

## 薄肉部材の大きなねじれ

## TORSIONAL STIFFNESS OF THIN PLATE SECTIONS

島田 静雄\*

*By Shizuo Shimada*

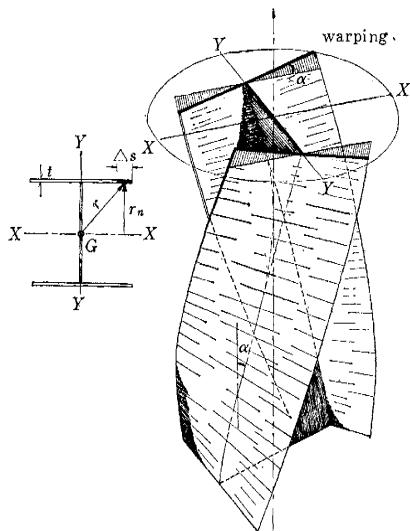
要旨 I型, II型などの開いた薄肉断面はねじれ剛性が小さいので軸回りのトルクによって大きなねじれ変形を起す。微小変形を仮定したトルクとねじれ角の関係は大きなねじれ変形には成立しない。大きなねじれ変形とトルクとの関係を理論と実験とにより解析した。実用的な範囲で取り扱うことを考えて断面計算と応力計算は薄肉部材のせん断流理論を応用した。数値計算の結果、開いた断面ではねじれ率の3乗に比例するねじれ剛度が大きく、軸応力度にもねじれ率の自乗に比例する応力度の分布も実験によって認めることができた。

## 1. ねじれを受けている薄肉部材の変形と応力

(1) そりについて

最初にまっすぐであった薄肉部材の $\alpha$ 軸(中心軸)方向の繊維は、部材全体がねじれ率 $\mu$ でねじれることにより $\alpha$ 軸回りのスパイラルを描き、このスパイラルの接線方向は $\alpha$ 軸に対して角度 $\alpha$ の傾斜を持つ。スパイラルとしての繊維のねじれ率は部材のそれに等しく、同時に曲率 $\kappa$ を持つ。 $\alpha$ が小としてスパイラルの性質より<sup>11)</sup>

— 1



ここに、 $r$  はねじり中心から薄肉断面の纖維までの動径である。

板厚  $t$  の薄肉部材のリボン状をした素片は、角度  $\alpha$ だけ傾斜するので  $z$  軸に垂直な平面にあった断面の各位置は、 $z$  軸に垂直な面から  $w$  だけのくい違い（そり）を生ずる。このそりは断面の形によって誘起させるものと、薄板の方向 ( $s$  座標) に作用しているせん断応力度  $\tau$  で生ずるせん断変形との和である<sup>2)</sup>。

$\tau$  を厳密に求めるることは垂直応力度との関連でかなりめんどうであるので、慣用のせん断流理論では開断面部材で  $\tau=0$ 、閉じた断面では一定のせん断流を仮定している。

慣用されているそり関数および曲げねじれの剛性は、したがって一種の近似解であるが実用上十分であるので本論でもこの慣用式を使用する。サンプナンのねじれとワグナーのねじれとによってつり合うトルクは<sup>2)</sup>

$$M_1^T = GK \rho - EC \frac{d^2 \rho}{dz^2} \quad \dots \dots \dots \quad (3)$$

ここで非対称断面のねじれについて重要なことが生ずる。非対称断面では断面の重心とせん断中心とが同一ではなく、また対称断面であってもねじれを作用させる軸、すなわち $\zeta$ 軸が重心と一致しないことが起こる。この場合、けたのねじれは常にそのせん断中心軸がねじれに対しても直線を保つという仮定を立てる。そり関数を決める基準平面はしたがって必ずしも $\zeta$ 軸に垂直とはならない。せん断中心と重心と一致しない断面では、ねじれによって重心軸が空間でらせんを描くからである。ねじれの中心を最初どこに仮定して $r_n$ を定めようとも、断面の合力すなわちそりによって生ずる軸応力度の合力が断面の軸方向合力や曲げモーメントを持たないという附加条件を入れれば、最終結果はせん断中心回りでそりを計算したのと同じになる。すなわち、ねじれ軸を重心に仮定して計算してもこれだけで間違いではない。また、このそりによって生ずる軸応力度の合力がトルクを誘起するという機構と、軸応力度の変化に見合ったせん断応力度が断面に生じて、このせん断応力度の合力が再びトルクを誘起する機構とは内容的に別のものである。すなわち

