

# 曲線並列桁橋の実用計算式

## PRACTICAL FORMULAS FOR THE CURVED BRIDGE WITH MULTIPLE PLATE GIRDERS

小松 定夫\*  
By Sadao Komatsu

### 1. 緒言

著者らは先に薄肉断面を有する曲線桁橋の基礎理論について論じ、つぎの事項を明らかにした<sup>1)</sup>。

(a) 曲線桁あるいは曲線桁橋の曲げこわさ、ねじりこわさ、曲げねじりこわさ、中立軸ならびにせん断中心の位置、そり関数、ねじり関数などの断面諸量にはすべて桁軸線の曲率の影響がふくまれる。

(b) 曲線桁橋では横断面における垂直応力およびせん断応力の分布が、それと同じ断面力を受け、同じ断面形状寸法を有する直線桁橋の場合とかなり異なった状態になる。一般に幅員対曲率半径の比が増大するほど、両者の差が大きく現われる。

(c) たわみ、ねじり角、曲げの曲率などの変形量の間に存在する幾何学的関係を明らかにした。

つぎに、曲線桁橋に鉛直荷重が作用した場合、曲率のために通常、曲げとねじりが連成する。文献<sup>2), 3)</sup>では、立体的解析によって、このような連成の状態について橋断面に生ずる断面力および変形量を与える公式を導いた。

以上を総合して曲線桁橋の理論と合理的計算法が与えられたことになる。そして、その計算順序はつぎのようである。

(a) 曲率を考慮した断面諸量の計算；文献<sup>1)</sup>

(b) 設計荷重に対し、曲線桁橋としての断面力、反力および変形量を計算する；文献<sup>2), 3)</sup>

(c) 曲率を考慮した応力公式を用いて、(b) 項で決定された断面力に対し、断面内の最大応力を算定する；文献<sup>1), 2), 3)</sup>

本文においては、すべての主桁が共通の曲率中心のまわりに同心円上に並列して配置されているような、いわゆる曲線並列桁橋について考察する。そして、この種形式の曲線橋に関しては、上記の計算過程(a), (c) が比較的簡単な近似計算式によって進めうることを示そう。本文で提案される実用計算式は、文献<sup>1)</sup>で述べられた基礎理論を曲線並列桁橋の場合に対して具体化し、実用的な形にまとめたものにはかならない。したがって本計算式によって橋断面に関する基礎量( $I$ ,  $J$ ,  $C_w$ ,  $\tilde{q}$ など)を決定し、これらの値を用いて、計算過程(b), (c)を実行

できる。

本文では並列する個々の主桁がいずれも対称形かそれに近いような断面形状を持ち、そのうえ主桁自身の幅が曲率半径に比して小さいI桁とか一箱桁を持つ場合について述べる。実際に設計される曲線桁橋ではほとんどそのような主桁構造なので、問題をこのように限定しても本計算法の有用性が、局限されることにはならないと思う。特に説明がない記号は文献<sup>1)~3)</sup>を参照されたい。

本法の特長は、ぼう大な級数計算や行列計算あるいはくり返し漸近計算などを行なうことなく、直接解から主桁および横桁の応力、変形量を求めうる精度のよい実用計算法であるという点にある。

### 2. 曲線桁橋の曲げねじり

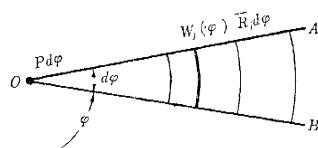
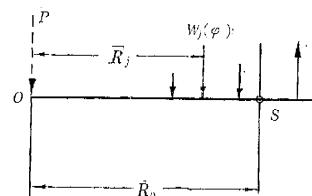
通常、鉛直荷重のもとでは、一般に曲げとねじりが同時に生じ、互いに関連性を持つことは曲線桁橋のいちじるしい性質である。ところが特定の荷重分布状態にかぎり、曲げを生じないで曲げねじりのみを生ずることがありうる。まず、そのような場合について考える。

さて図-1に示すように第 $j$ 主桁上に桁軸方向単位中心角あたり  $W_j(\varphi)$  なる線荷重が半径  $\bar{R}_j$  の円周に沿って作用するものとする。このとき、微小中心角  $d\varphi$  をはさむ隣接2断面  $OA$ ,  $OB$  でかこまれる領域内に作用するすべての鉛直荷重の合力  $Pd\varphi$  は次式で与えられる。

$$Pd\varphi = \sum_j W_j \bar{R}_j d\varphi \quad \dots \dots \dots \quad (a)$$

図-1 曲げねじりにおける荷重状態

Fig. 1 Loading Condition for Torsion Bending.



\* 正員 工博 大阪市立大学助教授 工学部土木工学教室

ここに  $\sum_j$  はすべての主桁  $j$  について総和することを意味する。

また全橋断面のせん断中心  $S$  のまわりの全荷重によるモーメントの和  $M_S$  はつぎのようである。

$$M_S = \sum_j W_j \bar{R}_j (R_0 - \bar{R}_j) d\varphi$$

ここに  $R_0$  は曲率中心  $O$  とせん断中心  $S$  の水平距離式(a)を上式に用いると、

$$M_S = P d\varphi \cdot R_0 - \sum_j W_j \bar{R}_j^2 d\varphi \quad \dots \dots \dots (1)$$

一般に、任意の鉛直分布荷重  $p(\rho, \varphi)$  と水平分布荷重  $p_h(\varphi)$  を受ける曲線桁橋の橋断面曲げモーメント  $M_y$  はつぎの微分方程式にしたがう<sup>4)</sup>。

$$\frac{d^2 M_y}{d\varphi^2} + M_y = p_h z_h - \int_{\bar{R}_i}^{\bar{R}_a} p(\rho, \varphi) \rho^2 d\rho \quad \dots \dots \dots (b)$$

ここに  $z_h$  は橋断面図心と水平分布荷重  $p_h$  の距離一方、水平荷重とそれによって横断面に生ずる軸力  $N$  との関係はつぎのようである<sup>5)</sup>。

$$\frac{d^2 N}{d\varphi^2} + N = p_h \quad \dots \dots \dots (c)$$

式(b)と(c)より、

$$\frac{d^2 M_{\bar{y}}}{d\varphi^2} + M_{\bar{y}} = z_h \left( \frac{d^2 N}{d\varphi^2} + N \right) - \int_{\bar{R}_i}^{\bar{R}_a} p(\rho, \varphi) \rho^2 d\rho \quad \dots \dots \dots (2)$$

