

移動荷重をうける相対2辺単純支持, 他の2辺自由なる 直交異方性板の振動性状について

平 井 一 男*

要 旨 本研究は幅員の大きい橋を, 両端単純支持された直交異方性板とみなし, この上を移動荷重が走行するとき, 橋梁に生じる動的たわみを求める基礎方程式を誘導し, 特別な場合として, 一定荷重が一定速度で移動するとき, その直交異方性板に生ずる振動モード, 固有振動数の大きさが荷重の走行位置, 測定点, 板の形状によってどのように変化するかを調べたものである。

1. ま え が き

橋梁上を自動車などの移動荷重が走行するとき橋に生じる動的影響を調べる研究は, 約100年ほど以前から行なわれていることであって, 多くの論文が発表されてきているけれども, これらの論文においては, 主として橋をはりと考え, はりの微分方程式をもととして解析する方法がとられている。しかし, 橋梁の中には, 街路橋のように, スパンにくらべて幅員の大きい橋があり, これらの橋を, 単にはり理論を用いて, 幅員方向の影響を全く考慮せずに解析することは, かなり大たんな仮定であると考えられる。事実, この種の橋の固有振動数ははり理論を用いて解析してみると, 実測値とかなり異なった値となる¹⁾から, このような仮定は適当でないことが推察される。

以上のようなわけで, 最近幅員の大きい橋を解析するには, 幅員方向の要素も考慮できる板理論を用いる方法がとられるようになり, この理論による研究も, 二, 三発表^{2), 3), 4), 5)}されてきている。この板理論を用いた解析法が, 幅員の大きい橋を解析する合理的な方法であることは, 橋の固有振動数について考えてみると, 理論と実測値がよく一致していることからわかる。

さて, これまでこの板理論を使用した研究はほとんどの場合, 固有振動数とその振動モードの解析のみを取り扱い, これと実験値との比較を行なっているが, 実際の場合, 移動荷重が作用するとき橋梁に生じる振動モードの中には, 理論的には出現が予想されるものであっても実際の問題として無視できるものが大部分であり, これら各振動モードがどのような大きさの割合で発生するかについて解析を行なった論文は見あたらないようである。特に, 直交異方性板について上記のような研究を行なった論文は見あたらないようである。

以上のようなわけで, この研究は, 両端単純支持他の

2辺自由なる直交異方性板上を荷重が移動するときの運動方程式を一般の場合について誘導し, つぎに特別な場合として, 一定荷重が一定速度で走行するとき橋梁に生じる振動の大きさが, 荷重の走行位置・たわみの測定位置・板の形状によって, どのように変化するかを数値計算により調べてみたものである。ここに得られた解は, 厳密解ではあるが, 一般にこの種の無限の自由度を持つ構造物では, 解析上その解が無限の項数をもつ級数の和として求められるので, 数値計算にさいしてはいくらかの近似計算を行なった。

2. 基礎方程式の誘導

直交異方性板が移動荷重をうけるとき, その任意の点のたわみのレスポンスを求める運動方程式を誘導することは, 一般にかなりの困難をともなうことが予想される。

ここでは, 直交異方性板が最初から移動荷重をうけると考えないで, まず任意の固定点に集心力 $P(t)$ が作用したとき, 任意の点におけるレスポンスを求める運動方程式を誘導し, その運動方程式をもととして, 移動荷重が作用する問題に拡張する方法をとった。

なお, ここでは直交異方性板は, 線形振動を行なうものと考えて解析を行なった。

(1) 直交異方性板の振動モード・振動数方程式^{3), 4)}

直交異方性板の自由振動の基礎微分方程式は, 式(1)にて与えられる。

$$D_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに

$$2H = \nu_x D_y + \nu_y D_x + 4C, \quad 2C = (1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}) \sqrt{D_x D_y}$$

ここで, 式(1)において

$$W = w'(x, y) \sin \omega_n t \quad (\omega_n : \text{固有振動数}) \quad \dots\dots(2)$$

と変形すると

$$\frac{\partial^4 w'}{\partial x^4} + 2\kappa \sqrt{\frac{D_y}{D_x}} \frac{\partial^4 w'}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{D_y}{D_x} \frac{\partial^4 w'}{\partial y^4} - \frac{\rho \omega_n^2}{D_x} w' = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