\* 正風 工博 東京大学講師 工学部土木工学科教室

ち前者のトルク分について本論は述べ、後者のトルク分については慣用の曲げねじれ剛性に準ずることにした。

### (2) ねじれ分による軸応力度およびその合力

スパイラルを描く纖維は、ねじれ中心より外側にあるほど大きなループを描くから纖維方向には( $\alpha^2 + \epsilon_0$ )のひずみを生じている( $\epsilon_0$ は常数)。したがって軸応力度は先のそりによって生ずるものとともに

$$\sigma = \sigma_0 + E \frac{dw}{dz} + E \alpha^2$$

この軸応力度の方向は $z$ 軸に対して $\alpha$ の傾きを持つから、つぎのトルクとつり合う。

$$\begin{aligned} M_{zT} &= \int t \sigma a r ds \\ &= \sigma_0 \rho \int tr^2 ds + E \rho \int \frac{dw}{dz} tr^2 ds + E \rho^3 \int tr^4 ds \end{aligned}$$

第1項目の積分の値は断面の極二次モーメントを与える、第3項目の積分は断面の極4次モーメントを与える積分である。第2項の積分はそりの変化率を重しとする断面の極二次モーメントであり、積分値が0となるように式(2)の積分常数を定める。 $r$ の取り方を断面の重心から考えると $M_{zT}$ が最小値を与える。

外的に軸力が作用していないければ軸応力度の $z$ 方向の総和は0とならなければならぬから

$$\int \sigma t ds = \sigma_0 A + \int E \frac{dw}{dz} t ds + E \rho^2 \int r^2 t ds = 0$$

ここに $w$ の項は積分値が0になるように定義することにより

$$\therefore \sigma_0 = \frac{(J_x + J_y)}{A} - E \rho^2$$

結局、ねじれ分によって生ずる軸応力度の増加分はねじれ率の2乗に比例し

$$\sigma = E \left( \rho^2 r^2 - \frac{J_x + J_y}{A} \right) \quad \dots \dots \dots (4)$$

この軸応力度はつぎのトルクとつり合う。

$$M_{zT} = \rho^3 ED \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$\text{ただし } D = \int r^4 t ds - \frac{(J_x + J_y)^2}{A} \quad \dots \dots \dots (6)$$

ねじれを受けていると同時に軸力 $D = \sigma_0 A$ が作用するとすれば、この能率は

$$M_{zT} = \sigma_0 \rho (J_x + J_y) = \rho P \cdot \frac{J_x + J_y}{A} \quad \dots \dots \dots (7)$$

### (3) ねじれ分による素片の曲げ

ねじれによって纖維に生じた曲げは $k = \rho^2 r_n$ であるから薄肉部材に生ずる曲げモーメントは $(4EJ)k4s$ である。このモーメントの $z$ 軸方向の成分は $\alpha(4EJ)k4s$ であるから

$$M_{zT} = \int \frac{Et^3}{12} \rho^3 rr_n ds = \rho^3 EB \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\text{ただし } B = \int \frac{t^3}{12} rr_n ds \quad \dots \dots \dots (9)$$

## 2. ねじれの基本式とその解

### (1) 基本式

ねじれの基本式は式(3),(5),(7),(8)をすべて考えてつぎのように与えられる<sup>3)</sup>。

$$MT = \left( GK + P \frac{J_x + J_y}{A} \right) \rho + (EB + ED) \rho^3 - EC \frac{d^2 \rho}{dz^2} \quad \dots \dots \dots (10)$$

