両極端の場合にすぎなかった。しかし、最近

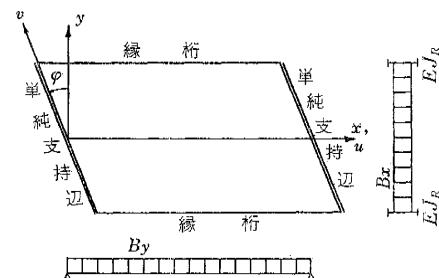
に至って、大学においても、電子計算機による計算のサービスが開始されるようになったので、改めて、torsional parameter の種々の値に対する計算を実施して、曲げモーメントの影響係数を求めた。ここで、従来の計算結果を総合して、鋼道路橋設計示方書に規定された荷重が載荷された場合、主桁の曲げモーメントがどのように低減するかを求めた。

この研究は、さきに述べた Y.T. Chen らの研究よりも一般性があり、斜桁橋の設計に寄与するところが少なくないとと思われる。

### 2. 直交異方性平行四辺形板の斜交座標階差法による数値解析法の概要

解析の対象とするのは 図-1 のような、相対する2辺で単純に支持され、他の2辺で弾性はり支持、あるいは

図-1 直交異方性平行四辺形板



は、自由な直交異方性板である。直交異方性板のたわみ曲面の微分方程式は、直角座標では

$$B_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + B_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \quad (1)$$

で表わされる。この微分方程式を、図-2 のような、単純支持辺と自由辺とに平行な skew network によっておおい、a) 一般内点、b), c) 左(右)の単純支持辺近傍の内点、d) 自由辺近傍の内点、e), f) 左(右)の単純支持辺と自由辺とによってかこまれる鋸(鉋)角隅の内点、g) 自由辺上の一般点、h), i) 単純支持辺近傍の自由辺上の点について、上記のたわみ曲面の微分方程式を階差式によって表わす。たわみ  $w$  に乘すべき係数は、

$$A = K^2/\alpha, \quad B = K \tan \varphi, \quad \kappa = H/\sqrt{B_x \cdot B_y}$$

の関数である。ただし、

$$K = \lambda_y/\lambda_x, \quad \alpha = \sqrt{B_y/B_x}$$

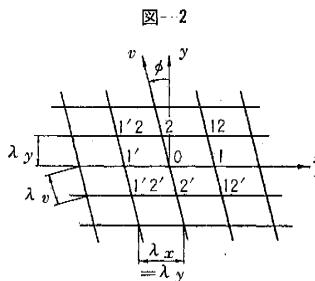
\* 正員 名古屋大学助手 工学部土木工学教室

\*\* 正員 工博 神戸大学助教授 工学部土木工学教室

\*\*\* 正員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学教室

である。もし、 $x$ 方向、 $y$ 方向の分割数を同一とすれば、 $K=b/a$ となり、 $\sqrt{A}/2=\theta$  (Guyon-Massonnet 法の stiffness parameter)となる。 $\kappa$ は上記の方法で $\alpha$ と表わされているもので、torsional parameter である。 $B$ はこの研究ではじめて導入されるものであって、skew angle parameter と呼んでよからう。

skew network の各点について、9つの階差式によつ



て多元連立一次方程式をつくる。たとえば、スパン方向(幅員方向)を $m(n)$ 等分する場合には、 $(m-1) \cdot (n+1)$ 元となる。この連立方程式を解いて、たわみの

値が求められると、主軸方向( $x$ 方向)の曲げモーメントは、図-2を参照して、式(2)によって得られる( $v_y=0$ と仮定する)。

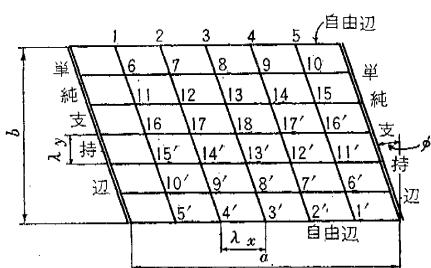
$$(M_x)_0 = -B_x \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_0 = -\frac{K^2}{\lambda_y^2} \cdot B_x (w_{1'} - 2w_0 + w_1) \dots \dots \dots (2)$$

### 3. たわみ、および、曲げモーメントの影響係数の計算

直格子斜桁橋、ひいては、直交異方性平行四辺形板の性状を求めるには、たわみおよび曲げモーメントの影響係数を求めるのがよい。このためには、 $(m-1) \cdot (n+1)$ 元のマトリックスの逆マトリックスを求めなければならない。この目的のために、さきに、自由辺( $EJ_R=0$ )の場合に対して、 $A=1, 4, 9, 16$ ,  $B=0.5, 1, 1.5, 2.0$ ,  $\kappa=0, 1$ の組合せに対して計算した。しかし、これだけでは、torsional parameter の両極端の値に対して計算したにすぎないので、さらに、 $\kappa=1/3, 1/2, 2/3$ に対して計算を行なった。