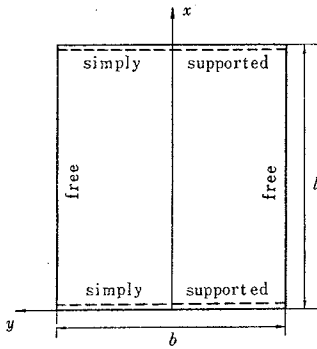
ここに, $\kappa = H / \sqrt{D_x D_y}$

いま, 図-1 に示すように座標軸をとると, 境界条件は式(4)にて与えられる。

$$x=0, x=l \text{ において}$$

* 正員 熊本大学助教授 工学部応用力学教室

Fig. 1 Orthotropic Plate



$$\left\{ \begin{array}{l} w' = 0 \\ M_x = -D_x \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} \right) = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4.1)$$

y = ±b/2 において

$$\left. \begin{array}{l} M_y = -D_y \left(\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} \right) = 0 \\ V = -D_y \left\{ \frac{\partial^3 w'}{\partial y^3} + \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \left(2\kappa - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \frac{\partial^3 w'}{\partial y \partial x^2} \right\} = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (4.2)$$

式(4.1),(4.2)の境界条件を満足する微分方程式(3)の解として式(5)を考える。

$$\varphi_{mm'} = \varphi_{m'}(y) \sin(m\pi x/l) \dots\dots\dots (5)$$

ここに, m, m' : それぞれ x, y 方向の振動次数

式(5)は, すでに式(4.1)の境界条件を満足しているから, 式(5)を式(3)に代入し, 式(4.2)を満足するようにして振動数方程式および振動モード $\varphi_{mm'}$ を求めると, 式(6)~(11)で与えられる。

a) 振動数方程式

① x軸に対して対称振動の場合, $\mu < 1, \kappa = 1$

$$\begin{aligned} & r' \left(r^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu_x \right) \left\{ r'^2 - \left(2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \right\} \cosh\left(\frac{r'b}{2}\right) \\ & \sinh\left(\frac{r'b}{2}\right) - r' \left(r'^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu_x \right) \left\{ r'^2 - \left(2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \right\} \\ & \sinh\left(\frac{r'b}{2}\right) \cosh\left(\frac{r'b}{2}\right) = 0 \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

② x軸に対して対称振動の場合, $\mu > 1, \kappa = 1$

$$\begin{aligned} & r' \left(r^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu_x \right) \left\{ r'^2 + \left(2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \right\} \\ & \cosh\left(\frac{r'b}{2}\right) \sin\left(\frac{r'b}{2}\right) + r' \left(r'^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} + \nu_x \right) \\ & \left\{ r'^2 - \left(2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \right\} \sinh\left(\frac{r'b}{2}\right) \cos\left(\frac{r'b}{2}\right) = 0 \dots\dots (7) \end{aligned}$$

③ x軸に対して逆対称振動の場合 $\mu > 1, \kappa = 1$

$$\begin{aligned} & r' \left(r^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} - \nu_x \right) \left\{ r'^2 + \left(2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \right\} \\ & \sinh\left(\frac{r'b}{2}\right) \cos\left(\frac{r'b}{2}\right) - r' \left(r'^2 \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} + \nu_x \right) \\ & \left\{ r'^2 - \left(2 - \nu_y \sqrt{\frac{D_x}{D_y}} \right) \right\} \cosh\left(\frac{r'b}{2}\right) \sin\left(\frac{r'b}{2}\right) = 0 \dots\dots (8) \end{aligned}$$

ここに

$$r^2 = \mu + 1, r'^2 = \mu - 1, r = \alpha r, r' = \alpha' r'$$

$$\alpha = \left(\frac{m\pi}{l} \right) \left(\frac{D_x}{D_y} \right)^{1/4}, \mu = \left(\frac{l}{m\pi} \right)^2 \left\{ \frac{\rho \omega_n^2}{D_x} \right\}^{1/2}$$

b) 振動モード

① $\mu < 1$, x軸に対して対称振動

$$\varphi_{m1} = (A' \cosh ry + A'' \cosh r'y) \sin(m\pi x/l) \dots (9)$$

② $\mu > 1$, x軸に対して対称振動

$$\varphi_{m2} = (B' \cosh ry + B'' \cos r'y) \sin(m\pi x/l) \dots (10)$$

③ $\mu > 1$, x軸に対して逆対称振動

$$\varphi_{m3} = (C' \sinh ry + C'' \sin r'y) \sin(m\pi x/l) \dots (11)$$

すなわち式(6)~(11)により, 図-1に示される直交異方性板の振動モードと固有振動数が与えられるわけである。

今後, 簡単のために, 式(9),(10),(11)で与えられる振動モードを, それぞれ ①, ②, ③ のモードと呼ぶことにする。この振動モードは, $m' = 1, 2, 3$ のときスパン中央断面において, 図-3に示す形状を持つ振動モードである。