式(10)の特徴は右辺の2項目である $\rho^3$ の項、および第1項目にふくまれる軸応力の項である。 $P$ は引張力を正に考えるから圧縮応力度は見かけのねじれ剛性を低下させる。この式の一般解を求めるのは大変であるので $MT = \text{const.}$ とし、長さ $l$ のけたで二、三の端部条件を与えて解く。このためには

$$\rho = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \dots \dots (11)$$

の形に仮定して式(10)に代入し、 $a_0, a_1, a_2, \dots$ を近似的に与えるのが実際的である。

### (2) 両端でそり自由の解

$z=0, z=l$ で $d\rho/dz=0$ の条件であり、式(11)の係数は $a_0$ を除いてすべて0である。すなわち $\rho = \text{const.}$

$$\left( GK + P \frac{J_x + J_y}{A} \right) \rho + (EB + ED) \rho^3 = MT \quad \dots \dots \dots (12)$$

与えられた $P$ および $MT$ に対する $\rho$ の値は3次式の解であり、それを求めるにはCardanの方法によるとよい。Cardanの解は

$$\rho^3 + 3p\rho + 2q = 0$$

の形において

$$\rho = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}}$$

$dMT/d\rho$ はねじれ剛性であるが式(12)が3次式であるから線形ではなくねじれ剛性はトルクによって変化する。その関係はもちろん断面の性質に左右される。すなわち

$$\overline{GK} = dMT/d\rho$$

は接線のねじれ剛性である。

### (3) 一端でそり自由、他端でそり固定の場合

$z=0$ で $d\rho/dz=0, z=l$ で $\rho=0$ とすると近似的に

$$\rho = a_0 \left( 1 - \frac{z^2}{l^2} \right)$$

$$\left( GK + P \frac{J_x + J_y}{A} + 2 \frac{EC}{l^2} \right) a_0$$

$$+ (EB + ED) a_0^3 = MT \quad \dots \dots \dots (13)$$

長さ $l$ のけたの全長で平均したねじれ率を $\bar{\rho}$ とすれば

$$\bar{\rho} = \frac{2}{3} a_0$$

となるから平均ねじれ率で式(13)を書き直すと

$$\frac{3}{2} \left( GK + P \frac{J_x + J_y}{A} + 2 \frac{EC}{l^2} \right) \bar{\rho}$$

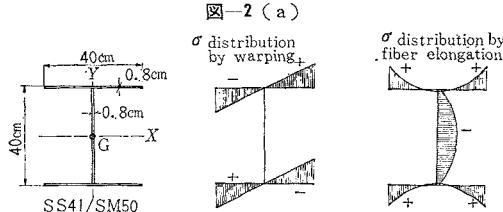
$$+ \frac{27}{8} (EB + ED) \bar{\rho}^3 = MT \quad \dots \dots \dots (13')$$

## 薄肉部材の大きなねじれ

$\bar{\rho}$  はけたの平均した単位長さのねじれ角を与え、式(12)と同様に3次式の解である。

## 3. 数値計算例

## (1) I 断面けた



この計算断面は後に述べるねじれ試験に供した鋼試験けたのそれである。

断面 2 flg. pls.  $40 \times 0.8 \text{ cm}$ , 1 web pls.  $40 \times 0.8 \text{ cm}$

断面積  $A = 96 \text{ cm}^2$

断面二次モーメント  $J_x = 3.0 \times 10^4 \text{ cm}^4$

“  $J_y = 0.9 \times 10^4 \text{ cm}^4$

断面極二次モーメント  $J_x + J_y = 3.9 \times 10^4 \text{ cm}^4$

$(J_x + J_y)/A = 4.1 \times 10^2 \text{ cm}^2$

単純ねじり極モーメント  $K = 20 \text{ cm}^4$

曲げねじり常数  $C = 3.4 \times 10^6 \text{ cm}^6$

$D = 4.8 \times 10^6 \text{ cm}^6$

$B = 1.1 \times 10^3 \text{ cm}^6$

$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $G = 0.81 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2$ ,  $l = 1.75 \text{ m}$  として,  $P=0$  の場合を求める。

$$GK = 0.81 \times 10^6 \times 20 = 1.62 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \\ = 1.62 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

$$E(B+D) = 2.1 \times 10^6 \times 4.8 \times 10^6 = 1.01 \times 10^{13} \text{ kg} \cdot \text{cm}^4 \\ = 1.01 \times 10^2 \text{ t} \cdot \text{m}^4$$

$$EC/l^2 = 2.1 \times 10^6 \times 3.4 \times 10^6 \cdot 175^2 \\ = 2.3 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 = 2.3 \times 10 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

