

固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化*

日 野 幹 雄**

要 旨 土砂を浮遊した水流の流速分布が変化すること、すなわち流速分布の Karman 定数が減少し、水路の摩擦損失が低下することは、実験的によく知られており、これに関する種々の理論や解釈が試みられてきた。それらは、土砂を浮遊するためのエネルギー増加ということによってのみ Karman 定数の変化を説明しようとするものであった。本論文では、見かけの密度勾配の形成という点以外に固体としての粒子の存在を十分に考慮した粒子浮遊流のエネルギー方程式を新たに導き、これと乱れの加速度平衡方程式から、一般の粒子浮遊流の流速分布 Karman 定数の減少について、新しい公式を導いた。同時に、乱れの強さの変化、渦の寿命時間の変化についての理論も展開した。特にこの理論は、従来の解釈では説明のつかなかった中立浮遊粒子の場合もその特別な場合として含んだ統一的なものであることを特徴としているものであり、既存の土砂流についての実験や M. I.T. において行なわれた中立浮遊粒子の流れについての実験とよい一致を示すものである。

1. 序

洪水時のように土砂を浮遊した流れについては、水流の摩擦損失（平均流速に関する Chézy の定数）がどう変化するのかに関して、古くからいろいろと洪水記録の解析、野外観測、室内実験が行なわれ、様々な議論が行なわれてきているが、その結論は一見相反するものがあったりしてまちまちであった。それは、水流による抵抗係数の変化が二つの要素から成り立っており、その二要素の作用が相反することに起因する矛盾であった。

土砂流の抵抗損失は、㊸ 底地形の変化によるものと、㊹ 流速分布の変化による抵抗減少とにわけられる。土砂流による ㊸ の作用では、まず水路底面に砂澱が発生して、粗度を増加させる。流速の増加とともに砂澱も発達するが、ある流速以上になると砂澱は消滅に向かい、粗度は逆に減少する。土砂流の ㊹ の作用を実験的にはじめて明確にしたのは V.A. Vanoni (1944) である。彼は二次元開水路での実験で、土砂浮遊によって Karman 定数が清浄な水の場合の値 0.4 より減少すること***、

したがって水流の抵抗は常に減少することを示した。その後、この問題については H.M. Ismail (1951), H.A. Einstein and N. Chien (1952), V.A. Vanoni and G.N. Nomicos (1959) らの実験的研究が行なわれてきている。わが国では、この Karman 定数の変化に関する理論の方面では、室田氏 (1953) にはじまり、椿氏 (1955)、志村氏 (1957) の輝かしい業績がある。

椿氏は、渦の強さや大きさが変化しても、渦の寿命時間は不変であるという H. Lettau (1949) や Y. Ogura (1952) ら気象学者の仮説と、乱れのエネルギー方程式から出発し、また志村氏は大胆に、固体粒子の浮遊によって一次的には乱れの強さは変化しないという仮説を立て、同じくエネルギー方程式から出発して、ともに Karman 定数の変化を与える理論式を導いた。これらの理論式は、それまでの種々の実験とよく一致するものであった。彼らの理論は、土砂粒子を浮遊させるためのエネルギーの増加分を乱れが平均流からうばうために流速分布の勾配が急にならなければならないことを説明しようとするものであった。

Einstein and Chien (1952) はそれより先同様の思想から、土砂粒子を浮遊させるためのエネルギー $P_p = \frac{\rho_p - \rho_0}{\rho_p} m_a v_p h$ (ρ_p = 土砂粒子の密度; ρ_0 = 水の密度; m_a = 土砂の断面平均重量濃度; v_p = 土砂粒子の沈降速度; h = 水深) と流れの失なう平均エネルギー $P_f = \rho_0 h U_0 I$ (U_0 = 断面平均流速; I = 水路の底勾配) との比 $P_p/P_f = (r-1)m_a v_p / (\rho_p U_0 g I)$ と Karman 定数の間に一定の関係があることを予想し、実験的にこの解釈が正しいことを明らかにした。また Vanoni and Nomicos (1959) はさらにこの考えを改良した。しかし、関数形を与えることはできなかった。

乱れの強さに関しては、志村氏 (1957) が第一次的には不変であると仮定した以外は、他の研究者たちはすべて、乱れのエネルギーが土砂浮遊のために消費され、したがって乱れの強さは減衰するであろうと予想した。これは気象学の方では（密度勾配は温度のみによって起こる）、直接間接の実測によって十分明らかにされている。

ところが、最近に至って C. Elata and A.T. Ippen (1961) は、こうした解釈に一つの疑問を提出した。すなわち、これまでの理論や解釈では、比重が 1 に等しい粒子が浮遊する水流では流速分布や乱れの強さに変化がないことになるが、はたしてそうであろうかと考え一連の実験を行ない、その結論として、㊸ 中立浮遊粒子によっても Karman 定数は減少すること、㊹ さらに驚くべ

* 本論文の一部は、第 7 回 水理講演会 (1962.10.15) において発表 [講演集 p 49-54]

** 正員 工博 電力中央研究所技術研究所

*** この「Karman 定数が減少する」、または「Karman 定数が増加する」という表現は適切でない。定数は変化すべきものではないから。変化するのは定数ではなく、流速分布の関数形である [井上栄一 博士]。しかし、本論文では水理学の習慣にしたがって古い表現を使用する。

きことに乱れの強さが増加することを明らかにした。

この Ippen 教授らの実験によって、われわれはほぼ理論的に解決されたかのように考えていた土砂流の内部機構に、今一度の検討を加えなければならない立場に立入った。

著者は、この論文で、これまでの理論が固体粒子の浮遊によって与えられる種々の影響のうち一つ(粒子を浮遊させるエネルギーの増加)のみしか考えていないことを指摘し、さらに粒子による乱れの有効逸散体積の減少、粒子の回転や粒子と水との相対運動による乱れの逸散の増加をも考えて、エネルギー方程式を新たに導き、またこれまでの理論が乱流構造について一つの仮説を立て、これとエネルギー方程式から出発したのに対して著者はこのような仮説を捨て、乱れの加速度平衡方程式とエネルギー方程式とを用いて Karman 定数の変化、乱れの強さの変化を表わす理論式を導き、これを A.T. Ippen and C. Elata (1961) の実験と比較して、それが妥当であることを示した。そのうえ、土砂流については流速分布の変化のほか、今までの理論からは導くことのできなかったし(もちろん実験もない)、乱れの強さや渦の寿命時間の変化についても理論的予測を示すことができた。

2. 理 論

(1) 粒子を浮遊した水流のエネルギー方程式

主流の方向にx軸、底面に垂直にy軸、x-y面に垂直にz軸をとる。それぞれの方向の流速成分は $U=U_1$, $V=U_2$, $W=U_3$ とする。運動方程式をテンソル記号を用いて表わせば、

$$\rho U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \nabla^2 U_i - \rho \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} \dots (1)$$

である。

各式を U_i 倍して加え合わせ、

$$\begin{aligned} U_1 &= U+u \\ U_2 &= v \\ U_3 &= w \end{aligned}$$

と書き直して平均を取れば、乱流のエネルギー平衡を表わす方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \tau \frac{dU}{dy} &= \frac{d}{dy} \left[\rho v \frac{(u^2+v^2+w^2)}{2} + \nu p \right] \\ &+ \mu \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 - \frac{1}{2} \mu \frac{d^2}{dy^2} (u^2+v^2+w^2) \\ &+ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \dots (2) \end{aligned}$$

この方程式は、はじめ T. von Karman (1937) によって得られたもので、その表わす意味は次のようである。左辺は Reynolds 応力 ($-\rho \overline{uv} = \tau$) によって、乱れが平均流から獲得するエネルギー [Production] を表わし、右辺はそれが粘性によって熱エネルギーに変化したり、また乱れの拡散作用によって隣の部分へ輸送されたりして、単位体積・単位時間あたりのエネルギー収支が平衡していることを示している。