(2) 分布荷重が作用するときの運動方程式

前項に述べたように, 固有振動数と振動モードを式(6)~(11)により求めることができるので, これらをもととして, 分布荷重 $p(x, y, t)$ が作用するときの任意の点 (x, y) におけるレスポンスを求める運動方程式を誘導しよう。この理論は, はりの場合の運動方程式⁶⁾を直交異方性板に拡張したものである。

式(9),(10),(11)における振動モード $\varphi_{mm'}$ の振幅の大きさは自由にきめることができるので, あとの解析に便利ように式(12)に与えられる正規化条件を満足するようにその振幅の大きさを決める。

$$\iint_A \rho \varphi_{mm'}^2 dx dy = 1 \quad (A: \text{板の全面積}) \dots (12)$$

振動モード $\varphi_{mm'}$ が式(12)の正規化条件を満足しているとき, これを $\Phi_{mm'}$ と書くことにする。

直交異方性板が, 振動モード $\Phi_{mm'}$, 角速度 $\omega_{mm'}$ なる自由振動をしているときには, この板に分布している慣性力は

$$\mathcal{L}_{mm'} = \rho \Phi_{mm'}^2 \omega_{mm'}^2 \dots\dots\dots (13)$$

で表わされる。いま, 板に上式で示される mm' 次の振動モード $\Phi_{mm'}$ に対応する慣性力を作用させ, これと nn' 次の振動モード $\Phi_{nn'}$ に対応する変位とで仮想仕事をさせる。このときの仮想仕事 W_1 は次式で与えられる。

$$W_1 = \iint_A [\rho \omega_{mm'}^2 \Phi_{mm'}] \Phi_{nn'} dx dy$$

同様に, nn' 次の振動モード $\Phi_{nn'}$ に対応する慣性力 $\rho \omega_{nn'}^2 \Phi_{nn'}$ と, mm' 次の振動モードに対応する変位 $\Phi_{mm'}$ とで仮想仕事をさせると, このときの仮想仕事 W_2 は次式にて与えられる。

$$W_2 = \iint_A [\rho \omega_{nn'}^2 \Phi_{nn'}] \Phi_{mm'} dx dy$$

Betti's Law によって, $W_1 = W_2$ であるから

$$(\omega_{mm'}^2 - \omega_{nn'}^2) \iint_A \Phi_{mm'} \Phi_{nn'} \rho \, dx dy = 0 \dots (14)$$

したがって、式(12)を考慮すると

$$\left. \begin{aligned} m(m')=n(n') \text{ のとき } \iint_A \Phi_{mm'}^2 \rho \, dx dy &= 1 \\ m(m') \neq n(n') \text{ のとき } \iint_A \Phi_{mm'} \Phi_{nn'} \rho \, dx dy &= 0 \end{aligned} \right\} (15)$$

任意の構造物に外力が作用するとき、構造物に生じる振動は、その境界条件を満足する関数である必要があるが、式(9),(10),(11)で与えられる自由振動の振動モードは境界条件を満足するようにして決めた関数であったから、外力が板に作用する場合もやはり、自由振動と同じ振動モードがいくつか合成された振動を行なうことが予想される。したがって、外力が作用するとき任意の点(x,y)におけるレスポンスwは、式(16)のように振動モード $\Phi_{mm'}$ と時間関数 $\mathcal{D}_{mm'}(t)$ との積の和として表わすことができる。

$$\begin{aligned} w(t,x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} w_{mm'}(t,x,y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \mathcal{D}_{mm'}(t) \psi_{mm'} \Phi_{mm'}(x,y) \end{aligned} \dots (16)$$

ここに $w_{mm'}$ は mm' 次の振動モードに対応する振動の大きさを表わす関数である。また $\psi_{mm'}$ はあとに決定する常数である。

つぎに作用する外力 $p(x,y,t)$ は、式(17)で与えられるように、荷重の分布関数 $p'(x,y)$ と時間関数 $f(t)$ との積で与えられるものとする。

$$p(x,y,t) = p'(x,y) \cdot f(t) \dots (17)$$

この $p'(x,y)$ は x,y のみの関数であるから、式(13)で与えられる $\mathcal{L}_{mm'}(x,y)$ を使用して次式のように展開することにする。

$$\begin{aligned} p'(x,y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \psi_{mm'} \mathcal{L}_{mm'}(x,y) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \psi_{mm'} \omega_{mm'}^2 \rho \Phi_{mm'}(x,y) \dots (18) \end{aligned}$$