両端自由のけたに関して式(12)

$$1.62 \rho + 1.01 \times 10^2 \rho^3 = MT$$

一端自由, 他端固定のけたに関して式(13')

$$71 \bar{\rho} + 341 \bar{\rho}^3 = MT$$

この計算結果の示すようにけたの見かけのねじれ剛性は支持条件に左右されるとともに, ねじれ率によって大きく変わることがわかる。接線のねじれ剛性は

$$\overline{GK} = \frac{dMT}{d\rho} = 1.62 + 3.03 \times 10^2 \rho^2$$

または

$$\overline{GK} = \frac{dMT}{d\bar{\rho}} = 71 + 10.23 \times 10^2 \rho^2$$

## (2) □ 断面けた

断面 2 flg. pls.  $20 \times 0.8 \text{ cm}$ , 1 web pls.  $40 \times 0.8 \text{ cm}$

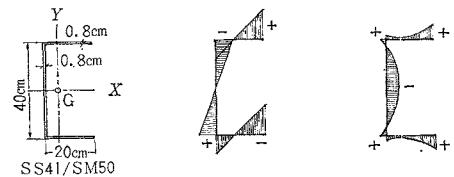
断面積  $A = 64 \text{ cm}^2$

断面二次モーメント  $J_x = 1.7 \times 10^4 \text{ cm}^4$

“  $J_y = 2.6 \times 10^3 \text{ cm}^4$

断面極二次モーメント  $J_x + J_y = 2.0 \times 10^4 \text{ cm}^4$

図-2 (b)



$$(J_x + J_y)/A = 3.1 \times 10^2 \text{ cm}^2$$

単純ねじり極モーメント  $K = 14 \text{ cm}^4$

曲げねじり定数  $C = 6.8 \times 10^6 \text{ cm}^6$

$D = 2.6 \times 10^6 \text{ cm}^6$

$B = 1.1 \times 10^3 \text{ cm}^6$

$$GK = 0.81 \times 10^6 \times 14 = 1.13 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \\ = 1.13 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

$$E(B+D) = 2.1 \times 10^6 \times 2.6 \times 10^6 = 5.5 \times 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{cm}^4 \\ = 5.5 \times 10 \text{ t} \cdot \text{m}^4$$

$$EC/l^2 = 2.1 \times 10^6 \times 6.8 \times 10^6 / 175^2 \\ = 4.65 \times 10^8 \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 = 4.65 \times 10 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

両端自由のけたに対して式(12)より

$$1.13 \rho + 55 \rho^3 = MT$$

一端自由, 他端固定の  $1.75 \text{ m}$  のけたについて式(13')より

$$141 \bar{\rho} + 186 \bar{\rho}^3 = MT$$

## (3) □型長方形閉断面

二重対称の閉断面箱けたは曲げねじりの影響がほとんどない。

断面 2 flg. pls.  $20 \times 0.8 \text{ cm}$ , 2 web pls.  $40 \times 0.8 \text{ cm}$

断面積  $A = 96 \text{ cm}^2$

断面二次モーメント  $J_x = 2.13 \times 10^4 \text{ cm}^4$

“  $J_y = 0.75 \times 10^4 \text{ cm}^4$

$J_x + J_y = 2.88 \times 10^4 \text{ cm}^4$

$(J_x + J_y)/A = 3 \times 10^2 \text{ cm}^2$

$K = 1.67 \times 10^4 \text{ cm}^4$

$D = 1.8 \times 10^6 \text{ cm}^6$

$B = 10^3 \text{ cm}^6$

$$GK = 0.81 \times 10^6 \times 1.67 \times 10^4 = 1.35 \times 10^{10} \text{ kg} \cdot \text{cm}^2 \\ = 1.35 \times 10^3 \text{ t} \cdot \text{m}^2$$