方程式(2)は個々の主桁についても適用される。これを第  $j$  主桁に適用すれば、つぎのようである。

$$\frac{d^2 M_{\bar{y}j}}{d\varphi^2} + M_{\bar{y}j} = z_{hj} \left( \frac{d^2 N_j}{d\varphi^2} + N_j \right) - \sum_j W_j \bar{R}_j^2 \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここに添字  $j$  は第  $j$  主桁に関する量なることを示す。

そこで全主桁について式(3)をそれぞれ加え合わせると、

$$\sum_j \left( \frac{d^2 M_{\bar{y}j}}{d\varphi^2} + M_{\bar{y}j} \right) = \sum_j z_{hj} \left( \frac{d^2 N_j}{d\varphi^2} + N_j \right) - \sum_j W_j \bar{R}_j^2 \quad \dots \dots \dots (3)'$$

さらに各主桁に作用する水平荷重  $p_{hj}$  が横繋材を通じて互いにつり合っているので、

$$\sum_j p_{hj} \bar{z}_j = 0 \quad \dots \dots \dots (d)$$

ここに  $\bar{z}_j$  は水平荷重  $p_{hj}$  と全橋断面の図心  $O_n$  の鉛直距離

そして、

$$\bar{z}_j = z_{hj} + z_{0j} \quad \dots \dots \dots (e)$$

ここに  $z_{0j}$  は第  $j$  主桁図心  $O_j$  と全橋断面図心  $O_n$  の鉛直距離

式(c), (d)および(e)より、

$$\sum_j z_{hj} \left( \frac{d^2 N_j}{d\varphi^2} + N_j \right) = - \sum_j z_{0j} \left( \frac{d^2 N_j}{d\varphi^2} + N_j \right)$$

上式を方程式(3)'に用いて、 $\sum_j (M_{\bar{y}j} + z_{0j} N_j) = M_y$

に注目すれば、次式が成立することを知る。

$$\frac{d^2 M_y}{d\varphi^2} + M_y = - \sum_j W_j \bar{R}_j^2 \quad \dots \dots \dots (4)$$

そこで、全橋断面に曲げを生じない場合には、 $M_y = 0$  であるから方程式(4)の左辺は消滅して結局、

$$\sum_j W_j \bar{R}_j^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (5)$$

また式(5)を式(1)に代入すれば、

$$M_S = P d\varphi \cdot R_0$$

この結果は鉛直荷重  $W_j$  の合力  $P$  が山率中心を通ることを意味する。換言すれば、鉛直荷重の合力が曲率中心を通るように、荷重が横断面方向に配置される場合には、ねじりのみを生じて曲げを生じないわけである。これは直線桁にトルク荷重のみが作用する場合に曲げを生じないでねじれるという事実に対応する。

### 3. 曲線並列桁橋断面の図心

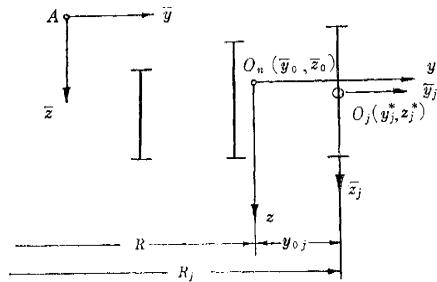
一般に曲線桁橋断面の図心の位置は定義によってつぎのように決めることができる<sup>6)</sup>。すなわち図心  $O_n$  を原点とする直角座標  $(y, z)$  によって断面内の点を表わせば、次式が成立する。

$$G_y = G_z = 0 \quad \dots \dots \dots (6)$$

いま、図-2に示すように橋断面内に適当に選んだ点  $A$  を原点として、曲率半径方向に  $\bar{y}$  軸、鉛直下方に  $\bar{z}$  軸をとる。

図-2 並列桁橋断面の図心

Fig. 2 Centroid of Transverse Section of Parallel-Girder Bridge.



そうすると図心  $O_n$  の  $(\bar{y}, \bar{z})$  座標を  $(\bar{y}_0, \bar{z}_0)$  とすると、この  $\bar{y}_0, \bar{z}_0$  の値を知れば、図心  $O_n$  の位置が確定する。

ところで2つの直角座標系  $(y, z)$  と  $(\bar{y}, \bar{z})$  の関係は、

$$y = \bar{y} - \bar{y}_0, z = \bar{z} - \bar{z}_0$$

これを式(6)に用いて、

$$\int_F \frac{\bar{y} - \bar{y}_0}{n \rho} t ds = 0 \quad \dots \dots \dots (6)_1'$$

$$\int_F \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{n \rho} t ds = 0 \quad \dots \dots \dots (6)_2'$$

そこで、第  $j$  主桁の図心  $O_j$  の  $(\bar{y}, \bar{z})$  座標を  $(y_{j*}, z_{j*})$  とし、 $O_j$  を原点として、 $(\bar{y}, \bar{z})$  に平行な座標を  $(\bar{y}_j, \bar{z}_j)$  とすと、第  $j$  主桁断面内任意点の座標系間の関係は、

$$\bar{y}_j = \bar{y} - y_{j*}, \bar{z}_j = \bar{z} - z_{j*} \quad \dots \dots \dots (7)$$

式(6)<sub>1</sub>'に(7)<sub>1</sub>を代入して、各主桁ごとの積分の和として求めると、

$$\bar{y}_0 = \frac{\sum_j \left( \int_{F_j} \frac{\bar{y}_{jt}}{n\rho} ds + y_{j*} \int_{F_j} \frac{t}{n\rho} ds \right)}{\sum_j \int_{F_j} \frac{t}{n\rho} ds} \quad \dots \dots \dots (8)$$

ところが第  $j$  主桁断面の図心  $O_j$  の定義から、

$$\int_{F_j} \frac{\bar{y}_{jt}}{n\rho} ds = 0$$

そして、

$$\int_{F_j} \frac{t}{n\rho} ds = \frac{F_{sj}}{R_j} \quad \dots \dots \dots (9)$$