式(16),(18)における $\psi_{mm'}$ の値は以下の方法によって決定される。すなわち、式(18)の両辺に $\Phi_{nn'}$ をかけて積分すると、

$$\begin{aligned} &\iint_A p'(x,y) \Phi_{nn'} \, dx dy \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} \left\{ \psi_{mm'} \omega_{mm'}^2 \iint_A \Phi_{mm'} \Phi_{nn'} \rho \, dx dy \right\} \end{aligned}$$

したがって、式(15)の関係より $m(m')=n(n')$ の場合にのみ $\psi_{mm'}$ が決定できる。すなわち、

$$\psi_{mm'} = \iint_A p'(x,y) \Phi_{mm'} \, dx dy / \omega_{mm'}^2 \dots (19)$$

さて、外力 $p(x,y,t)$ をうける直交異方性板の基礎方程式は次式にて与えられる。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p(t,x,y) \dots (20)$$

式(20)に式(16),(17),(18)を代入すると式(21)が得られる。

$$\begin{aligned} &D_x \psi_{mm'} \mathcal{D}_{mm'} \frac{\partial^4 \Phi_{mm'}}{\partial x^4} + 2H \psi_{mm'} \mathcal{D}_{mm'} \frac{\partial^4 \Phi_{mm'}}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &+ D_y \psi_{mm'} \mathcal{D}_{mm'} \frac{\partial^4 \Phi_{mm'}}{\partial y^4} + \rho \Phi_{mm'} \frac{d^2 \mathcal{D}_{mm'}}{dt^2} \\ &= \psi_{mm'} \omega_{mm'}^2 \rho \Phi_{mm'} f(t) \dots (21) \end{aligned}$$

直交異方性板が自由振動をしているときには、

$$\begin{aligned} &D_x \psi_{mm'} \frac{\partial^4 \Phi_{mm'}}{\partial x^4} + 2H \psi_{mm'} \frac{\partial^4 \Phi_{mm'}}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &+ D_y \psi_{mm'} \frac{\partial^4 \Phi_{mm'}}{\partial y^4} = \rho \omega_{mm'}^2 \Phi_{mm'} \end{aligned}$$

の関係があるから、これを式(21)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m'=1}^{\infty} [\{ \ddot{\mathcal{D}}_{mm'}(t) + \omega_{mm'}^2 \mathcal{D}_{mm'}(t) \\ &- \omega_{mm'}^2 f(t) \} \rho \Phi_{mm'} \psi_{mm'}] = 0 \end{aligned}$$

上式の両辺に $\Phi_{nn'}$ をかけて積分を行ない、式(15)の関係を考慮すると次式となる。

$$\ddot{\mathcal{D}}_{mm'}(t) + \omega_{mm'}^2 \mathcal{D}_{mm'}(t) = \omega_{mm'}^2 f(t)$$

式(16)を上式に代入すると

$$\ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} = \omega_{mm'}^2 \psi_{mm'} \Phi_{mm'}(x,y) f(t)$$

上式に式(19)を代入すると、式(22)が得られる。

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} &= \left[\iint_A p'(x,y) \Phi_{mm'} \, dx dy \right] \\ &\cdot \Phi_{mm'}(x,y) f(t) \dots (22) \end{aligned}$$

式(22)は式(17)にて与えられる分布荷重 $p(x,y,t)$ が直交異方性板に作用するとき、点(x,y)に生じる mm' 次の振動モードの大きさを求める微分方程式である。

(3) 集中荷重が作用するときの運動方程式

いままでは分布荷重が作用するときのレスポンスを求める運動方程式を解いてきたが、つぎに集中荷重が作用する場合について考えてみる。

いま $P(t)$ なる大きさの集中荷重が、 $x=x_j, y=y_j$ の固定点 j に作用するものとする。この集中荷重を式で示すと、

$$p(x,y,t) = \delta(x-x_j) \cdot \delta(y-y_j) P(t)$$

ここに δ はディラックの衝撃関数と呼ばれるものである。このような荷重関数を使用すると、式(22)の右辺の積分は

$$\iint_A p'(x,y) \Phi_{mm'} \, dx dy = \Phi_{mm'}(x=x_j, y=y_j)$$

となるから、式(22)は式(23)となる。

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} &= \Phi_{mm'}(x=x_j, y=y_j) \\ &\cdot P(t) \dots (23) \end{aligned}$$

ここに (x_i, y_i) : 任意の測定点 i の座標
 (x_j, y_j) : 荷重点 j の座標
 式(23)は集中荷重 $P(t)$ が、固定点 $j(x_j, y_j)$ に作用したとき、任意の点 $i(x_i, y_i)$ に生じる mm' 次の振動モードの大きさを求める運動方程式である。この $w_{mm'}$