$$ED = 2.1 \times 10^6 \times 1.8 \times 10^6 = 3.8 \times 10^{12} \text{ kg} \cdot \text{cm}^4 \\ = 38 \text{ t} \cdot \text{m}^4$$

$$EB = 2.1 \times 10^6 \times 10^3 = 2.1 \times 10^9 \text{ kg} \cdot \text{cm}^4$$

$$= 2.1 \times 10^{-2} \text{ t} \cdot \text{m}^4$$

曲げねじれの影響がないので式(12)より

$$1.35 \times 10^3 \rho + 38 \rho^3 = MT$$

この長方形断面は SS 41 鋼種の試験けたでは  $MT = 16 \cdot \text{m}$  で破壊するので  $\rho$  は最大  $10^{-2}$  の程度であるから実際にはねじれ率の 3 乗の項は無視できることがわかる。

## 4. ねじれ試験および結果の検討

## (1) 実験の概要

試験けたは計算例に示したような断面で、長さ 1.75 m のものである。両端部にはダイヤフラムを溶接し、このダイヤフラムを他方は固定フレームに、片方は回転フレームにボルトで締め、回転フレームの張出しアームの先端にオイル ジャッキで荷重を加えて試験けたに純トルクが働くように設計した。固定および回転フレームは東大工学部大型構造物試験室の試験台上に組立てた。この試験台は 1m 厚のスラブに 1m 間隔の格子状に引張りボルト穴が設けてあるのでフレームの取付けおよび組立ては容易であり、ジャッキの反力を取れる。

測定は回転フレームの回転を一対のダイヤルゲージで読み取り、試験けたには抵抗線ひずみゲージを使用した。なお応力と変形の状態を眼で観察できるようにひずみ塗料を試みてみたが、乾燥不十分で失敗した。

この実験装置を使用して種々の断面のけた、たとえばパイプ、正方形箱型なども試みたが、本論文では特に大きなねじれを受ける I 型と L 型の断面について報告し、その他の場合はおって発表する予定である。

試験けたの材質は同種の断面につき、SS 41 および SM 50 を各 1 本ずつ試みた。

## (2) ねじれによって生ずる応力度

薄肉の各部材に生ずる応力度は式 (10) に示した各断面の諸常数に対応した応力がある。

a) サンブナンのねじれによる応力度 単純なサンブナンのねじれによる応力度は薄板の表面に

$$\tau = G \rho t \quad \dots \dots \dots (14)$$

のせん断応力度を生ずる。薄板表面にはったロゼットゲージの測定は、けた軸線に対して明瞭に 45° 方向の主応力を示し、実測したねじれ率  $\rho$  を代入したせん断応力度とよい一致を与える。ちなみに  $\tau = 1300 \text{ kg/cm}^2$  の応力度を与えるときのねじれ率  $\rho$  を式 (14) で求める

写真-1

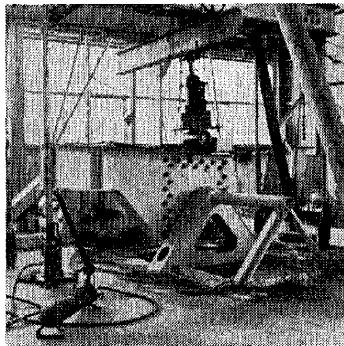
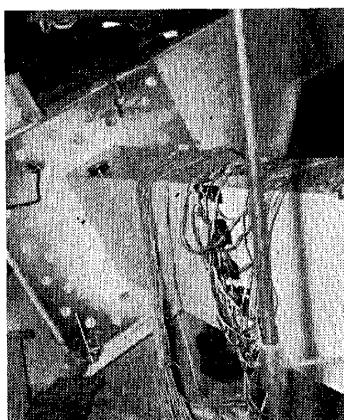