が成り立つことが知られている<sup>7)</sup>。

ここに  $F_{sj}$  は第  $j$  主桁の鋼換算断面積、  $R_j$  は第  $j$  主桁図心軸のなす円の曲率半径

式(9)を式(8)に代入して、全橋断面の図心  $O_n$  の座標  $\bar{y}_0$  を次式で与えよう。

$$\bar{y}_0 = \frac{\sum_j \frac{F_{sj}}{R_j} y_{j*}}{\sum_j \frac{F_{sj}}{R_j}} \quad \dots \dots \dots (10)_1$$

全く同じようにして、式(6)<sub>2</sub>'に式(7)<sub>2</sub>を代入すれば、

$$\bar{z}_0 = \frac{\sum_j \frac{F_{sj}}{R_j} z_{j*}}{\sum_j \frac{F_{sj}}{R_j}} \quad \dots \dots \dots (10)_2$$

公式(10)にふくまれる座標  $(y_{j*}, z_{j*})$  および  $R_j$  は個々の主桁の図心に関する値である。それで各主桁断面の  $y$  方向の拡がりが曲率半径に比して小さい場合には各主桁断面の図心としては、同じ断面を持つ直線桁断面の図心を用いても誤差は少ないとと思われる。

#### 4. 2 次の断面モーメント

一般の曲線桁橋断面の2次の断面モーメントは定義によって次式で与えられる<sup>8)</sup>。

$$\begin{aligned} I_y &= R \int_F \frac{z^2}{n\rho} t ds, \quad I_z = R \int_F \frac{y^2}{n\rho} t ds \\ I_{yz} &= R \int_F \frac{yz}{n\rho} t ds \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (11)$$

いま、第  $j$  主桁図心  $O_j$  の  $(y, z)$  座標を  $(y_{0j}, z_{0j})$  とすれば、

$$y = y_{0j} + \bar{y}_j, \quad z = z_{0j} + \bar{z}_j$$

この関係を式(11)に用いて、各主桁ごとに積分すれば、

$$\begin{aligned} I_y &= \sum_j R \\ &\times \left\{ z_{0j}^2 \int_{F_j} \frac{t}{n\rho} ds + 2z_{0j} \int_{F_j} \frac{\bar{z}_j}{n\rho} t ds + \int_{F_j} \frac{\bar{z}_j^2}{n\rho} t ds \right\} \end{aligned}$$

第2項は第  $j$  主桁断面に関する図心の定義により消滅する。また第3項は第  $j$  主桁自身の断面2次モーメント  $I_{\bar{y}j}$  にはかならない。したがって定義式(11)<sub>1</sub>と式(9)を用いて、

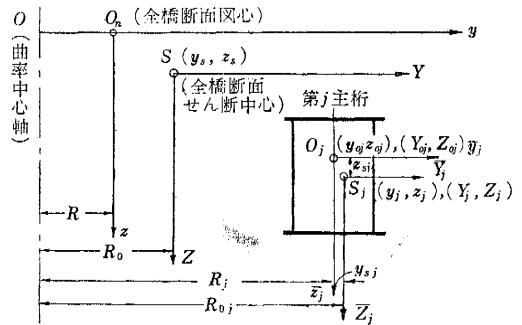
$$\left. \begin{aligned} I_y &= \sum_j \frac{R}{R_j} (F_{sj} z_{0j}^2 + I_{\bar{y}j}) \\ I_z &= \sum_j \frac{R}{R_j} (F_{sj} y_{0j}^2 + I_{\bar{z}j}) \\ I_{yz} &= \sum_j \frac{R}{R_j} (F_{sj} y_{0j} z_{0j} + I_{\bar{y}\bar{z}j}) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (12)$$

ここに  $I_{\bar{y}j}$ ,  $I_{\bar{z}j}$  および  $I_{\bar{y}\bar{z}j}$  はそれぞれ第  $j$  主桁断面自身の断面2次モーメントおよび断面相乗モーメントである。いずれも主桁断面の  $y$  方向の拡がりが、曲率半径  $R_j$  に比し小さい通常の場合には、  $I_{\bar{y}j}$ ,  $I_{\bar{z}j}$  としては同じ断面をもつ直線桁の断面2次モーメントを用いても誤差は小さい。また主桁断面が対称形か、それに近い通常の場合には、  $I_{\bar{y}\bar{z}j}$  の項を無視できる。

#### 5. せん断中心

主桁並列形式の曲線桁橋断面について、せん断中心  $S$  の位置を求める。まず 3. で確定した全橋断面の図心  $O_n$  を原点として曲率半径方向に  $y$  軸、鉛直下方に  $z$  軸をとる。つぎに  $S$  を原点とし  $(y, z)$  座標に平行な直角座標を  $(Y, Z)$  とする。橋断面内の任意点は、これらの座標系を用いて、 $(y, z)$  あるいは  $(Y, Z)$  として表わせる。そこで、せん断中心  $S$  の  $(y, z)$  座標を  $(y_s, z_s)$  とし、また第  $j$  主桁せん断中心  $S_j$  の  $(y, z)$  座標を  $(y_j, z_j)$  とし、同じ点の  $(Y, Z)$  座標を  $(Y_j, Z_j)$  とする。さらに、第  $j$  主桁の図心  $O_j$  の  $(Y, Z)$  座標を  $(Y_{0j}, Z_{0j})$ ,  $(y, z)$  座標を  $(y_{0j}, z_{0j})$  とする。そこで  $R_0, z_s$  の値を他の既知量で与えることができればせん断中心の位置が定まる。

図-3 座標系  
Fig. 3 Coordinante Systems.



#### (1) $z_s$ の公式

一般の外力を受ける曲線桁橋断面内の任意点における  $y$  方向変位  $u$  は、4つの基本的変形状態の重ね合わせによって次式で与えられる<sup>9)</sup>。

$$\begin{aligned} u &= - \int_0^\varphi R \sin(\varphi - \varphi') \frac{d\phi}{d\varphi'} d\varphi' + \int_0^\varphi z \sin(\varphi - \varphi') \frac{dr}{d\varphi'} d\varphi' \\ &+ \int_0^\varphi R \sin(\varphi - \varphi') \frac{dz}{d\varphi'} d\varphi' + \int_0^\varphi Z \cos(\varphi - \varphi') \frac{d\theta}{d\varphi'} d\varphi' \end{aligned}$$

右辺、第1項は曲率面内の曲げ、第2項は面外曲げ、第3項は単純引張、第4項はねじりによるものである。上式より次式が成立することは容易にわかる。

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = R \left( \frac{d\psi}{d\varphi} - \frac{d\phi}{d\varphi} \right) + z \frac{d\tau}{d\varphi} + Z \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \quad \dots(13)$$