が求められると、 i 点 (x_i, y_i) におけるレスポンスは式 (16) により求めることができる。

(4) 集中荷重が移動する場合の運動方程式

集中荷重 $P(t)$ が任意の固定点 j に作用したとき、任意の点 i におけるたわみは式 (16)、式 (23) により求めることができるので、荷重が移動するときには、単に式 (23) における荷重点の座標 x_j, y_j を時間の関数として表わせばよい。すなわち、式 (24) となる。

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} &= \Phi_{mm'}(x=x_i, y=y_i) \\ \Phi_{mm'}\{x=x_j(t), y=y_j(t)\} P(t) &\dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

式 (24) は直交異方性板の固有振動数 $\omega_{mm'}$ 、正規化した振動モード $\Phi_{mm'}$ が求められるかぎり、容易にたてることのできる。

(5) 橋梁の減衰を考慮した場合の運動方程式

橋梁の減衰の影響は、鋼・コンクリート構造内部のエネルギー損失・桁支承部の固体摩擦などいろいろ複雑な原因によって生じるものであるが、橋の動的たわみを測定してみると、その減衰はほぼ対数減衰と考えられる実測結果となっている。したがって、この事実をもととして、橋はたわみ速度に比例する抵抗をうけるという簡単な仮定を用いて解析する方法が多くの人によってとられてきている。直交異方性板の場合も、このような仮定を適用すると、式 (24) は式 (25) となる。

$$\begin{aligned} \ddot{w}_{mm'} + 2h\dot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} \\ = \Phi_{mm'}(x=x_i, y=y_i)\Phi_{mm'}\{x=x_j(t), \\ y=y_j(t)\} P(t) &\dots\dots\dots(25) \end{aligned}$$

ここに h は減衰係数である。この値は対数減衰率 $\lambda_{mm'}$ より次式にて求めることができるものである。

$$\lambda_{mm'} = 2\pi h / [\omega_{mm'}^2 \{1 - h^2 / \omega_{mm'}^2\}^{1/2}]$$

(6) 振動モードの正規化について

式 (24)、(25) における関数 $\Phi_{mm'}$ は式 (9)、(10)、(11) で表わされる振動モード $\phi_{mm'}$ の振幅を式 (12) で与えられる条件を満足するようにして決めたものであるから、これを求めてみるとつぎのようになる。

a) 振動モード ① ($\mu < 1$)

$$\Phi_{m1} = A(A_1 \cosh ry + \cosh r'y) \sin(m\pi x/l) \dots(26)$$

ここに

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ \frac{r'^2 - \nu_x(m\pi/l)^2}{r^2 - \nu_x(m\pi/l)^2} \right\} \left\{ \frac{-\cosh(r'b/2)}{\cosh(rb/2)} \right\} \\ A_2 &= \frac{1}{r+r'} \sinh \left\{ \frac{(r+r')b}{2} \right\} + \frac{1}{r-r'} \sinh \left\{ \frac{(r-r')b}{2} \right\} \\ A^2 &= \frac{2}{\rho l} \left[\frac{A_1^2}{2} \left(\frac{1}{r} \sinh rb + b \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r'} \sinh r'b + b \right) + 2A_1A_2 \right] \end{aligned}$$

b) 振動モード ② ($\mu > 1$)

$$\Phi_{m2} = B(B_1 \cosh ry + \cos r'y) \sin(m\pi x/l) \dots(27)$$

ここに

$$B_1 = \left\{ \frac{r'^2 + \nu_x(m\pi/l)^2}{r^2 - \nu_x(m\pi/l)^2} \right\} \left\{ \frac{\cos(r'b/2)}{\cosh(rb/2)} \right\}$$

$$\begin{aligned} B_2 &= r \sinh \left(\frac{rb}{2} \right) \cos \left(\frac{r'b}{2} \right) + r' \cosh \left(\frac{rb}{2} \right) \sin \left(\frac{r'b}{2} \right) \\ B^2 &= \frac{2}{\rho l} \left[\frac{B_1^2}{2r} (\sinh rb + rb) + \frac{1}{2r'} (\sin r'b + r'b) \right. \\ &\quad \left. + \frac{4B_1B_2}{r^2 + r'^2} \right] \end{aligned}$$

c) 振動モード ③ ($\mu > 1$)