式(2)の右辺の第2項は、層流粘性にもとづいて熱に変わるエネルギー [Direct viscous dissipation] の割合、第4項は乱れによって熱エネルギーに変わる [Turbulent dissipation] 割合を示す。右辺の第1項は、乱れの垂直成分 v によって運動エネルギーおよび圧力エネルギーが拡散される割合を表わし、[Turbulent diffusion] と呼ばれる。また、第3項は [Gradient type diffusion] と呼ばれる。これらの各項の大きさを比較するために $q = \sqrt{u^2+v^2+w^2}$ とし、また水深に相当する長さを長さの単位にとり、これを d とすれば

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\rho} &= -\overline{uv} = O(q^2) \\ \frac{dU}{dy} &= O\left(\frac{\sqrt{\tau/\rho}}{d}\right) = O\left(\frac{q}{d}\right) \end{aligned}$$

である。したがって、式(2)は

$$A_1 \frac{q^3}{d} = A_2 \frac{q^2}{d} + A_3 \nu \frac{q^2}{d^2} + A_4 \nu \frac{q^2}{d^2} + A_5 \nu \frac{q^2}{\lambda^2} \dots (3)$$

となる。ここで、 λ は乱れによるエネルギーの逸散に関係する長さの単位(最小の渦径)である。Reynolds 数が十分大きい $q d/\nu \gg 1$ 場合には、 $\nu q^2/d^2 \ll q^3/d$ であり、式(2)の右辺の第2項および第3項は無視してよい。したがって、式(2)のエネルギー方程式は、一様な二次元流については

$$\begin{aligned} \tau \frac{dU}{dy} &= \frac{d}{dy} \left[\rho v \frac{(u^2+v^2+w^2)}{2} + \nu p \right] \\ &+ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \dots (4) \end{aligned}$$

となる。

なお、式(4)の左辺と右辺は、同じ程度の大きさでなければならぬから

$$\frac{\lambda^2 q}{\nu d} = O(1) \dots (5)$$

すなわち、

$$\frac{\lambda^2 \sqrt{\overline{u^2}}}{\nu L} = \text{const} \dots (5a)$$

の関係が成立しなければならぬ。ここで、 L は最大の渦径であり、この関係が実際に成立することは実験的にも確かめられている (M. Hino (1961))。

ところで、水流が固体粒子を浮遊させると、式(4)のエネルギー方程式には、種々の項を付加しなければならない。まず、左辺のエネルギープロダクションでは、見かけの水の密度の変化にともなって、摩擦応力 τ は

$$\tau = \rho_a U_*'^2 \int_{y/h}^1 \frac{\rho_0 [1 + (r-1)C]}{\rho_a} d\left(\frac{y}{h}\right) \dots (6)$$

となる。ここに ρ_a は断面平均の見かけの密度、 r は粒子の比重、 C は固体粒子の体積濃度である。

右辺には、固体粒子を浮遊させるためのエネルギー

$$-\rho_0(r-1) \overline{cv} Y = \rho_0(r-1) g \nu_p C \dots (7)*$$

* $\tau/\rho = -\overline{uv} = \epsilon_m \frac{dU}{dy}$
 $-\overline{cv} = \epsilon_c \frac{dC}{dy} = -\nu_p C$

(ここに、 $c=$ 濃度変動)、のほかに次の項を補正項として加える必要がある。

粒子をふくまない場合等方性乱流のエネルギー逸散率は、

$$D = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \approx 15 \nu \rho \frac{\bar{u}^2}{l^2} \quad \dots\dots\dots(8)$$

である。これは式(5a)の關係を用いれば、(非等方性の場合もふくんで) つぎのようになる。

$$D \sim \rho \frac{\bar{u}^3}{L} \quad \dots\dots\dots(8a)$$

ただし、簡単のために

$$\sqrt{\bar{u}^2} = \bar{u} \quad \dots\dots\dots(9)$$

と表わす。しかし、固体粒子がその単位体積の一部に存在すれば、そこでは水の粘性による乱れエネルギーの逸散は行なわれないから、それだけの体積分を差し引かなければならない。もっとも、固体粒子の存在によって、そのまわりの流れの状況も変化するはずであるから、粒子の影響範囲は、粒子径の α 倍のところにおよぶと考えなければならない。したがって粒子を浮遊した場合の乱流エネルギー逸散率 D_p はつぎのように表示される。

$$D_p \sim (1 - \alpha^3 C) \rho \frac{\bar{u}^3}{L} \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここに、 α は 1 よりやや大きい、ほぼ 1 に等しい値である。

また、粒子の回転や周囲の流体との相対運動のために発生するエネルギー逸散率をも考慮する必要がある。これを W_p 、その粒子一個についての値を w_p で表わす。すなわち

$$W_p = \frac{C}{\left(\frac{\pi}{6} d^3\right)} w_p$$

($d=$ 粒子径)である。したがって、固体粒子を浮遊した流れでは、乱れのエネルギー平衡方程式は

$$\begin{aligned} \rho_a U_*^2 \frac{dU}{dy} \int_{y/m}^1 \frac{\rho_0 [1 + (r-1)C]}{\rho_a} d\left(\frac{y}{h}\right) \\ = a_1 (1 - \alpha^3 C) \frac{\bar{u}^3}{L} + \rho_0 (r-1) \nu \rho g C \\ + W_p + [\text{Diffusion}] \quad \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

となる。

W_p は、層流の場合には、いろいろな粒子形について解かれている——たとえば G.B. Jeffery (1922), H.L. Goldsmith and S.G. Mason (1962)——が、乱流の場合には等方性乱流場で粒子径が渦径にくらべて、十分小さい固体粒子の相対運動についてのみ解がえられている(J.O. Hinze (1959)). S.L. Soo and C.L. Tien (1960) は、壁の影響を考えた場合の理論を展開しているが、Lagrange 相関の関数形の仮定に誤解があることのほかに、J.L. Lumley (1960) によって指摘されたような根本的疑点がある。

そこで、等方性乱流場について、粒子一個あたりの D

と W_p の order を比較してみる。粒子の回転運動によるエネルギー逸散は無視して、(Hinze より)

$$\begin{aligned} w_p &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{3}{2T} \int_{-T}^{+T} (\text{drag force})(u - u_p) dt \\ &= 9 \pi \mu d (\bar{u}^2 - \bar{u}_p) \\ &= 9 \pi \mu d \bar{u}^2 \left(1 - \frac{at_* fL + b^2}{at_* fL + 1} \right) \\ &= 9 \pi \mu d \bar{u}^2 \left(\frac{1 - b^2}{at_* fL + 1} \right) \quad \dots\dots\dots(12) \end{aligned}$$

ただし $d=$ 粒子径 $u=$ 流体の流速変動

$u_p=$ 粒子の流速変動

$$\left. \begin{aligned} a &= 36 \mu / (2 \rho_p + \rho_0) d^2 = 3 \nu / (2r + 1) d^2 \\ b &= 3 \rho_0 / (2 \rho_p + \rho_0) \\ t_* fL &= \text{渦の寿命時間} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

である。渦の寿命時間は、 $t_* fL = L/\bar{u} \approx h/U_*$ と考えることができるから、 w_p は

$$w_p \approx \left(\frac{\pi}{6} d^3\right) \cdot \frac{3 \rho_0 (2r + 1)}{2} \cdot \frac{\bar{u}^2}{U_*^2} \cdot \frac{U_*^3}{h} \quad \dots\dots\dots(14)$$