一方、橋断面内任意点の垂直応力  $\sigma$  も 4 つの基本的変形状態に対応するものの和として与えられる<sup>10)</sup>。

$$\sigma = \frac{E_s}{n} \left( \frac{R}{\rho} \frac{d\psi}{d\varphi} + \frac{y}{\rho} \frac{d\phi}{d\varphi} + \frac{z}{\rho} \frac{d\tau}{d\varphi} + \frac{W_s}{R^2} \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \right) \quad \dots(14)$$

つぎに断面力と応力との関係より、

$$\begin{aligned} N &= \int \sigma dF = E_s F_s \frac{d\psi}{d\varphi} \\ M_y &= \int \sigma z dF = \frac{E_s}{R} \left( I_{yz} \frac{d\phi}{d\varphi} + I_y \frac{d\tau}{d\varphi} \right) \\ M_z &= \int \sigma y dF = \frac{E_s}{R} \left( I_z \frac{d\phi}{d\varphi} + I_{yz} \frac{d\tau}{d\varphi} \right) \end{aligned}$$

したがって変形量は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{d\varphi} &= \frac{N}{E_s F_s}, \quad \frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{R}{E_s} \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \\ \frac{d\tau}{d\varphi} &= \frac{R}{E_s} \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \end{aligned} \right\} \quad \dots(15)$$

式(15)を式(13)に用いて、

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u &= \frac{R}{E_s} \\ &\times \left( \frac{N}{F_s} - R \left( \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} + z \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \right) \right. \\ &\left. + Z \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \right) \quad \dots(16) \end{aligned}$$

引張と曲げをともなわないねじりにおいては、 $N=M_y=M_z=0$  で、せん断中心  $S$  では、 $Z=0$  だから式(16)の右辺は全部消滅する。

$$\therefore \frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0$$

ところが桁橋においては、両支点でねじりに固定の状態で  $u=0$  であるから、結局  $u \equiv 0$  となる。

この結果は、ねじりにおいてせん断中心  $S$  には水平変位は橋長にわたり生じないことを意味する。すなわち、せん断中心はねじりの中心であることを示す。

さて、第  $j$  主桁の図心  $O_j$  の変位  $u_j$  について式(16)を適用すれば、 $z=0$  に相当する。また第  $j$  主桁のせん断中心  $S_j$  と図心  $O_j$  の鉛直距離を  $z_{sj}$  とすると、 $Z=-z_{sj}$  に相当する。したがって

$$\frac{d^2u_j}{d\varphi^2} + u_j = \frac{R_j N_j}{E_s F_{sj}} - \frac{R_j^2 M_{\bar{z}j}}{E_s I_{\bar{z}j}} - z_{sj} \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \quad \dots(a)$$

全橋断面を問題にして、曲げねじりの状態にあるとき、 $N=M_y=M_z=0$  である。そして第  $j$  主桁断面の図心  $O_j$  の水平変位  $u_j$  は式(16)において、 $Z=z_{sj}$  とおけば与えられる。

$$\frac{d^2u_j}{d\varphi^2} + u_j = Z_{sj} \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \quad \dots(b)$$

式(a)と式(b)とを相等しいとおくと、

$$Z_{sj} \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} = \frac{R_j N_j}{E_s F_{sj}} - \frac{R_j^2 M_{\bar{z}j}}{E_s I_{\bar{z}j}} - z_{sj} \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} \quad \dots(c)$$

ところが  $Z_{sj}+z_{sj}=Z_j$  であるから式(c)はつぎのよう

になる。

$$Z_j \frac{d^2\theta}{d\varphi^2} = \frac{R_j N_j}{E_s F_{sj}} - \frac{R_j^2 M_{\bar{z}j}}{E_s I_{\bar{z}j}} \quad \dots(17)$$

一般に任意の曲線桁について次式が成立する<sup>11)</sup>。

$$\frac{dM_z}{d\varphi} = -R \frac{dN}{d\varphi} \quad \dots(18)$$

式(18)を第  $j$  主桁に適用すれば、非合成断面では、

$$\frac{dM_{\bar{z}j}}{d\varphi} = -R_j \frac{dN_j}{d\varphi} \quad \dots(d)$$

式(17)と式(d)とから、

$$\frac{dN_j}{d\varphi} = E_s \frac{d^3\theta}{d\varphi^3} \frac{Z_j}{\frac{R_j}{F_{sj}} + \frac{I_{\bar{z}j}}{R_j^3}} \quad \dots(19)$$

すべての主桁について総知すれば、

$$\frac{dN}{d\varphi} = E_s \frac{d^3\theta}{d\varphi^3} \frac{\sum_j \frac{Z_j}{\frac{R_j}{F_{sj}} + \frac{I_{\bar{z}j}}{R_j^3}}}{\sum_j \frac{R_j}{F_{sj}} + \frac{I_{\bar{z}j}}{R_j^3}}$$

曲げねじりにおいては  $N \equiv 0$ 、したがって  $dN/d\varphi = 0$ 、かつ  $d^3\theta/d\varphi^3 \neq 0$  だから、

$$\sum_j \frac{Z_j}{\frac{R_j}{F_{sj}} + \frac{I_{\bar{z}j}}{R_j^3}} = 0 \quad \dots(20)$$

ところが座標系間の関係より、

$$Z_j = z_j - z_s$$

これを条件式(20)に代入して、非合成並列桁橋では、

$$z_s = -\frac{\sum_j \frac{I_{\bar{z}j} z_j}{\kappa_j R_j^3}}{\sum_j \frac{I_{\bar{z}j}}{\kappa_j R_j^3}} \quad \dots(21)$$

ここに、

$$\kappa_j = 1 + \frac{I_{\bar{z}j}}{F_{sj} R_j^2} \quad \dots(22)$$

並列 I 桁橋の場合には  $\kappa_j = 1$  とおける。したがって、

$$z_s = -\frac{\sum_j \frac{I_{\bar{z}j} z_j}{R_j^3}}{\sum_j \frac{I_{\bar{z}j}}{R_j^3}} \quad \dots(22)'$$

特に非合成直線桁橋の場合には、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_s = -\frac{\sum_j I_{\bar{z}j} z_j}{\sum_j I_{\bar{z}j}} \quad \dots(22)''$$