$$\Phi_{m3} = C(C_1 \sinh ry + \sin r'y) \sin(m\pi x/l) \dots(28)$$

ここに

$$\begin{aligned} C_1 &= \left\{ \frac{r'^2 + \nu_x(m\pi/l)^2}{r^2 - \nu_x(m\pi/l)^2} \right\} \left\{ \frac{\sin(r'b/2)}{\sinh(rb/2)} \right\} \\ C_2 &= r \cosh \left(\frac{rb}{2} \right) \sin \left(\frac{r'b}{2} \right) - r' \sinh \left(\frac{rb}{2} \right) \cos \left(\frac{r'b}{2} \right) \\ C^2 &= \frac{2}{\rho l} \left[\frac{C_1^2}{2} \left(\frac{1}{r} \sinh rb - b \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{r'} \sin r'b \right) + \frac{4C_1C_2}{r^2 + r'^2} \right] \end{aligned}$$

3. 数値計算例

前節に述べたように、式 (26)、(27)、(28) で与えられる正規化した振動モード $\Phi_{mm'}$ を使用すれば、任意の速度で荷重が直交異方性板上を移動するとき、任意の点における mm' 次の振動モードは式 (24)、(25) を解いて求めることができるわけであるが、実在橋に対してどのような振動が発生するかを調べるために数値計算を行なった。

計算に使用した橋梁は、昭和 32 年に大阪市に架設された長堀川新橋である。この橋は桁高を極端に低くする必要があったので中空板構造をとっている。したがって、スパン方向と幅員方向の曲げ剛性 D_x, D_y の比はほぼ 1 に近づいている。また、この橋は幅員 b とスパン l との比 b/l はほぼ 0.72 であるが、ここでは橋の諸定数はそのまま幅員の値のみが変化して板の形状が変わった場合を想定して、固有振動数、発生する振動モードの大きさなどについて調べた。

荷重は 1 t の大きさの一定力が一定速度で移動するものと考えた。この橋の諸元は、スパン $l=30.6$ m, 幅員 $b=22$ m, 全重量 $W=321.9$ t, $D_x=1.412 \times 10^{10}$ kg \cdot cm, $D_y=1.483 \times 10^{10}$ kg \cdot cm, $\nu_x=\nu_y=0.3$

なお、直交異方性板の振動モードの次数 mm' は解析的には無限に求められるが、ここでは最低次の振動モードの場合についてのみ計算を行なった。すなわち、 $m=1, m'=1, 2, 3$ の場合である。

(1) 固有振動数について

図-2 は直交異方性板の形状が変化した場合、各振動モードの固有振動数がどのように変化するかを示したものである。この図から全体の傾向として固有振動数は①の振動モードのものが一番小さく、②、③の振動モードのものは b/l の値が大きくなると急激に小さくなるけれども、①の振動モードの固有振動数以下に小さくならないことがわかる。①の振動モードは、 b/l の値が変化し

Fig. 2 Relation between the Frequency of Free Vibration of Various Modes and the Shape of the Plate.

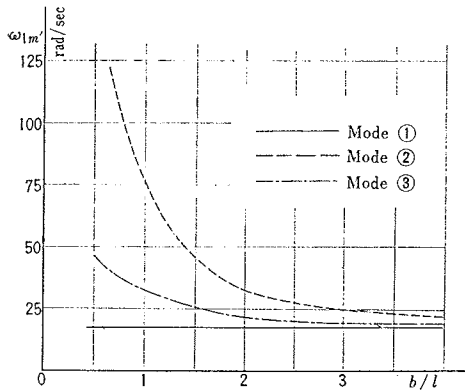


Table 1

ϕ_{11} (eq. 26)	b/l	AA_1	A	r	r'
		($\times 10^{-3}$)	($\times 10^{-2}$)	($\times 10^{-3}$)	($\times 10^{-3}$)
	0.719	4.799	7.054	1.423	1.763
	2	0.206 2	4.387	1.430	0.117 5
	3	0.019 67	3.580	1.431	0.098 98
	4	0.001 971	3.090	1.432	0.086 62

ϕ_{12} (eq. 27)	b/l	BB_1	B	r	r'
		($\times 10^{-3}$)	($\times 10^{-1}$)	($\times 10^{-3}$)	($\times 10^{-3}$)
	0.719	-6.943	1.052	2.692	2.278
	2	-0.290 3	0.628 7	1.700	0.912 3
	3	-0.025 54	0.524 7	1.565	0.627 3
	4	-0.002 386	0.461 6	1.511	0.476 0