と表わされる。

また、粒子一個の占める体積分の水の粘性逸散は、式(10)から求めればよいが、比例係数が明確でないので、断面平均のエネルギー逸散率

$$\begin{aligned} \bar{D} &= g U_0 I \\ &= \frac{U_*^2 U_0}{h} \\ &= \frac{U_*^3}{h} \sqrt{\frac{2}{C_f}} \left(1 - \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) \quad \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{U_*}{U_1}\right)^2 &= \frac{C_f}{2} \\ U_0 &= \text{断面平均流速} \\ U_1 &= \text{断面最大流速} \\ U_0 &= U_1 - \frac{1}{k} U_* \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

の關係を用いて、

$$D \cdot \left(\frac{\pi}{6} d^3\right) = \left(\frac{\pi}{6} d^3\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{C_f}} \left(1 - \frac{1}{k} \sqrt{\frac{C_f}{2}} \right) \cdot \frac{U_*}{h} \quad \dots\dots\dots(17)$$

となる。

式(14)と式(17)を比較すれば、一般の水流では $D \left(\frac{\pi}{6} d^3\right)$ が w_p の 10~20 倍の程度である。したがって、明確な表示のできない $W_p(w_p)$ は、以下の取り扱いでは省略することにする。

(2) 加速度平衡方程式

乱れの発生原因は、機械的摩擦応力による乱れと、密度差にもとづく浮力による乱れとにわけられる。このような概念は、気象学者 C.G. Rossby and R.B. Montgomery (1953), H. Lettau (1949) らによって提示されており、その後 W.P. Elliot (1957), S.K. Kao (1957) らは、次のように加速度形式で表示した。

$$l\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 = l_0\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 - B\frac{g}{T}l_h\frac{d\theta}{dy} \dots\dots\dots(18)$$

ここに l, l_0, l_h はそれぞれ全体の混合距離, 機械的応力による混合距離, 浮力による混合距離であり, T は温度, θ はポテンシャル温度, B は定数を表わす。

固体微粒子の浮遊によって密度勾配が生じる場合には, 乱れの加速度方程式は, つぎのように修正すべきである。

いま一つの流体塊が v の変動速度で運動をはじめ, l だけ移動して周囲の流体と混合し終わるとすれば, この流体塊に働いた加速度は

$$\frac{dU}{dt} = l\left(\frac{dU}{dy}\right) \Big/ \frac{l}{v} = l\left(\frac{dU}{dy}\right) \Big/ \frac{l}{l\left(\frac{dU}{dy}\right)} = l\left(\frac{dU}{dy}\right)^2$$

である。

また, ある流体塊 (\bar{V}) に c だけ周囲との濃度変動があったとすると, それに働く重力は $\rho_0 g(r-1)c \times \bar{V}$ である。この流体塊の質量は $\rho_0\{1+(r-1)(C+c)\} \times \bar{V}$ であるから加速度は

$$\{g(r-1)/[1+(r-1)(C+c)]\} \times l_c \frac{dc}{dy} = \frac{\rho_0}{\rho} g l_c (r-1) \frac{dc}{dy}$$

である。

したがって, 乱れの加速度方程式は

$$l\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 = f_n(C)l_0\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 + Bgl_c(r-1)\frac{\rho_0}{\rho}\frac{dC}{dy} \dots\dots\dots(19)$$

となる。ここで, $f_n(C)$ は移動する流体塊と固体粒子群との衝突による加速度の減殺効果を表わすある C の関数で, これは 1 より小さい。より厳密に考えれば, f_n は C のほかに r や d にも関係するはずであるが, 一般には r や d があまり大きくないから, これを無視する。

また, $\epsilon_c \sim \epsilon_m$ とすれば,

$$l_c \frac{dC}{dy} = -\frac{l_c C v_p}{l_0 U_*} \sim -\frac{C v_p}{U_*} \dots\dots\dots(20)$$

より, 式 (19) は

$$l\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 = f_n(C)l_0\left(\frac{dU}{dy}\right)^2 - B_1 g \frac{\rho_0}{\rho} (r-1) \frac{v_p C}{U_*} \dots\dots\dots(21)$$

となる。

(3) 乱流構造の変化

上の議論で導いた固体粒子を浮遊させた水流のエネルギー方程式 (11) と, 加速度方程式 (21) から乱流構造を表わす乱れの強さ a^2 , 平均の渦径 L , 渦の寿命時間 t_* が, 粒子浮遊によってどのような変化をするかを導くことができる。粒子を浮遊しない場合を添字 0 で区別する。

乱流構造の変化をつぎのように表わす。

$$\frac{l_0}{l} = \frac{L_0}{L} = \psi(C, s; y/h) \dots\dots\dots(22a)$$

$$\frac{\bar{a}}{\bar{a}_0} = \phi(C, s; y/h) \dots\dots\dots(22b)$$

したがって

$$\frac{dU}{dy} = \frac{U_*}{l} = \frac{U_*}{l_0} \psi(C, s; y/h) \dots\dots\dots(23)$$

ここに s は, のちほど明確に定義づける流れの物理的性質 (h, τ, v_p, C, U_* etc) から導かれるパラメーターである。式 (22a) や式 (22b) は, y/h にも関係するが, これまでの実験が断面の平均値を問題としていること, その影響が少ないことのために省略してよからう。この点については, また改めて論文を発表したいと考えている。

式 (23) を式 (21) に代入すれば

$$\frac{U_*^2}{l_0} \psi = f_n(C) \frac{U_*^2}{l_0} \psi^2 - B_1 U_*^2 \frac{\rho_0 g(r-1)v_p C}{\rho U_*^3} \dots\dots\dots(24)$$

となる。混合距離 l_0 が y の関数 ($l_0 = k_0 y$) であることを考えれば, 式 (24) は ψ が s, C のみの関数でなく y/h にも関係することが明らかである。しかし, ψ の y/h の影響は少なく問題を簡単にするために, 断面平均値を考えればよいのである。ここで式 (24) を ψ について解いて平均するよりも, つぎのように変形したほうがきれいな形になる。

$$\psi(C, s; y/h) = \bar{\psi}(C, s) \cdot g(y/h) \dots\dots\dots(25)$$

$$\frac{\psi}{\bar{\psi}} = g\left(\frac{y}{h}\right) = 1 + c_i \left(\frac{y}{h}\right)^i \dots\dots\dots(25a)$$

とし, 式 (24) を粘性底面 (Viscous sublayer*) または粗度の高さ $y = \delta$ から水面 $y = h$ まで積分すれば,

$$\overline{f(C)} \bar{\psi}^2 - \bar{\psi}^2 - Bk_0 \frac{g(r-1)v_p}{U_*^3 \ln h/\delta} \times \int_{\delta}^h \frac{C}{[1+(r-1)C]} dy = 0 \dots\dots\dots(26)$$

となる。これより

$$\bar{\psi} = \frac{1}{2\overline{f(C)}} [1 \pm (1 + 4\overline{f(C)} Bk_0 s_1)^{1/2}] \dots\dots\dots(27)$$

ただし

$$s_1 = \frac{g(r-1)v_p}{U_*^3 \ln h/\delta} \int_{\delta}^h \frac{C}{[1+(r-1)C]} dy \dots\dots\dots(28)**$$

ところで, 水流が Newtonian flow としての性質を保存するのは, 普通 $s_1 = 0 \sim 0.7, C = 0 \sim 0.2$ ぐらいの範囲であるから, $1/f(C)$ は Taylor 級数に展開して C^2 以上の項を省略して十分であると考えられる。すなわち

* 層流底層 (laminar sublayer) という従来の呼び方は最近こう改められつつある。粘性の影響は強いけれども決して層流ではなく激しい乱れが存在するからである。この機構については Einstein and Li (1956) や J. Sternberg (1961) の理論がある。

** $s_1 = \frac{g(r-1)v_p C_a (h-\delta)}{U_*^3 \ln h/\delta}$

$$\frac{1}{f(C)} = 1 + \beta C_a + O(C_a^2) \dots (29)$$

ただし、 $f(C) < 1$ であるから $\beta > 0$ である。したがって、式 (27) は

$$\bar{\psi} = \frac{L_0}{L} = \frac{(1 + \beta C_a)}{2} \times [1 + \{1 + 4 B k_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2}] \dots (27 a)$$