写真-2



厚 8 mm に対して

$$\rho = 1300 / 0.81 \times 10^6 \times 0.8 = 2 \times 10^{-3} \text{ radian/cm}$$

$$= 0.2 \text{ radian/m}$$

この角度のねじれ率は長さ 1.75 m の試験けたでは 20° のねじれ角になる。

b) ねじれ分による軸応力度 軸方向の応力度にはワグナーの曲げねじれによるものとねじれ率の 2 乗に比例する繊維の伸びで生ずるものがある。

図-3

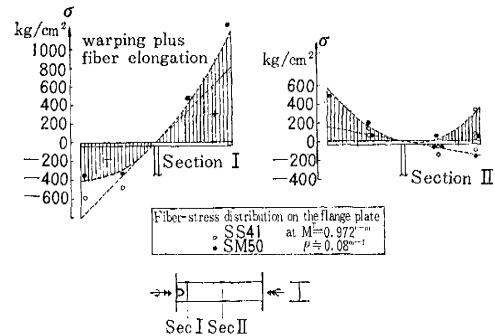
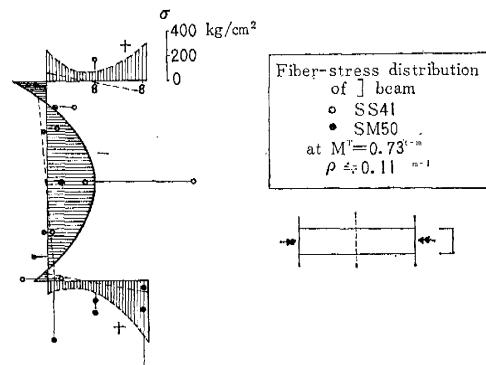


図-4



この 2 種の応力度の分布は性質が明瞭に異なり、ワグナーのそりに相当するものは軸応力度が曲げ応力の分布のように直線的になり、後者は放物線の分布をする。測定結果はこの傾向をよく示し、けた端部で拘束の大きい箇所でと、けた中央部とで測定した結果をよく説明することができる。

ちなみに数値例を示せば、I けたのフランジ端部で、 $\rho=0.1 \text{ radian/m}$  に対して

$$\sigma = E(r^2 - r_0^2)\rho^2 = 826 \text{ kg/cm}^2$$

L 型断面の偶角部では同じく  $\rho=0.1$  に対して

$$\sigma = 240 \text{ kg/cm}^2$$

を得る。これらの値は実測値の性質をかなりよく与えていた。一方、けた端部においてそりの拘束による軸応力度はけた端の条件が不明確であるので計算の比較ができないが、仮りに通常のねじれ理論で両端固定と考えるとそりによる軸応力度は  $M\tau=1 \text{ t} \cdot \text{m}$  に対して I けたでは

$\sigma=12 \text{ kg/cm}^2$ , I けたでは  $\sigma=32 \text{ kg/cm}^2$  程度であって小さすぎる。けた端部のそりによる軸応力度は I けたでいちじるしく大きいのであるが、これは試験けたの端部条件に大きく影響しているものと考えられる。試験けたの境界条件が不明確であるのは実験を始めてさとり、今回の実験はその意味で失敗したが今後の試験けたの設計によい教訓を与えてくれた。

### (3) 見かけのねじれ剛性と耐荷トルク

計算例に見るとおり開断面けたのねじり剛度は支持条件によっていちじるしく変化することがわかるし、またねじれ角によっても変化することがわかる。試験けたは 1.75 m でその両端にダイヤ フラムを接続してあるが、この程度の端部条件はそりの拘束に不十分であり、トルク試験ではかなりの凹凸を生じてしまった。したがって弾性固定の状態を理論的に求めようがなく、実験値と比較のしようがなかったのは残念であった。

図-5

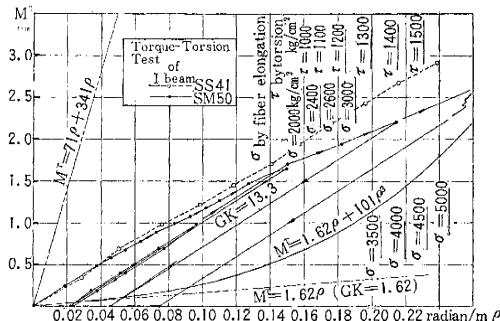
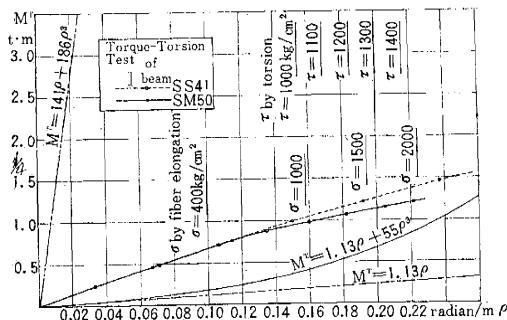