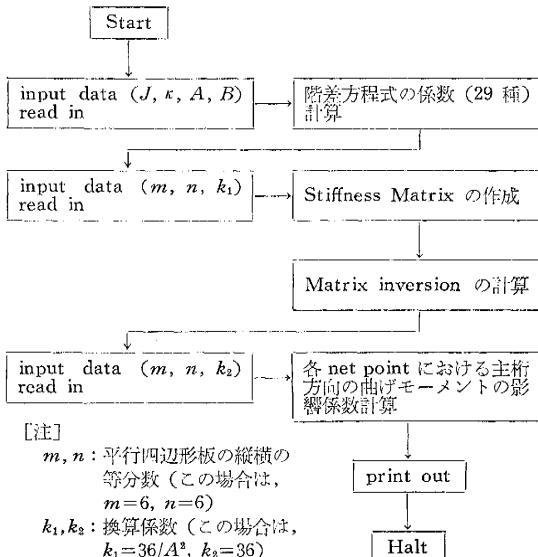
さきの計算では、大学外の電子計算機を利用してするために、図-3のように $m=n=6$ とし、35元の逆マトリックスを解くべきところ、18元、17元の逆マトリックスの計算を行ない、その結果を加減する方法をとった。し

図-3 Skew-Network



かし、大学の計算機のサービスが得られるようになったので、 $\kappa=1/3, 1/2, 2/3$ に対しては、35元の逆マトリックスの計算を直接することにした。なお、 $A, B, \kappa$ の基本値をもとめて曲げモーメントの影響係数が直接に得られるよう、a)  $A, B, \kappa$ の値から、9つの階差式の係数の値の計算、b) stiffness matrix の係数の完成、c) 逆マトリックスの subroutine とのリンクによる flexibility matrix の計算、d) 曲げモーメントの影響係数の計算の一連の計算をすべて自動的に行なうよう、プログラムした。KDC-1 (NEAC-2203) では、この計算時間は一つの場合について、30(28) 分であった。このプログラミングのための Flow Chart は、図-4のようである。

図-4 直交異方性平行四辺形板の曲げモーメントの影響係数の計算のための flow chart



さて、9つの階差式の右辺は、集中荷重 $P$ のみとすると、 $\bar{P}_0 = P/\lambda_x \lambda_y$ であるから、たわみの影響係数の単位は、 $A=K^2/\alpha$ ,  $K=\lambda_y/\lambda_x$ ,  $\lambda_x=a/6$ を考慮して、

$$\begin{aligned} \bar{P}_0 \lambda_y^4 &= \frac{P}{\lambda_x \lambda_y} \cdot \frac{\lambda_y^4}{a^2 B_x} = \frac{PK \lambda_y^2}{\alpha^2 B_x} \\ &= \frac{PK^3 a^2}{36 B_x \alpha^2} = \frac{Pa^2}{KB_x} \cdot \frac{A^2}{36} \end{aligned}$$

となる。したがって、上記 a) の  $A, B, \kappa$  の値から 9 つの階差式の係数の値を計算したときに、これらの値を  $(36/A^2)$  倍して、b) の stiffness matrix の係数を完成してやるようすれば、たわみの影響係数は  $(Pa^2/KB_x)$  で与えられる。

また、曲げモーメントの影響係数の単位は、たわみの影響係数の単位が  $(Pa^2/KB_x)$  で与えられていることを考えて、

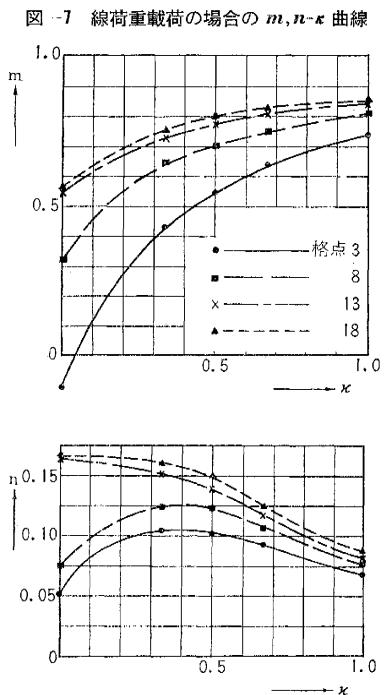
$$\frac{K^2 B_x}{\lambda_y^2} \cdot \frac{Pa^2}{KB_x} = \frac{Pa^2 K}{\lambda_y^2} = \frac{Pa^2 K}{K^2 \lambda_x^2} = \frac{Pa^2}{K(a/6)^2} = 36 \frac{P}{K}$$



$$k = 1 - (2/9)m, \quad \sqrt{\alpha} = (1/\tan \varphi)(B/\sqrt{A})$$

であるから、 $A, B$  の一定値に対して、 $\varphi$  の変化による  $k$  の値は一定で、横軸  $\sqrt{a}$  (図-5 参照) が変化するだけである。すなわち、 $B/\sqrt{A} = \tan \varphi = \sqrt{a}$  であるから、式(5)を