である。

つぎに、乱れのエネルギー方程式 (11) を、やはり $y = \delta$ から $y = h$ まで積分する。[Diffusion] の項は積分によって消えるから

$$\int_{\delta}^h \rho_a \cdot \frac{U_*^3}{k} \cdot \frac{1}{y} \left[\int_{y/h}^1 \frac{\rho}{y/h} \frac{d}{d(h)} \left(\frac{y}{h} \right) \right] dy = a_1 \int_{\delta}^h (1 - \alpha_1^3 C) \frac{\bar{u}^3}{L} dy + \rho_0 (r-1) v_p g \int_{\delta}^h C dy \dots (30)$$

である。上式の左辺の摩擦応力項は、直線変化と近似してよいから、濃度 C をその断面の平均 C_a とそれとの差 C_* とにわけて、式 (30) を変形すれば、

$$\begin{aligned} & \rho_a \frac{U_*^3}{k} \left(\ln \frac{h}{\delta} - 1 \right) \\ &= a_1 (1 - \alpha_1^3 C_a) \int_{\delta}^h \frac{(\bar{u})^3}{L} dy - a_1 \alpha_1^3 \int_{\delta}^h C_* \frac{(\bar{u})^3}{L} dy \\ & \quad + \rho_0 (r-1) g v_p C_a (h - \delta) \\ &= a_1 U_*^3 (1 - \alpha_1^3 C_a) \int_{\delta/h}^1 \left(\frac{L_0}{L} \right) \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_0} \right)^3 \\ & \quad \times \left\{ \frac{h}{L_0} \cdot \frac{\bar{u}_0^3}{U_*^3} \right\} d \left(\frac{y}{h} \right) \\ & \quad + \rho_0 (r-1) g v_p C_a (h - \delta) \dots (30 a) \end{aligned}$$

となる。ただし

C_a = 断面平均濃度

$C_* = C - C_a$

$$C = C_\eta \left(\frac{h-y}{y} \cdot \frac{\eta}{h-\eta} \right)^Z *$$

$$Z = \frac{v_p}{k U_*}$$

C_η = ある基準の高さ $y = \eta$ における濃度

$$\alpha_1^3 = \alpha^3 \left\{ 1 + \int_{\delta}^h C_* / C_a dy \right\}$$

乱流構造の変化は、 C, δ, h, U_*, v_p などによって y 方向に一樣な割合で起こると考えているから、式 (30a) は

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &= \frac{a_1 (1 - \alpha_1^3 C_a)}{\rho_a \left(\ln \frac{h}{\delta} - 1 \right)} \cdot \left(\frac{L_0}{L} \right) \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_0} \right)^3 \int_{\delta/h}^1 \frac{h}{L_0} \cdot \frac{\bar{u}_0^3}{U_*^3} d \left(\frac{y}{h} \right) \\ & \quad + \frac{\rho_0 (r-1) g v_p C_a (h - \delta)}{\rho_a U_*^3 \left(\ln \frac{h}{\delta} - 1 \right)} \dots (31) \end{aligned}$$

となる。

ところで、式 (31) において、 $C \equiv 0$ の場合を考えれば、左辺は $1/k = 1/k_0$ であり、右辺では $L_0/L = \bar{u}_0/\bar{u} = 1$ 、 $C_a = 0$ であるから

$$a_1 \int_{\delta/h}^1 \frac{h}{L_0} \cdot \frac{\bar{u}_0^3}{U_*^3} \cdot d \left(\frac{y}{h} \right) = \frac{\rho_a}{k_0} \left(\ln \frac{h}{\delta} - 1 \right) \dots (32)$$

* たとえば応用水理学中 I p23, Z は今考えている k に関するが、補正係数 α_1^3 を求めるのであるから、ここでは k_0 を用いてよい。

の関係を得る。

また、乱流構造は断面内で一樣な割合で変化すると考えているから

$$\frac{L_0}{L} = \frac{k_0 f_1(y)}{k f_1(y)} = \frac{k_0}{k}$$

の関係があり (これは必ずしも $L = ky$ ではない)、その変化の無次元パラメーターは、式 (31) より

$$s_2 = \frac{\rho_0 (r-1) g v_p C_a (h - \delta)}{\rho_a U_*^3 \left(\ln \frac{h}{\delta} - 1 \right)} \dots (33)$$

であるから、

$$\frac{L_0}{L} = (1 - \alpha_1^3 C_a) \frac{\rho_0}{\rho_a} \cdot \left(\frac{\bar{u}}{\bar{u}_0} \right)^3 \cdot \frac{L_0}{L} + k_0 s_2$$

すなわち

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_0} = \left(\frac{1}{1 - \alpha_1^3 C_a} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_a}{\rho_0} \right)^{1/3} \left[1 - \frac{L}{L_0} \cdot k_0 s_2 \right]^{1/3} \dots (34)$$

の関係を導くことができた。これに式 (27 a) の関係を代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{\bar{u}_0} &= \left(\frac{1}{1 - \alpha_1^3 C_a} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_a}{\rho_0} \right)^{1/3} \\ & \quad \times \left[1 - \frac{2 k_0 s_2}{(1 + \beta C_a) [1 + \{1 + 4 B k_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2}]} \right]^{1/3} \dots (35) \end{aligned}$$

となる。

こゝに s_1 と s_2 の比として新しいパラメーター σ を

$$\sigma = \frac{s_2}{s_1} = \frac{\ln \frac{h}{\delta}}{\left(\ln \frac{h}{\delta} - 1 \right)} \dots (36)$$

のように定義できる。 σ は一般には s_2 を越えることは少ない。

したがって、式 (27 a), (35) は、つぎのようになる。

$$\frac{L_0}{L} = \frac{(1 + \beta C_a)}{2} [1 + \{1 + 4 B k_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2}] \dots (37 a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}}{\bar{u}_0} &= \left(\frac{1}{1 - \alpha_1^3 C_a} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho_a}{\rho_0} \right)^{1/3} \\ & \quad \left[1 - \frac{2 k_0 \sigma s_1}{(1 + \beta C_a) (1 + \{1 + 4 B k_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2})} \right]^{1/3} \dots (37 b) \end{aligned}$$

つぎに、渦の寿命時間 t_* については、 $t_* \approx L/\bar{u}$ であるから、式 (27 a), (35), (36) よりつぎの関係を得る。

$$\begin{aligned} \frac{t_*}{t_{*0}} &= \frac{L}{L_0} \cdot \frac{\bar{u}_0}{\bar{u}} \\ &= \frac{2}{(1 + \beta C_a) [1 + \{1 + 4 B k_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2}]} \\ & \quad \times (1 - \alpha_1^3 C_a)^{1/3} \cdot \left(\frac{\rho_a}{\rho_0} \right)^{1/3} \\ & \quad \times \left[1 - \frac{2 k_0 \sigma s_1}{(1 + \beta C_a) [1 + \{1 + 4 B k_0 (1 + \beta C_a) s_1\}^{1/2}]} \right]^{-1/3} \dots (37 c) \end{aligned}$$

特に、中立的に浮遊した粒子の場合、すなわち $s = 0$ 、 $C \neq 0$ 、 $C_a = C$ では、式 (37 a), (37 b), (37 c) の特別な場合として乱流構造はつぎのように変化する。

$$\frac{L_0}{L} = 1 + \beta C \quad (\beta > 0) \dots (38 a)$$

$$\frac{\bar{u}}{\bar{u}_0} = \left(\frac{1}{1 - \alpha^3 C} \right)^{1/3} \quad (\alpha \approx 1) \dots\dots\dots (38b)$$

$$\frac{t_{*0}}{t_{*}} = \frac{(1 - \alpha^3 C)^{1/3}}{1 + \beta C} \dots\dots\dots (38c)$$