図-6



とにかく、実測の結果は、見かけのねじれ剛性がサンプルの計算値の 5~8 倍大きい値を示し、SS 材よりも SM 材のけたのほうが剛度が大きい。

開断面けたの耐荷トルクは、鋼材の応力度が降伏点に達したときを考えるのが妥当である。引張応力度の降伏

点は SS 41 で  $\sigma_V=2700 \sim 2800 \text{ kg/cm}^2$ , SM 50 では  $\sigma_V=4000 \text{ kg/cm}^2$  であることが 1 号試験片の引張試験で確かめられていた。

式(14)で示されるせん断応力度が降伏点になる  $\rho$  を逆算すると、SS 41 で  $\tau_V=1300 \text{ kg/cm}^2$  とすれば  $\rho=0.2 \text{ radian/m}$ , SM 50 の  $\tau_V=1900 \text{ kg/cm}^2$  では  $\rho=0.29 \text{ radian/m}$  が得られ、すでに相当の変形量であることがわかる。

繊維方向の軸応力度が降伏点に達するときのねじれ率を逆算すると I けたでは  $\rho=0.177(\text{SS})$ ,  $\rho=0.214(\text{SM})$ , けたでは  $\rho=0.255(\text{SS})$ ,  $\rho=0.308(\text{SM})$  となる。ただし  $\sigma_V=2600(\text{SS})$ ,  $\sigma_V=3800(\text{SM})$  として計算した。

ちょうど、いずれかの応力度が降伏点に達したときの換算剛性を  $dMT/d\rho$  の形で求めると式(12)を用いて

$$\text{I けた SS } GK = 11.1 \text{ t} \cdot \text{m}^2 \quad (12.3 \text{ t} \cdot \text{m}^2)$$

$$\text{SM } GK = 15.5 \text{ t} \cdot \text{m}^2 \quad (13.3 \text{ t} \cdot \text{m}^2)$$

$$\text{けた SS } GK = 7.7 \text{ t} \cdot \text{m}^2 \quad (6.46 \text{ t} \cdot \text{m}^2)$$

$$\text{SM } GK = 15.0 \text{ t} \cdot \text{m}^2 \quad (6.91 \text{ t} \cdot \text{m}^2)$$

カッコ内は測定値である。この計算値は実験値と非常によく近似を与えている。ねじれによる破壊は主としてせん断破壊であるからねじれ剛性はこれ以上の増加は期待し得ないであろう。また耐荷トルクも、ねじれ変形がいちじるしく大きいので適当な変位角で判定することになる。ねじれ角とトルクとの関係は図-5, 6 に示したが、参考のために式(12), (13) の理論値を示してある。曲線の形がまったく異なるが、これは境界条件が不明確であることにも原因があるし、曲げねじれの影響をより正確に与えなかることにもよるであろう。

### 後記

このねじれ試験は 35 年度および 36 年度の 2 回にわって首都高速道路公团より奥村教授の許に依託された曲線橋の実験およびねじり試験の結果の一部である。実験は多種をきわめ、また種々の問題をはらんでいるので本論文はその中の開断面けたのねじれに関してのみをまとめた。本ねじれ試験は特に 37 年度卒業実験として野村和正および福田悦久の両君が実験を担当した。

### 参考文献

- 島田静雄：弹性針金の変形と応力、土木学会論文集 72 号 (3-1), 昭 36 年
- 倉西正嗣：弹性学、機械学会
- Timoshenko : 材料力学、下巻 邦文 p. 204, コロナ
- Roark, J. : Formulas for stress and strain, p. 185
- Green, A.E. : The equilibrium and elastic stability of a thin twisted strip, Proc. Royal Soc. London, Vol. 154, 1936, p. 430

(原稿受付：1962.9.4)