とすることによって、一般的の  $\alpha$  の値に対する  $k = \sqrt{\alpha}$  の一般式が成立する。なお、式(6)における  $m, n$  は式(5)と同一であるから 図-6 から求められる。



線荷重の場合にも等分布荷重の場合と同様にして、 $\varphi = 45^\circ$  の場合に対し、 $\kappa, A, B$  の組合せによると、格点3, 8, 13, 18の曲げモーメントについて、 $k - \sqrt{\alpha}$  座標で表示し、それをもとにして、さきと同様にして  $m, n - \kappa$  曲線を示してあるが、図-7 である。

したがって、等分布(線)荷重の場合について 図-6, 7 から任意の  $\varepsilon$  に対する  $m, n$  の値を求め、与えられた  $\varphi, \sqrt{a}$  を用いることによって、

$$k := m \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \tan \varphi - n$$

から  $k$  を求め、

$$M_{\text{板}} = (1 - k) M_{\text{桥}}$$

によって、直交異方性平行四辺形板としての曲げモーメントが求められる。これに、桁間隔を乗ずると、直格子斜桁橋としての曲げモーメントが得られる。

### 5. 近似式による値と解析値との比較

上に述べた研究の応用例として、さきに発表された純信橋（文献 6），および未発表の新菊水橋のデータを対象にして検討しよう。曲げモーメントは桁としての曲げモーメントを意味し，その単位は tm である。比較検討の結果を表-1 に示す。

純信橋の設計においては、 $\kappa=0$ と仮定して、曲げモーメントの影響係数が計算された。文献6)の表-2に示す曲げモーメントは、幅員によるて減率  $\alpha=0.96$  と衝撃係数  $i=0.28$ との双方をふくむものである。これらの2つを考慮しなければ、単独の単純ばかりのスパンに曲げモーメント  $M_0$  は、

等分布荷重に対して  $(0.350 \times 2) \cdot 21.8^{\circ} / 8 = 41.6$ ,

線荷重に対して  $(5.0 \times 2) \cdot 21.8 / 4 = 54.5$ .

衝撃係数 0.28 を考慮すると、上記はそれぞれ、53.2, 69.7 となる。

文献 6) の表-2 に示す曲げモーメントは、 $\alpha = 0.96$ ,  $i = 0.28$  をふくむものであるから、てい減率を考慮しなければ、 $M_{x,18} = 42.678$  (等分布荷重), 56.353(線荷重) は、それぞれ (1/0.96) 倍して、44.5, 58.7 となる。理論値の 44.5, 58.7 に比較して、著者の近似式によれば、45.2, 58.8 ときわめてよく一致している。この計算では、文献 6) の格点 18 は 図-3 においては格点 13 に対応するので 図-6, 7 より格点 13 に対応する  $m, n$  を求めたものである。

純橋の竣工後、載荷実験を行ない、実験値と計算値

表-1 著者の提案した近似式による近似値と直交異方性平行四辺形板理論による解析値との比較検討

		純 信 橋		新 菊 水 橋	
スパン $l$ , 船員 $b$ , 斜角 $\varphi$		$l=21.8\text{ m}, b=7.5\text{ m}, \varphi=60^\circ, \tan \varphi=1.732$		$l=17.453\text{ m}, \tan 51^\circ 40' \approx 1.265$	
桁 数, 桁 間 隔		4 本, 2 m 間隔		11 本, 2.3 m 間隔	
stiffness parameter $\sqrt{\alpha}$		$\sqrt{0.116}=0.341$		$\sqrt{0.210}=0.458$	
曲げモーメントの影響係数の計算目的		設計計算		載荷実験結果の研究	
荷重区分	等分布	線	等分布	線	等分布
torsional parameter $\kappa$	0	0	0.26	0.26	0.256
直交異方性平行四辺形板理論による, 桁と上部の曲げモーメント	44.5	58.7	30.1	38.5	15.7
近似式	$m$	0.533	0.544	0.680	0.700
	$n$	0.164	0.164	0.145	0.156
	$k=m \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \tan \varphi - n$	0.151	0.157	0.256	0.257
	$M_0$	53.2	69.7	41.6	54.5
	$(1-k)M_0$	45.2	58.8	30.9	40.5
					21.5
					16.2
					26.1