(4) 二、三の検討

ここで得られた理論式で示される乱流構造変化の特徴を検討してみる。まず、渦の平均径は濃度増加とともに減少する。乱れの強さは、粒子の比重が1に近ければ、濃度とともに増加の傾向を示すが、比重が1よりはなれている場合は式(37b)右辺の第3因子の影響が強くなってきて、濃度とともに減衰する。また志村氏(1957)が提出した仮説—“乱れの強さは、粒子の浮遊によって第一次的には不変であり、まず渦径のみが縮小してエネルギー平衡を保ち、その平衡が保たれぬほど粒子濃度が増加したときに乱れの強さに変化が生ずる”—は、Ippen教授の実験とも考え合わせて必ずしも適当でないと思う。椿氏(1955)の用いた仮説—“渦の寿命時間は一定である”—も、式(37c)、(38c)やMITの実験とは一致しない。最近の気象学ではこのLettau(1949)、Ogura(1952)の方法より Monin-Obukhoff(1954)、Kao(1959)や山本・Panofsky [正野氏—羽室氏]らの次元

解析的理論が有力である。

しかし、この山本・Panofskyの方法を固一液二相流の場合に修正拡張した理論を導いたが、これでは実験結果を説明しえなかった。

3. 実験との比較

(1) 中立浮遊粒子の場合

浮遊粒子の乱れにおよぼす種々の影響のうち比重の与える影響を明らかにし、また従来の理論の妥当性を調べるために Elata and Ippen(1961) はつぎのような実験を行なった。

水路は、長さ 40 ft, 幅 2 1/2 ft, 高さ 15 in のアルミニウム板を底面にはった開水路を用いた。固体粒子には、Dylene Polystyrene No. 60 (Koppers Co. 製) を使用した。粒度特性は、その 85% が 100~155 μ の間にあるようなそろったものであり、単位質量は $\rho = 1.05 \text{ gr/cm}^3$ 、沈降速度は $v_p = 0.1 \text{ cm/sec}$ である。粒子が水になじむように Wetting agent で処理した。平均流速測定には Prandtl 管、乱れ流速の測定には total-head-tube 型の乱流計(先端の内径 1.2 mm, 外径 3.8 mm)を用いた。また、粒子濃度は Sediment sampler によって測定した。

この場合、粒子はほぼ中立的に断面内に一樣に浮遊しており、浮遊のためのエネルギーの供給を必要としないから、従来の理論や解釈からは、乱流構造の変化は生じないはずである。しかし、その結果は図-1, 2 に示すように、やはり Karman 定数は粒子濃度の増加とともに減少し、さらに驚くべきことに乱れの強さは濃度とともに増加していることが明らかとなった。

本論文の 2. に述べた理論の特別な場合として、中立浮遊粒子による乱流構造の変化は、式(38a), (38b), (38c) で与えられる。Elata and Ippen の実験とこれらの理論式とを比較すれば、図に見られるようにきわめてよく一致していることがわかる。乱れの強さに関する測定は実験値が少なく測定も困難であるから確かな比較はできないが、ほぼ 1 に近く、1 よりやや大きい値であろうと理論的に予想された α を 1.18 としてよく実験値と一致することは、本理論の妥当性を立証するのに十分であると考えられる。なお、2. でもふれたように乱れの特性は断面内で一樣に変化するのではなく、 y/h にも関係することは、濃度の大きいところでの実験値のちらばりが大きいことから明かである。図-3 は粒子濃度による渦の寿命時間の変化を示してお

図-1 中立浮遊粒子流の濃度増加によるカルマン定数の減少—本理論と Elata and Ippen の実験との比較—

Fig. 1 The reduction of the Karman constant with increasing concentration for flow with suspensions of neutrally buoyant particles. Comparison of the theory with experiments by Elata and Ippen.

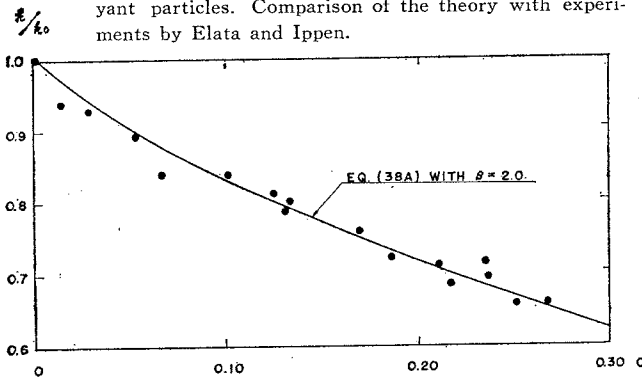


図-2 中立浮遊粒子流の濃度増加による“乱れの強さ”の増加—理論式と Elata and Ippen の実験との比較—

Fig. 2 The increase in turbulent intensity with increasing concentration for flow with suspension of neutrally buoyant particles. Comparison of the theory with experiments by Elata and Ippen.

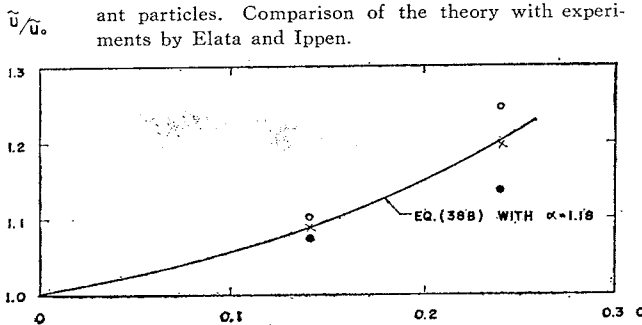


図-3 中立浮遊粒子流における“渦の寿命時間”の減少と粒子濃度の関係を示す理論曲線

Fig. 3 The change of the decay time of eddy with increasing volume concentration for flows with suspension of neutrally buoyant particles, as indicated by the theory.

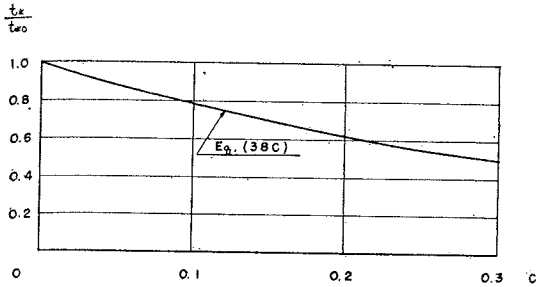
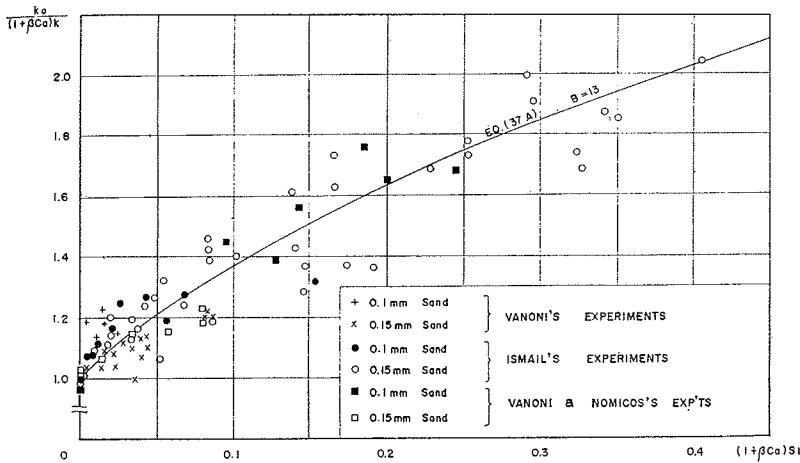


図-4 土砂流の濃度とカルマン定数の減少との関係— s_1 は濃度に関する無次元パラメーター—

Fig. 4 The reduction of the Karman constant with increasing volume concentration of sediment-laden flows.