## (2) $R_0$ の公式

一般にせん断中心  $S$  の鉛直変位  $\delta$  と  $S$  のまわりのねじり角  $\theta$  の関係は次式で与えられる<sup>12)</sup>。

$$\frac{d^2\delta}{d\varphi^2} + \delta = R_0 \theta - \frac{R_0 R}{E_s} \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad \dots(23)$$

上式に式(15)を代入して、

$$\frac{d^2\delta}{d\varphi^2} + \delta = R_0 \theta - \frac{R_0 R}{E_s} \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad \dots(23)$$

上式を第  $j$  主桁に適用すれば、

$$\frac{d^2\delta_j}{d\varphi^2} + \delta_j = R_{0j} \theta - \frac{R_{0j} R_j}{E_s I_{\bar{z}j}} M_{\bar{z}j} \quad \dots(e)$$

さて図-4 に示すように変形量間にはつぎのような幾





表-1  $\frac{d^2\theta}{d\varphi^2} + \theta$ 

荷重	$d^2\theta/d\varphi^2 + \theta$
(1)	$\frac{R\rho_o}{G_s J} \left( L_2 \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2} - L_1 \right) \left( \frac{\sinh \alpha\varphi + \sinh \alpha\varphi'}{\sinh \alpha\varphi} - 1 \right) + \frac{L_2}{2} \varphi\varphi' \right\}$
(2)	$\frac{RW}{G_s J} \left( \left( \bar{R}R_o \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2} - \bar{R}^2 \right) \left( \frac{\sinh \alpha\varphi + \sinh \alpha\varphi'}{\sinh \alpha\varphi} - 1 \right) + \frac{\bar{R}R_o}{2} \varphi\varphi' \right\}$
(3)	$\frac{RW}{G_s J R_o} \left( \left( L_2 - L_3 \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha\varphi'}{\sinh \alpha\varphi} \sinh \alpha\varphi + L_3 \frac{\psi'}{\varphi} \varphi \right) 0 \leq \varphi \leq \psi$ $\frac{RW}{G_s J R_o} \left( \left( L_2 - L_3 \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha\varphi'}{\sinh \alpha\varphi} \sinh \alpha\varphi + L_3 \frac{\psi'}{\varphi} \varphi \right) \psi \leq \varphi \leq \varphi'$
(4)	$\frac{RP}{G_s J} \left( \left( \bar{R} - R_o \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha\varphi'}{\sinh \alpha\varphi} \sinh \alpha\varphi + R_o \frac{\psi'}{\varphi} \varphi \right) 0 \leq \varphi \leq \psi$ $\frac{RP}{G_s J} \left( \left( \bar{R} - R_o \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha\varphi'}{\sinh \alpha\varphi} \sinh \alpha\varphi + R_o \frac{\psi'}{\varphi} \varphi \right) \psi \leq \varphi \leq \varphi'$
(5)	$\frac{R\rho_o}{G_s J} \left( \left( L_1 - L_2 \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2} \right) \frac{\cosh \alpha\varphi' - 1}{\sinh \alpha\varphi} \sinh \alpha\varphi + \frac{L_2}{2} \psi'^2 \varphi \right) 0 \leq \varphi \leq \psi$ $\frac{R\rho_o}{G_s J} \left( \left( L_1 - L_2 \frac{\alpha^2+1}{\alpha^2} \right) \left( 1 - \frac{\sinh \alpha\varphi + \sinh \alpha\varphi' \cosh \alpha\varphi}{\sinh \alpha\varphi} \right) + \frac{L_2}{2} \left[ \frac{\varphi}{\varphi} \psi'^2 - (\varphi - \psi)^2 \right] \right) \psi \leq \varphi \leq \varphi'$
(6)	$\frac{1}{G_s J} \left\{ \mathfrak{M}_{m+1} \left[ (\alpha^2+1) \frac{\sinh \alpha\varphi}{\sinh \alpha\varphi} - \frac{\varphi}{\varphi} \right] + \mathfrak{M}_m \left[ (\alpha^2+1) \frac{\sinh \alpha\varphi'}{\sinh \alpha\varphi} - \frac{\varphi'}{\varphi} \right] + M_{m+1} R \left( \frac{\varphi}{\varphi} \frac{\sinh \alpha\varphi}{\sinh \alpha\varphi} \right) + M_m R \left( \frac{\varphi'}{\varphi} \frac{\sinh \alpha\varphi'}{\sinh \alpha\varphi} \right) \right\}$

注：荷重状態（1）～（5）は文献<sup>2)</sup>に示すものと同じである。

荷重状態（6）は単純桁橋の端  $\varphi=O$  に曲げモーメント  $M_m$  と曲げねじりモーメント  $\mathfrak{M}_m$  および端  $\varphi=\varphi'$  に曲げモーメント  $M_{m+1}$  と曲げねじりモーメント  $\mathfrak{M}_{m+1}$  を作用させた場合で、連続桁橋に利用できる解である。

図-5 (a) I 桁橋の反力

Fig. 5 (a) Reaction at I-Girder Bridge.

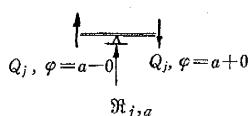
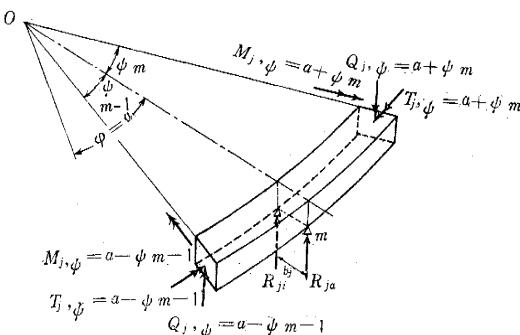


図-5 (b) 箱桁橋の反力

Fig. 5 (b) Reactions at Box-Girder Bridge.