ϕ_{13} (eq. 28)	b/l	CC_1	C	r	r'
		($\times 10^{-3}$)	($\times 10^{-1}$)	($\times 10^{-3}$)	($\times 10^{-3}$)
	0.719	1.290	0.975 2	1.781	1.056
	2	0.338 1	0.648 3	1.500	0.440 3
	3	0.028 59	0.552 6	1.464	0.292 3
	4	0.002 708	0.494 6	1.450	0.214 1

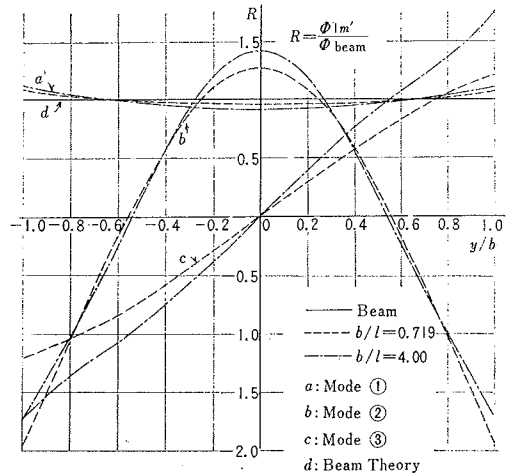
ても ω_{11} の値は 17.4~17.8 の範囲にあり, ほぼ一定の値となる。この板をはりと考えて固有振動数を求めてみると $\omega = 17.93$ となるから, この①の振動モードに対する固有振動数は板をはりと考えて解析した固有振動数に対応するものであることがわかる。

(2) 振動モード ($\phi_{mm'}$) について

式 (26), (27), (28) により振動モード $\phi_{1m'}$ を計算するときの式の中の諸係数を表-1 に示す。

$x=l/2$ の断面における振動モードの形を図示すると, 図-3 となる。ここでは板としての①, ②, ③の各振動モード $\phi_{1m'}$ と, 板がはりとして振動すると考えたときの ϕ との比 R によって,

Fig. 3 Shapes of Modes at the Cross Section $x=l/2$.



振動の大きさを表わしている。この R の値は, $b/l = 0.719$ のときのみが $b/l = 2, 3, 4$ の場合とくらべて若干異なっているが, $b/l = 2 \sim 4$ の範囲にあるときにはほとんど変化しないことが, すべての振動モード①, ②, ③についていえる。また, この図より b/l の大きさが変化しても, 振動モードの形は①, ②のモードにおいてはあまり変化しないが③のモードでは少し異なった形状となることがわかる。

(3) 一定力が一定速度で移動する場合

一定荷重 P_0 が一定速度 v_0 で直交異方性板上を移動するときの運動方程式は式 (24) より次式にて与えられる。

$$\ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} = P_0 \phi_{mm'}(x = x_i, y = y_i) \cdot \phi_{mm'}(x = v_0 t, y = y_j) \dots (29)$$

Table 2

measuring point		$x_0=l/2, y_0=0$	$x_0=l/2, y_0=0$	$x_0=l/2, y_0=b/2$
position of moving load		$x=v_0 t, y=0$	$x=v_0 t, y=b/2$	$x=v_0 t, y=b/2$
b/l	Mode	$\omega_{1m'}$	$F_{1m'}$	$G_{1m'}$
0.719	①	17.39	-2.247	19.03
	②	108.38	-0.015 49	0.821 9
	③	37.37	0	0
2	①	17.69	-0.730 6	6.294
	②	32.44	-0.236 5	3.736
	③	21.31	0	0
3	①	17.76	-4.476 7	4.123
	②	24.79	-0.373 2	4.506
	③	19.42	0	0
4	①	17.80	-0.352 3	3.054
	②	21.88	-0.421 3	4.491
	③	18.73	0	0
0.719	beam theory	17.93	-2.198	19.19
2		-0.789 7	6.896	
3		-0.526 7	4.599	
4		-0.394 9	3.448	

(rad/sec)

($\times 10^{-3}$ cm)

ここでは、1tの大きさの一定荷重が20 m/sec (72 km/h)の速度で、 $y_j=0$ 、および $y_j=b/2$ の位置をそれぞれ橋軸方向に移動する2つの場合について、板中央 ($x_i=l/2, y_i=0$) および自由辺中点 ($x_i=l/2, y_i=b/2$) の2カ所の測定点におけるレスポンスを計算した。

直交異方性板が最初静止している場合、初期条件が $t=0$ のとき、 $w_{mm'}=0, \dot{w}_{mm'}=0$ で与えられるから、式(24)の一般解は次式にて表わされる。

$$w_{mm'} = F \sin \omega_{mm'} t + G \sin(m \pi v_0 t/l) \dots (30)$$

上式の第1項は自由振動、第2項は強制振動を表わしている。走行位置・測定点の位置によって、式(30)の F, G の値は異なるので、この値を表-2に示す。

動的増加率*は、板の形状・走行位置・測定点などによりいろいろと変化するが、ここでは比較のために $b/l=0.719, b/l=4$ の2つの場合のみについて述べる。