り、中立浮遊粒子の場合には t_* は濃度とともに減少する。

(2) 土砂流の場合

土砂流の場合の Karman 定数の変化については、Vanoni (1944), Ismail (1951), Vanoni and Nomicos (1959) の実験がある。彼らの実験資料を再整理して、本論文の理論と比較したのが図-4である。整理方法は、椿氏・志村氏とはほぼ同一である。ただ底面砂澱の相当粗度 k_s を推定するのに、志村氏は管路の砂粒子を浮遊しない場合の摩擦損失公式を用いたが、ここでは流速分布公式

$$\frac{U}{U_*} = \frac{1}{k} \ln \frac{y}{k_s} + B \dots\dots\dots(39)$$

より導かれる摩擦損失公式

$$\ln \frac{h}{k_s} = \left(\frac{U_0}{U_*} - B + \frac{1}{k} \right) k \\ = \left(\sqrt{\frac{8}{f}} - B \right) k + 1 \dots\dots\dots(40)$$

を用い、これに実験で求められた $h, k, U_0/U_*$ または f を代入してこれから k_s を推定した。 B は $U_*k_s/\nu < R_{*s}$ (=5) の水理学的になめらかな範囲では

$$B = 5.5 + \frac{1}{k} \ln \frac{U_*k_s}{\nu} \dots\dots\dots(41 a)$$

であり、 $U_*k_s/\nu > R_{*s}$ (=70) の完全に粗い粗面では $B = 8.5 \dots\dots\dots(41 b)$

である。その中間の遷移領域では

$$B = f_n(U_*k_s/\nu) \dots\dots\dots(41 c)$$

である (例えば、Schlichting “Boundary Layer Theory” p 421 Fig. 20-20)。

したがって、式 (40) より求められる k_s が水理学的になめらかな領域に入るときは、 $R_{*s} = \delta_s U_* / \nu$ で与えられる粘性層の厚さ δ_s を δ に採る。 R_{*s} としては、Ismail

にしたがって5ではなく、やや大きい11.6を用いた。 k_s が完全に粗い範囲にあれば $\delta = k_s$ とした。その中間では、 δ の推定に誤差があり、ことに U_*k_s/ν が20から50ぐらい位になる場合は不確かさはまぬがれない。幸い Vanoni の実験は $U_*k_s/\nu > R_{*s}$ またはそれに近い範囲にあり、Vanoni and Nomicos の実験の Run 7, 8, 8 a~d は $U_*k_s/\nu < R_{*s}$ またはそれに近い範囲、Run 5, 6 a~c は $U_*k_s/\nu > R_{*s}$ またはそれに近い状態に入っている。

Ismail の実験は、投入土砂量も多く、 k_s は広い範囲にわたっている。その実験値のうち数個の δ の推定の誤差はかなり不確かとなった。また、Vanoni の実験のうち Run 1~13 では Table 3 で $k_0 = 0.372$ と記しているが、彼の論文の Fig. 6 の実験値を検討すればむしろ $k_0 = 0.40$ としたほうがよいので整理にはこの値をとった。

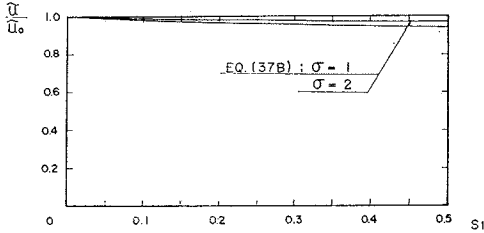
このような事情にもかかわらず、図-4 に示された理論と実験の一致はかなりよいと思われる。土砂流の場合には、一般に C_a は十分小さく投入土砂量の多い Ismail の場合でも C_a は 0.01 以下であり、 $(1 + \beta C_a)$ は 1 に等しいと考えてよい。それゆえに、志村氏論文の 図-1, 2

の横軸 $\frac{C_a(r-1)g\nu\rho(h-\delta)}{U_*^3 \left(\ln \frac{h}{\delta} - 1 \right)}$ と本論文の 図-4 の横軸

$(1 + \beta C_a)s_1$ は、同一種類のもと見なしてよい。 k_0/k 対 s_1 の関係は直線ではなく、実は式 (27 a) もしくは

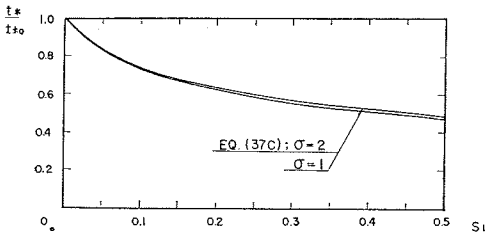
図一五 土流濃度の増加と“乱れの強さ”の減少との関係を示す理論曲線 (“乱れの強さ”の強さの減少はきわめて小さい)

Fig. 5 The gradual decrease in turbulent intensity of sediment-laden flows with increasing concentration, as indicated by the theory.



図一六 土砂流の濃度増加と“渦の寿命時間”の減少を示す理論曲線

Fig. 6 The rather rapid decrease in the decay time of eddy for sediment-laden flow with increasing concentration, as indicated by the theory.



(37 a) で与えられる関数関係にあるのである。ことに、 s_1 が 0 に近いところすなわち浮遊砂の少ない場合に k の急激な減少が生じている点は注目すべき点である。

乱れの強さ \bar{u}^2 や渦の寿命時間 t_* に関する実験はないが、 C_a が無視されるくらいに小さい一般の土砂流の場合についての理論曲線を 図一5, 6 に示した。この理論によれば土砂の浮遊によって t_* が一定に保存されるのではなく、 \bar{u} が第一次的には不変なのでもない。 \bar{u} や t_* の変化は、濃度 C_a のみでなく、浮遊粒子の比重にも大きく支配されその変化は複雑である。図一5 に示すように土砂流では、 \bar{u} はほぼ一定と考えてよく、志村氏の理論に用いられた仮定をほぼ認めることができる。彼の理論で与えられた k の変化を現わす式は、本論文の理論の第一近似である。

4. 結 語

著者は本論文において、粒子を浮遊した場合の乱れのエネルギー平衡方程式を見かけの密度勾配の形成ということ以外に、固体としての粒子の存在を十分考慮して新たに導き [式 (11)], また乱れの加速度平衡方程式を粒子浮遊流の場合に拡張し [式 (21)], この二方程式から流れの乱流構造の変化を統一的に表わす式 (37a), (37b), (37c) を導き、その特別な場合として従来の理論や概念

では説明しえなかった中立浮遊粒子の場合の式 (38 a), (38 b), (38 c) を得た。

またこの理論は、乱流構造に関するなんらの仮説をもふくんでいないことや次元解析の方法を用いていないことを特徴としている。そのため乱れの強さ、渦の寿命についても固体粒子浮遊の影響を明らかにしえた。なお Karman 定数の変化を表わす式 (37 a) は広い土砂濃度範囲にわたって実験と一致している。

中立粒子浮遊について、④ Karman 定数が粒子濃度とともに減少すること、式 (38 a), ⑤ 乱れの強さが粒子濃度とともに増加すること、式 (38 b), ⑥ 渦の寿命時間も粒子濃度によって変化すること、式 (38 c), が理論的に明らかにされ、MIT における実験とよく一致することが確かめられた。

一般の固体粒子を浮遊した固一液二相流については、つぎの結論が導かれた。④ Karman 定数の変化を支配するのは、パラメーター s_1 [式 (28)] と濃度 C の二要素である。⑤ 乱れの強さは粒子濃度の増加によってほとんど減衰しないと考えられる。しかし、この点については、実験の報告がないので今後の検討が期待される。