が次式で与えられる。

$$\mathfrak{M}_{ja} = Q_{j,\varphi=a+0} - Q_{j,\varphi=a-0} \quad (38)$$

## (2) 並列箱桁橋（図-5(b)）

各箱桁内に十分剛なる隔壁が設けられていれば、内側腹板の下の反力  $R_{ji}$ 、外側腹板の下の反力  $R_{j,a}$  は次式で与えられる。

$$R_{j,i} = \frac{1}{b_j} \left\{ T_{j,\varphi=a+\psi_m} \cos \psi_m - T_{j,\varphi=a-\psi_{m-1}} \cos \psi_{m-1} \right\}$$

$$+ Q_{j,\varphi=a-\psi_{m-1}} (R_{0y} \cos \psi_{m-1} - R_{ja}) - Q_{j,\varphi=a+\psi_m} (R_{0y} \cos \psi_m - R_{ja}) - M_{\bar{y}j,\varphi=a+\psi_m} \sin \psi_m \\ - M_{\bar{y}j,\varphi=a-\psi_{m-1}} \sin \psi_{m-1} + P_j (R_{ja} - \bar{R}_j \cos \bar{\psi}_j) \quad (39)_1$$

$$R_{j,a} = \frac{1}{b_j} \left\{ T_{j,\varphi=a-\psi_{m-1}} \cos \psi_{m-1} - T_{j,\varphi=a+\psi_m} \cos \psi_m \right. \\ \left. + Q_{j,\varphi=a+\psi_m} (R_{0y} \cos \psi_m - R_{ji}) - Q_{j,\varphi=a-\psi_{m-1}} (R_{0y} \cos \psi_{m-1} - R_{ji}) + M_{\bar{y}j,\varphi=a+\psi_m} \sin \psi_m \right. \\ \left. + M_{\bar{y}j,\varphi=a-\psi_{m-1}} \sin \psi_{m-1} + P_j (\bar{R}_j \cos \bar{\psi}_j - R_{ji}) \right\} \quad (39)_2$$

$R_{ji}, R_{ja}$ ：それぞれ内側支承、外側支承と曲率中心  $O$  との水平距離

$\psi_{m-1}, \psi_m$ ：それぞれ支点  $\varphi=a$  の前後に隣接する格間中央断面と支点断面のはさむ角

$b_j$ ：支点間隔

## 11. ねじり関数

第  $j$  主桁が一室閉断面で、その幅が曲率半径に比し小さければ、ねじり関数  $\tilde{q}_j$  は次式で与えられる<sup>16)</sup>。

$$\tilde{q}_j = 2 \frac{R_j}{R} \frac{F_j}{\int \frac{n_g}{t} ds} \quad (40)$$

多角形断面の場合には、

$$\int \frac{n_g}{t} ds = \Sigma \frac{n_g}{t} \Delta s \quad (40)'$$

となる。

ここに  $\Sigma$  は多角形断面を囲むすべての部材について総和することを意味する。 $F_j$  は薄板中心線で囲まれる多角形の面積、 $\Delta s$  は同一材料厚さの薄板部材の区間長

第  $j$  主桁が開断面の場合には、 $\tilde{q}_j=0$

## 12. 応力算定式

曲線並列桁橋の各主桁の応力は、その主桁に分配された曲げモーメント  $M_{\bar{y}j}$  および曲げせん断力  $Q_j = Q_{j,i} + T_{j,i}/R_{0j}$  を用いて与えられる。

### (1) 垂直応力 $\sigma_j$

第  $j$  主桁断面内任意点の垂直応力  $\sigma_j$  は次式で与えられる。

$$\sigma_j = \frac{M_{\bar{y}j}}{nI_{\bar{y}j}} \bar{z}_j \quad (41)$$

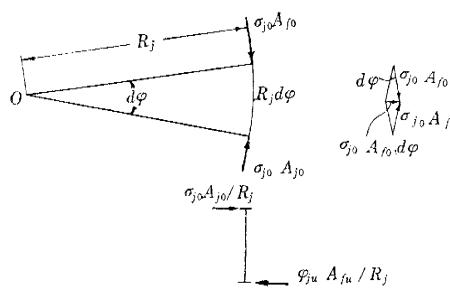
### (2) せん断応力 $\tau_j$

第  $j$  主桁断面内任意点のせん断応力  $\tau_j$  はつぎの近似式で簡単に計算できる。

$$\tau_j = \frac{Q_{j,i} S_{\bar{y}j}}{I_{\bar{y}j} t} + \frac{R^2}{\rho^2} \frac{T_s}{J_t} \tilde{q}_j \quad (42)$$

ここに  $S_{\bar{y}j}$  は第  $j$  主桁中立軸  $\bar{y}_j$  に関する、注目点より外側にある断面部分の断面 1 次モーメントである。

図-6 フランジの面内曲げ  
Fig. 6 Bending of Flange in its Own Plane.



閉断面の場合は、もちろん  $\tilde{q}_j=0$  である。

### 13. 曲線並列 I 桁橋の 2 次応力

曲線並列 I 桁橋に鉛直荷重が作用した場合、個々の主桁には分配された曲げモーメントにより 12. に示された垂直応力が生ずる。このときフランジ断面には  $\sigma_j$  にフランジ断面積  $A_f$  を乗じただけの引張力あるいは圧縮力が働いていることになる。この軸力は常に円周方向に作用するので、曲率半径方向に合力を生ずる。すなわち 図-6 に示すように微小中心角  $d\varphi$  をはさむ上フランジの 2 断面に圧縮力  $\sigma_{j0} A_{f0}$  が作用する場合、その半径方向の合力  $\sigma_{j0} A_{f0} d\varphi$  が桁  $j$  の微小部分  $R_j d\varphi$  に外向きに作用することになる。一方、下フランジには引張力  $\sigma_{ju} A_{fu}$  が作用し、合力  $\sigma_{ju} A_{fu} d\varphi$  が同じ微小部分に内向きに水平に作用する。そこでフランジは、このような水平分布力を受け、横繋材の結合部で支持された連続桁とみなされる。特にフランジ断面が矩形のような通常の I 桁においては、水平方向の曲げ剛性が小さいので、このために 2 次応力が無視できない。普通、上フランジはスラブ止めなどで床板に結合され、その間隔が小さいから、2 次応力も大したことがない。下フランジについては、横繋材（横桁、横構など）の取付格点が有限の間隔  $\lambda$  で列んでいて、フランジの変形に拘束を与えていた。そこで下フランジを  $\sigma_{ju} A_{fu}/R_j$  なる分布荷重を受ける等スペン連続桁と考える。このとき、局部曲げによるこの 2 次応力をできるだけ軽減するためには、格間の間隔が小さくなるように横繋材を配置することが望ましい。