とを比較した。このために、 $H$  の値を Giencke の公式で計算し、 $\kappa=0.26$  を得た。この値を用いて、曲げモーメントの影響係数を改めて計算したが、この値を用い、等分布荷重、線荷重に対して曲げモーメント  $M_{x,18}$  を計算すると、30.1, 38.5 となった。一方  $M_0$  は上に述べたように、41.6, 54.5 であるから、 $(1-k)M_0$  は 30.9, 40.5 となり、これまたよく一致する。

新菊水橋は最近竣工した直格子斜桁橋であるが、載荷実験による研究のため、 $\kappa=0.258$  として曲げモーメントの影響係数を計算した資料があった。

これを利用して、板理論によって、中央桁のスパン中央点の曲げモーメントを計算すると、15.7, 25.7 となる。一方、単独の単純ばかりとしてのスパン中央の曲げモーメント  $M_0$  は、

$$(0.350 \cdot 0.7 \times 2.3) \cdot 17.453^2 / 8 = 21.5$$

$$(5.0 \cdot 0.7 \times 2.3) \cdot 17.453 / 4 = 35.1$$

であるから、 $(1-k)M_0 = 16.2, 26.1$  となる。この計算では、中央桁の中央点に対応するのは図-3においては、格点 18 であるから、図-6, 7 において、格点 18 に対する  $m, n$  を求めたものである。

以上の 3 つの結果から、著者らの近似式は十分用い得られよう。

## 6. む す び

著者らは、直交異方性平行四辺形板に対する斜交座標階差法をかねて提案し、また、torsional parameter が  $\kappa=1, 0$  の両極端の場合に対して、たわみ、曲げモーメントの影響係数を求めておいたのであるが、さらに、基本値  $A, B, \kappa$  と分割数  $m, n$  を与えるだけで、曲げモーメントの影響係数を電子計算機 KDC-1 (京都大学), NEAC-2203 (名古屋大学) で自動的に計算するプログラムを完成し、 $0 \leq \kappa \leq 1$  の種々の値に対して計算した。

これらをさきに完成しておいた  $\kappa=0, \kappa=1$  の場合のそれとあわせて、鋼道路橋設計示方書の等分布荷重・線荷重による曲げモーメント ( $M_{\text{板}}$ ) を計算した。一方、単独桁としての曲げモーメント (単位桁間隔あたりの) ( $M_{\text{桁}}$ ) との比を求めて、低減率  $k$  を定義し、これを、 $k = m \cdot \sqrt{\alpha} \cdot \tan \varphi - n$  として表わし、 $m, n$  を求める図を与えた。

これによって、 $(B_y/B_x)^{1/4}$  の値を仮定すれば、斜角  $\varphi$  から、 $k$  の値が求められ、 $M_{\text{板}} = (1-k)M_{\text{桁}}$  によって直交異方性平行四辺形板としての曲げモーメントがきわめて簡単に求められる。これに桁間隔を乗ずると、直格子斜桁橋としての曲げモーメントが求められる。この値には、stiffness parameter  $(B_y/B_x)$ , torsional parameter  $\kappa = H/(B_x \cdot B_y)^{1/2}$ , skew parameter  $\varphi$  がふくまれており、従来の支点間距離をスパンとする単独桁理論によるよりも、非常に合理的になっているといえよう。

上記の計算には、昭和 37 年 3 月京都大学、神戸大学を卒業した角田誠一郎、佐々木 孝の両氏の助力を得た。ここに記して謝意を表したい。

## 参 考 文 献

- 1) 成岡・大村・船越・浅沼・福井：土木学会論文集 66 号 (昭 35.1), p. 1.
- 2) Naruoka and Ohmura : Stahlbau, 28 (1959. 9), S. 187
- 3) Naruoka and Ohmura : Publications of I.A.B.S.E., 19 (1959), p. 231.
- 4) Naruoka, Ohmura and Yamamoto : Publications of I.A.B.S.E., 21 (1961), p. 193.
- 5) 大村 裕：斜桁橋の力学的研究、昭和 35 年 (京都大学提出学位論文)
- 6) 成岡・大村・川野・古賀：純信橋 (合成、直格子斜桁橋) の研究、土木学会誌 46 卷 11 号 (昭 36. 11), p. 27.  
M. Naruoka u. H. Ohmura : Berechnung und Belastungsversuche einer schiefwinklig gelagerten Orthogonalen Trägerrostbrücke, Stahlbau, 31. 11 (1962. 11), S. 340.

(原稿受付：1962. 9. 14)