最後に、本論文の作成にあたり、既往の種々の実験資料の再整理という煩瑣な仕事に助力をいただいた電力中央研究所・資料室の平尾 陸嬢に感謝の念を表したいと思います。

記 号 (NOMENCLATURE)

- A_1, A_2, \dots, A_5 : 定数 (Constants)
- a_1 : 定数 (A constant)
- a : $36 \mu / (2 \rho_p + \rho_0) d^2$
- b : $3 \rho_0 / (2 \rho_p + \rho_0)$
- B : 定数 (A constant)
- C : 粒子の体積濃度 (Volume concentration of suspended particles)
- C_a : 断面平均粒子濃度 (Mean value of C over the cross-section)
- $C_* = C - C_a$
- C_η : ある基準の高さ $y = \eta$ での粒子濃度 (Value of C at some reference level $y = \eta$)
- c : C の変動量 (Fluctuation of volume concentration from the time mean value C)
- $C_f = 2(U_* / U_*)^2$ 摩擦係数 (Friction coefficient)
- D : エネルギー逸散率 (Rate of energy dissipation)
- D_p : 粒子を浮遊する流れの水の粘性によるエネルギー逸散率 (Rate of energy dissipation in flow with suspended particles)
- \bar{D} : 断面平均エネルギー逸散率 (Mean value of D over the cross section)
- d : 粒子径 (Diameter of a suspended particle)
- f_n : ある関数 (A function)
- g : 重力の加速度 (Acceleration of gravity)
- h : 水深 (Depth of flow)
- I : 水路勾配 (Inclination of channel)

k : Karman 定数 (Karman constant)
 k_0 : 粒子を浮遊しない場合の Karman 定数
 (Karman constant of flow with no suspended particles)
 k_s : 相当粗度 (Equivalent roughness)
 L : 渦の平均径 (Mean eddy size)
 L_0 : 粒子を浮遊しない場合の平均渦径 (Value of mean eddy size when $C=0$)
 l : 混合距離 (Mixing length)
 l_0 : 機械的摩擦応力にもとづく混合距離 (Mixing length due to frictional turbulence)
 l_c : 濃度差による混合距離 (Mixing length of convective turbulence due to concentration gradient)
 l_h : 温度差にもとづく混合距離 (Mixing length of convective turbulence due to temperature gradient)
 m_a : 断面平均重量濃度 (Mean practice concentration over a cross section in g/l)
 p : 圧力 (Pressure)
 $q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$
 s_1, s_2 : 粒子を浮遊した流れの乱流構造に関する特性パラメーター [式 (28), (33),] (Turbulent characteristic parameters represented by Eqs. (28) and (33), respectively)
 T : 大気温度 (Atmospheric temperature)
 t : 時間 (Time)
 t_* : 渦の寿命時間 (Life time of an eddy)
 U, V, W : 速度成分 (Components of velocity)
 u, v, w : 変動速度成分 (Components of fluctuating velocity)
 U_0 : 断面平均流速 (Cross-sectional mean value of U)
 U_1 : 表面流速 (U at $y=h$)
 $U_* = \sqrt{\tau_0/\rho_0}$ 摩擦速度 (Friction velocity)
 u_p : 粒子の変動速度 (Fluctuating velocity of a suspended particle)
 $\bar{u} = \sqrt{\bar{u}^2}$
 \bar{u}_0 : 粒子を浮遊しない場合の \bar{u} (\bar{u} when $C=0$)
 v_p : 粒子の沈降速度 (Settling velocity of a particle)
 W_p : 粒子の回転や周囲の流体との相対運動のためのエネルギー逸散率 (Energy dissipation rate due to the rotation and the relative motion of suspended particles)
 w_p : 粒子一個あたりの W_p (W_p per a particle)
 $Y = -g$
 $Z = v_p/kU_*$
 x, y, z : 座標 (Coordinate)
 α : ほぼ 1 に近く 1 よりやや大きい定数 (A constant which would be nearly equal to and slightly greater than unity)
 $\alpha_1 = \alpha^3 \left\{ 1 + \int_0^h (C_*/C_a) dy \right\}$
 β : 正の定数 (A positive constant)
 $\gamma = \rho_p/\rho_0$
 Δ : 水深に相当する長さの単位 (Unit of length

corresponding to flow depth)
 δ : 粘性層の厚さまたは底面からの粗度の高さ
 (Thickness of a viscous sublayer or height of roughness element)
 ϵ_c : 濃度の交換係数 (Exchange coefficient of concentration)
 ϵ_m : 運動量交換係数 (Exchange coefficient of momentum)
 θ : 大気のパテンシャル温度 (Potential temperature of atmosphere)
 λ : 最小の渦径 (Minimum eddy size)
 μ : 水の粘性係数 (Viscosity of liquid phase)
 ν : 水の動粘性係数 (Kinematic viscosity of liquid phase)
 ρ : 流れの見かけの密度 (Specific density of the flow)
 ρ_0 : 水の密度 (Specific density of liquid phase)
 ρ_p : 粒子の密度 (Specific density of a particle)
 ρ_a : 粒子を浮遊した流れの断面平均の単位質量
 (Mean value of ρ over the cross section)
 σ : 式 (36) で定数されるパラメーター (A parameter defined by Eq. (36))
 ψ : 流れの渦径の変化を表わす関数 ($\psi = L_0/L$)
 τ : 摩擦応力 (Shearing stress)
 τ_0 : 底面での摩擦応力 (Shearing stress at the bottom of channel)

参 考 文 献 (REFERENCES)

- 1) Einstein, H.A. and Chien, N. : "Second approximation of the suspended load theory." Series 47, Issue No. 2 Univ. of California, Berkley, (1952)
- 2) Einstein, H.A. and Li, H. : "The viscous sublayer along a smooth boundary." Proc. ASCE [EM 2] (1956)
- 3) Elata, C. and Ippen, A.T. : "The dynamics of open channel flow with suspensions of neutrally buoyant particles." Technical Report No. 45, Hydrodynamics Laboratory, M.I.T. (1961)
- 4) Elliot, W.P. : "A comparison of some approaches to the diabatic wind profiles." Trans. A.G.U., 38, [1], 21/24, (1957)
- 5) Goldsmith, H.L. and Mason, S.G. : "Particle motions in sheared suspensions. XIII. The spin and rotation of disks." J. Fluid Mechanics, 12, [1], 88/96, (1962)
- 6) Hino, M. : "The structure and diffusion coefficient of turbulent shear flows." Technical Note C-6103, Central Research Institute of Electric Power Industry, (1961)
- 7) Hinze, J.O. : "Turbulence" 352/364 McGraw-Hill, (1959)
- 8) Ismail, H.M. : "Turbulent transfer mechanism and suspended sediment in closed channel." Proc. A.S.C.E. 77 (1951); Trans. A.S.C.E. 117 409/446 (1952)
- 9) Jeffery, G.B. : "The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid." Proc. Roy. Soc. A, 102, 161/179, (1922)
- 10) Kao, S.K. : "Turbulent transfer in the boundary layer of a stratified fluid." J. of Meteorology 16, 497/503, (1959)
- 11) Karman, T. von : "The fundamentals of the statistical theory of turbulence." Jour. Aero. Sci. 4, [4],