そこで 2 次応力  $\sigma_2$  は次式で簡単に求めることを提案する。

#### (1) 中間格間（桁橋の中央部にある格間）

##### (a) 格点断面において

$$\sigma_2 = \pm 0.106 \frac{\sigma_{ju} \max A_{fu}}{R_j W_{fu}} \lambda^2 \quad \dots \dots \dots (43)$$

##### (b) 格間断面において

$$\sigma_2 = \pm 0.073 \frac{\sigma_{ju} \max A_{fu}}{R_j W_{fu}} \lambda^2 \quad \dots \dots \dots (44)$$

#### (2) 端格間（桁橋の端部にある格間）

##### (a) 格点断面において

$$\sigma_2 = \pm 0.106 \frac{\sigma_{ju} \max A_{fu}}{R_j W_{fu}} \lambda^2 \quad \dots \dots \dots (45)$$

##### (b) 格間断面において

$$\sigma_2 = \pm 0.094 \frac{\sigma_{ju} \max A_{fu}}{R_j W_{fu}} \lambda^2 \quad \dots \dots \dots (46)$$

ここに  $\sigma_{ju} \max$  は式 (41) より求められた下フランジ応力で、注目されている格間内で最大のものをとる。

$W_{fu}$  はフランジの水平方向曲げに対する断面係数

式 (43) と (45) は等分布荷重  $\sigma_{ju} \max A_{fu}/R_j$  が無限連続桁あるいは半無限連続桁の注目する支点の両側格間に作用する場合の支点 (I 桁橋格点にあたる点) における垂直応力に相当する。

式 (44) と (46) は等分布荷重  $\sigma_{ju} \max A_{fu}/R_j$  が無限連続桁あるいは半無限連続桁の注目する格間に作用する場合の支間最大応力を与える。

並列箱桁橋では、この種の 2 次応力は非常に小さいので無視してよい。

### 14. 横桁の断面力

通常、曲線桁橋においては横桁の剛比が大きいので横桁の変形が主桁の荷重分配におよぼす影響が小さい。それで前節において橋断面形状不変の仮定のもとに立体的解析法を適用し、各主桁に分配される断面力  $M_{yj}$ ,  $Q_j$  および  $T_j$  を求めた。横桁の断面力は、これらの主桁断面力および荷重とのつり合い関係から決めうる。

図-7 (a)

Fig. 7 (a)

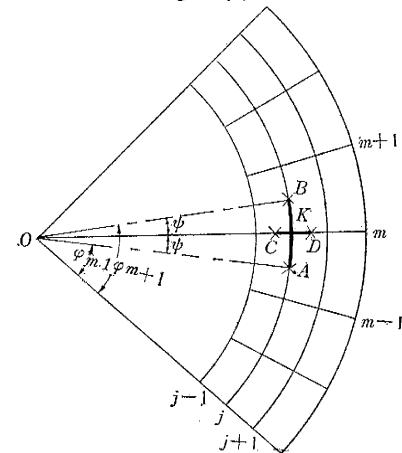


図-7 (b)

Fig. 7 (b)

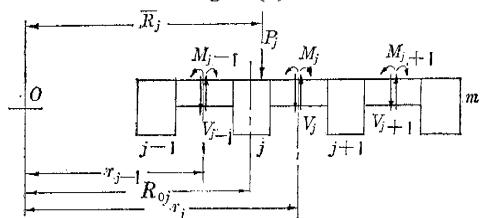
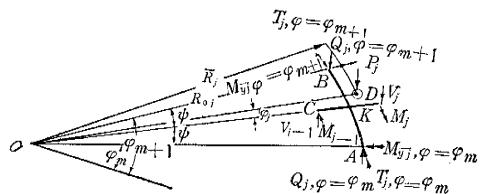


図-7 (c) 横桁の断面力

Fig. 7 (c) Stress Resultants in Cross Girder.



いま、図-7 (b)に示すように端から  $m$  番目の横桁が取付いている断面を考える。第  $j$  と  $j+1$  主桁の間にある横桁の中央断面  $D$  における曲げモーメントを  $M_j$ 、せん断力を  $V_j$  とする。そして断面  $D$  は曲率中心  $O$  から水平距離  $r_j$  のところにあるものとする。

つぎに 図-7 (a) に示すように、第  $j$  主桁において横桁  $m-1$  と  $m$  の間にある格間の中点を  $A$ 、 $m$  と  $m+1$  の間にある格間の中点を  $B$  とする。また第  $m$  横桁において、主桁  $j-1$  と  $j$  の間にある部分の中点を  $C$  とする。このとき 4つの断面  $A, B, C, D$  で切り取られる十字形の自由片について力のつり合いを考える。その部分を拡大したのが 図-7 (c) である。断面  $A$  は端から中心角  $\varphi = \varphi_m$  に、また断面  $B$  は  $\varphi = \varphi_{m+1}$  の位置にあるとする。さらに第  $j$  主桁の断面  $A$  における曲げモーメントを  $M_{\bar{y}j, \varphi = \varphi_m}$ 、せん断力を  $Q_{j, \varphi = \varphi_m}$ 、ねじりモーメントを  $T_{j, \varphi = \varphi_m}$  とし、断面  $B$  におけるそれぞれの値を  $M_{\bar{y}j, \varphi = \varphi_{m+1}}$ 、 $Q_{j, \varphi = \varphi_{m+1}}$ 、 $T_{j, \varphi = \varphi_{m+1}}$  と記す。

まず鉛直方向のつり合いより、

$$V_j = V_{j-1} + Q_{j, \varphi = \varphi_m} - Q_{j, \varphi = \varphi_{m+1}} - P_j \dots \dots \dots (47)$$

ここに  $P_j$  は  $A, B, C, D$  領域に載荷する集中荷重、ちょうど点  $C$  または  $D$  上に  $P$  が載荷するときは、その中の  $P/2$  がこの  $\overline{CD}$  区間に載るものとして取り扱えばよい。つぎに格点断面  $K$  におけるせん中心軸まわりのモーメントのつり合いから、

$$\begin{aligned} M_j &= M_{j-1} + r_j V_j - r_{j-1} V_{j-1} + [T_{j, \varphi = \varphi_m} - T_{j, \varphi = \varphi_{m+1}} \\ &\quad + (Q_{j, \varphi = \varphi_{m+1}} - Q_{j, \varphi = \varphi_m}) R_{0j}] \cos \psi \\ &\quad + (M_{\bar{y}j, \varphi = \varphi_m} + M_{\bar{y}j, \varphi = \varphi_{m+1}}) \sin \psi + P_j R_j \cos \psi_j \end{aligned} \dots \dots \dots (48)$$