- (1937)
- 12) Lettau, H. : "Isotropic and non-isotropic turbulence in the atmospheric surface layer." Geophys. Res. Pap. No. 1, AFCRC, 84, (1949)
 - 13) Lumley, J.L. : Discussion of the paper by S.L. Soo and C.L. Tien. Trans. ASME, J. App. Mech., 27, [4], 756, (1960)
 - 14) Ogura, Y. : "Note on the wind velocity profile in the non-adiabatic atmosphere." J. of Met. Soc. of Japan. 30, 329/342 (1952)
 - 15) 室田 明 : "浮砂濃度と流速分布の関連について", 土木学会誌 38 卷 11 号, (1953)
 - 16) Rossby, C.-G. and Montgomery, R.B. : "The layer of frictional influence in wind and ocean currents." Papers in Phys., Ocean. Meteor., M.I.T. and Woods Hole Ocean Inst. 3, [3], 101, (1935)
 - 17) 志村博康 : "浮遊砂を有する水流の諸特性について", 土木学会論文集 第 46 号 (1957)
 - 18) Soo, S.L. and Tien, C.L. : "Effect of the wall on two-phase turbulent motion." Trans. A.S.M.E. Ser. E, J. App. Mech., 27 [1] 5/15, (1960)
 - 19) Sternberg, J. : "A theory for the laminar sublayer of a turbulent flow", Rep. No. 1127, Ballistic Research Laboratories, (1961)
 - 20) 橋東一郎 : "浮遊流砂が流れにおよぼす影響について", 土木学会誌 40 卷 9 号, 449/458, (1955)
 - 21) Vanoni, V.A. : "Transportation of suspended sediment by water" Proc. A.S.C.E. 70, (1944)
 - 22) Vanoni, V.A. and Nomicos, G.N. : "Resistance properties of sediment-laden streams." Trans. A.S.C.E. 1140/1175, (1961)
 - 23) Monin-Obukhoff : Akademiya Nauk SSSR, Geofizicheskii Inst. Trudy, No. 24, 163, (1954)
 - 24) Syono, S. and Hamuro, M. : "Notes on the wind profile in the lower of a diabatic atmosphere". Jour. Meteor. Soc. Japan. Ser II. 40, [1], (1962)
(原稿受付 : 1962. 8. 3)
-

THE CHANGES IN TURBULENT STRUCTURE OF FLOW WITH SUSPENDED SOLID PARTICLES

By Dr. Eng., Mikio Hino, C. E. Member.

1. INTRODUCTION

The flows with suspended material are affected by two opposing actions; the one is formation of dunes and sand ripples on the bottom of channel, which may increase the roughness several fold because of the additional form resistance; and the other, the increase in the gradient of velocity profile, i. e. the decrease in the von Karman constant which reduces the head loss coefficient. As a result of the combined action of the two opposing effects, the flood flows exhibit complicated behaviours.

As to the latter effect, V. A. Vanoni (1944) was the first to give precise experimental results. His study was followed by the experiments of H. M. Ismail (1951), V. A. Vanoni and G. N. Nomicos (1959) and others. A theoretical explanation on the effect has been given by H. A. Einstein and N. Chien (1952) who considered that the increased energy consumption needed to suspend sediment particles should be supplied from the mean energy of the flow and thus the ratio of the energy to suspend sediment and the mean energy dissipation rate should have a close correlation with the decrease in the von Karman constant. This concept has been further improved by V. A. Vanoni and G. N. Nomicos (1959). However, the explicit functional relationship was not given by them.

T. Tsubaki (1955) formulated the relationship, starting from the energy equation of the flow which considers only the apparent change in the density of liquid, and assuming the invariance of the decay time of eddies in the sediment-laden streams. Also, H. Shimura (1957) using the energy equation and assuming the invariance of the turbulent intensity derived a formula which fits fairly well with the experimental results.

According to these explanations and theories, the flows loaded with neutrally buoyant particles may suffer no changes in the velocity profile

and the turbulent intensity, because there occurs no need for the increase in the energy to suspend sediments.

Recently, C. Elata and A. T. Ippen (1961) submitted a fundamental question to the problem. They have shown experimentally that the Karman constant of the flow with suspensions of neutrally buoyant particles decreases as the volume concentration of particles is increased and that the turbulent intensity does increase contrary to the commonly accepted concept. These experimental results cannot be understood from the theories cited above.

In this paper, the author derives firstly two fundamental equations; i. e. the energy equation for flows with suspended particles, which takes into consideration all the effects of suspended particles, and the acceleration balance equation of turbulent motion. Using these equations, the general formulae have been derived for the changes in the characteristic quantities such as the Karman constant, the turbulent intensity and the decay time of eddy.

Fairly good agreements between the theory developed here and experimental results have been shown.

2. THEORY :

The energy equation for turbulent flow is expressed by Equation (2) or, for the ordinary flow with enough high Reynolds number, by Equation (4). The numbers of equations described in this abstract are those used in the Japanese text and the list of symbols is given alphabetically in the appendix of the text.

If the flow suspends solid particles, several terms should be added to the energy equation. The shearing stress, τ , is now represented by Equation (6). The rate of energy to suspend particles which is given by Equation (7) should be added to the right hand side of Equations (2) and (4). The energy dissipation term which is the last one on the right hand side of

Equation (2), is modified to Equation (10), which means that the effective volume of the liquid phase contributing to the turbulent dissipation is decreased by the existence of solid particles. A constant α is the ratio of the effective radius to the actual one of a particle and pressumable to be nearly equal to and slightly greater than unity. A solid particle rotates and moves relatively to the liquid phase and the additional energy dissipation occurs which is given by Equations (12) and (13) or (14). The resulting modified energy equation for flow with suspended particles is represented by Equation (11). In general, W_p is much smaller than the loss of dissipation rate and we can neglect W_p compared to the loss in D_p . The diffusion term is eliminated when we consider mean behaviours of the flow over the cross-section.

The turbulence of sheared flow with the density gradient may be caused by mechanical friction and buoyancy action. Total turbulence may therefore be considered as the combination of frictional turbulence and convective turbulence. A formulation of this concept has been attempted by many researchers in this field. S.-K. Kao (1959) has given in the form of acceleration as described by Equation (18). For flows with suspended sediment, the acceleration equation is derived as given by Equation (19) or (21) where a function $f_n(C)$ represents the effect of collision between solid particles and a certain liquid mass moving as a whole or an eddy, and should be smaller than unity.

The changes of the turbulent structure are given as functions of the volume concentration C , a non-dimensional variable s which is defined later and the relative distance from the channel bottom y/h , as expressed by Equations (22 a), (22 b) and (23). Here we assume the effect of the relative distance is negligible compared to that of C and s . Integration of Equations (11) and (12) over the cross section gives after

several manipulations Equations (27 a) and (35), the variables s_1 and s_2 which appear in these equations are almost equal to each other in ordinary flow conditions and combined by a parameter σ of Equation (36). Thus, the variations in the Karman constant and the intensity of turbulence are given by Equations (37 a) and (37 b), respectively. The variation in the decay time of turbulent eddy is given by Equation (37 c).

In a special case of the flow with neutrally buoyant particles, these equations reduce to Equations (38a), (38 b) and (38 c).

3. COMPARISON WITH

EXPERIMENTAL RESULTS

The theory derived above is compared with experimental results. Firstly, Equations (38 a) and (38 b) are compared with the experiments by C. Elata A. T. Ippen (1961). Figs. 1 and 2 show fairly good agreements between the theory and the experiment. It is remarkable that the constant α presumed theoretically to be nearly equal to and slightly greater than unity has been determined experimentally to be $\alpha=1.18$. The scatters of the experimental points of turbulent intensity are considered due partly to the difficulty of experiment and partly to the fact that the effect of the relative distance y/h on the changes of turbulent structure becomes large when the volume concentration C is increased.

The comparisons with several experimental results for the case of sediment-laden streams are shown in Fig. 4. Agreement between the theory and the experiments is also good. The values of C_a , the mean volume concentration of sand particles, are of order or below 0.01 for the flow condition of experiments cited above and thus the term $(1+\beta C_a)$ can be considered to be equal to unity. Figs. 5 and 6 show the theoretical curves of \bar{u}/\bar{u}_0 v. s. $(1+\beta C_a) s_1$ and t_*/t_{*0} v. s. $(1+\beta C_a) s_1$, respectively.

(Received by the Society on 3 August 1962)