ここに  $\psi$  は 図-7 (c) に示すように 1 格間が狹むを中心角の半分である。また  $\psi_j$  は集中荷重  $P_j$  と半径  $\overline{OD}$  のなす角である。曲線並列 I 桁橋では  $T_j$  は小さいので式 (48) 中では省略してよい。

主桁の支間中央の横桁について計算する場合、荷重および桁橋がその両側で対称であれば、式 (47), (48) は簡単になる。すなわち、

$$Q_{j, \varphi = \varphi_m} = -Q_{j, \varphi = \varphi_{m+1}}, \quad M_{\bar{y}j, \varphi = \varphi_m} = M_{\bar{y}j, \varphi = \varphi_{m+1}}$$

$$T_{j, \varphi = \varphi_m} = -T_{j, \varphi = \varphi_{m+1}}$$

であるから、

$$V_j = V_{j-1} + 2Q_{j, \varphi = \varphi_m} - P_j \dots \dots \dots (47)'$$

$$\begin{aligned} M_j &= M_{j-1} + r_j V_j - r_{j-1} V_{j-1} + 2M_{\bar{y}j, \varphi = \varphi_m} \sin \psi \\ &\quad + [2T_{j, \varphi = \varphi_m} - 2Q_{j, \varphi = \varphi_m} R_{0j}] \cos \psi + P_j R_j \cos \psi_j \end{aligned} \dots \dots \dots (48)'$$

実際の計算に際しては、任意の横桁  $m$  についてまず  $j=1$  とおき、

$$V_1 = Q_{1, \varphi = \varphi_m} - Q_{1, \varphi = \varphi_{m+1}} - P_1 \dots \dots \dots (49)$$

$$\begin{aligned} M_1 &= r_1 V_1 + [T_{1, \varphi = \varphi_m} - T_{1, \varphi = \varphi_{m+1}} + (Q_{1, \varphi = \varphi_m} \\ &\quad - Q_{1, \varphi = \varphi_{m+1}}) R_{01}] \cos \psi \\ &\quad + (M_{\bar{y}1, \varphi = \varphi_m} + M_{\bar{y}1, \varphi = \varphi_{m+1}}) \sin \psi \\ &\quad + P_1 R_1 \cos \psi_1 \end{aligned} \dots \dots \dots (50)$$

によって  $V_1, M_1$  を計算し、つぎに順次  $j=2, 3, \dots$  として式 (47), (48) あるいは式 (47)', (48)' によって  $V_j, M_j$  をただちに計算できるので好都合である。

## 15. 結論

本論文において得られた結果を要約すれば、つぎのようである。

(1) 曲線桁橋に鉛直荷重が作用する場合、横断面での荷重の合力が、曲率中心を通るとき、桁橋には曲げとともにねじりのみを生ずる。

(2) 曲線並列桁橋に、薄肉曲線桁の基礎理論を適用し、橋断面に関する基礎量 ( $I, J, C_w, \tilde{q}$  など) の実用計算式を誘導した。これらの基礎量にはすべて曲線桁橋の曲率の影響をふくんでいる。

(3) (2) で与える諸量を用いて、文献<sup>2), 3)</sup> に述べられた立体的解析法により全橋断面の断面力（曲げモーメント、曲げねじりモーメント、St. Venant ねじりモーメント、2 次ねじりモーメント、合ねじりモーメント曲げせん断力、合せん断力など）および変形量（たわみねじり角、断面回転角など）を求めることができる。

(4) 各主桁に分配される曲げモーメント、合せん断力および合ねじりモーメントが (3) で得た全橋断面の断面力から求まる。

(5) 各主桁断面内の垂直応力およびせん断応力が、(4) で得た各主桁自身に生ずる断面力からきわめて簡単に計算できる。

(6) 支点反力が、その支点上の主桁の合せん断力および合ねじりモーメント、曲げモーメントから計算される。

(7) 橋桁の曲げモーメントおよびせん断力を与える計算式を示した。

(8) 並列 I 桁橋ではフランジに 2 次応力が生ずる。その大きさを評価する実用計算式を提案した。この 2 次応力を軽減するには格点間隔をできるだけ小さくとるとか、フランジに Channel 材を伏せた状態で使うことによって水平方向の曲げ剛性を大きくするとかの方法が適切である。

なお数値計算および実測結果との比較については改めて報告したい。

## 参考文献

- 1) 小西一郎・小松定夫：薄肉曲線桁の基礎理論、土木学会論文集、第 87 号、昭和 37 年 11 月
- 2) 小西一郎・小松定夫：単純曲線桁橋の立体的解析、土木学会論文集、第 90 号、昭和 38 年 2 月
- 3) 小西一郎・小松定夫：薄肉連続曲線桁橋の立体的解析、土木学会論文集、第 91 号、昭和 38 年 3 月
- 4) 文献 2) 式 (8)
- 5) 文献 2) 式 (9)
- 6) 文献 1) 第 2 節で述べられた曲線桁橋断面の図心の定義
- 7) 文献 1) 式 (35) を第  $j$  主桁に適用した。
- 8) 文献 1) 式 (3) で定義されている。
- 9) 変位  $w$  の各項は、それぞれ文献 1) 式 (28), (26), (36) および 6) で与えられている。
- 10) 垂直応力  $\sigma$  の各項は、それぞれ文献 1), 9 式 (a), 式 (29), (27) および (13) で与えられている。
- 11) 文献 2) 式 (2) と式 (6) により容易に導ける。
- 12) 文献 1) 式 (71)
- 13) 文献 2) 式 (4)
- 14) 文献 1) 式 (50) の両辺を  $\varphi$  で微分したもの。
- 15) 文献 2) 式 (5)
- 16) 文献 1) 式 (22) において、 $\rho = R_j = \text{一定}$ ,  $\tilde{q}_i = \tilde{q}_j$ ,  $\tilde{q}_{i+1} = 0$  とおいたもの。
- 17) 平井 敦・倉西 茂：曲線橋理論について、土木技術、第 13 卷第 7 号、昭和 33 年 7 月
- 18) 倉西 茂：曲線格子桁の解法、土木学会論文集、第 76 号、昭和 36 年 9 月  
(原稿受付：1962. 9. 13)