Fig. 4 Dynamic Deflection Diagram at a Point ($x_i=l/2, y_i=0$)

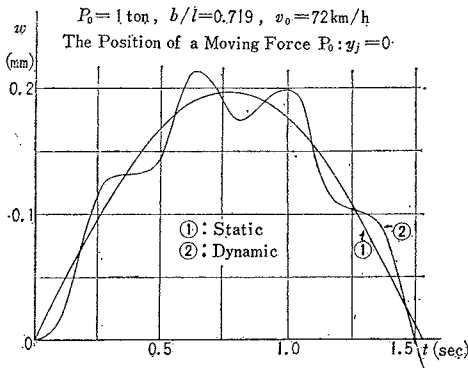


Fig. 5 Dynamic Deflection Diagram at a Point ($x_i=l/2, y_i=0$)

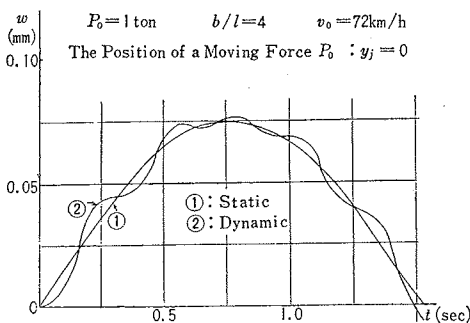


図-4, 5は、荷重が板中央 ($y_j=0$) の位置を移動したとき、板中央点 ($x_i=l/2, y_i=0$) における動的たわみ曲線を示したものである。この図から、 $b/l=0.719$ のときは動的増加率が約11%となっているが、 $b/l=4$ の場合には動的増加率は2%程度と非常に小さくなっていることがわかる。これは、 $b/l=0.719$ のときには②

の振動モードはほとんど発生しないが、 $b/l=4$ のときには②の振動モードは①の振動モードよりむしろ10%程度大きく発生し、しかも、この①と②の振動モードの角速度の大きさが異なっているために位相がずれて、荷重が中央点付近にきたとき①と②の振動モードを合成したものが0に近い値となるからである。

Fig. 6 Dynamic Deflection Diagram at a Point ($x_i=l/2, y_i=0$)

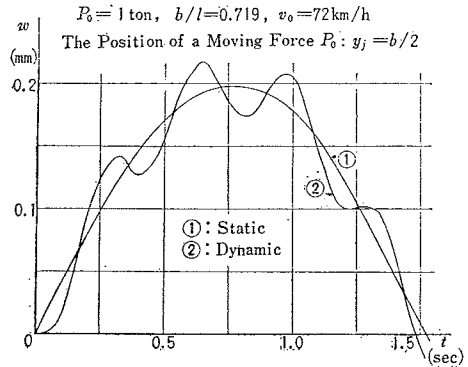


Fig. 7 Dynamic Deflection Diagram at a Point ($x_i=l/2, y_i=0$)

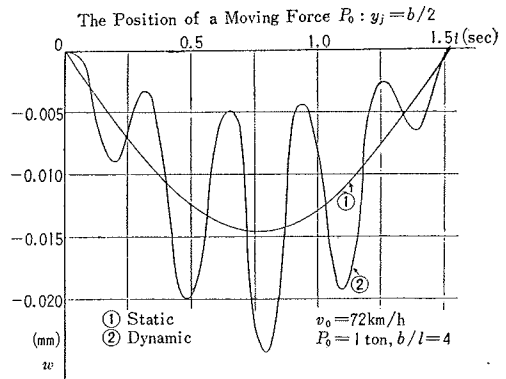


図-6, 7は荷重が $y_j=b/2$ 点を移動したとき、点 ($x_i=l/2, y_i=0$) の動的たわみ曲線を示す。この場合には、板の形により振動の状態が全く異なることが知られる。すなわち、 $b/l=0.719$ のときには、荷重の走行位置が $y_j=b/2$ および $y_j=0$ の両者ではそのたわみ曲線はほとんど同じ値(図-4, 6)となるが、 $b/l=4$ の場合には、荷重が $y_j=b/2$ を移動した場合、板中央 ($x_i=l/2, y_i=0$) におけるたわみは負となり、しかも動的増加率の値は67%と非常に大きくなっていて(図-7)、走行位置が $y_j=0$ の場合(図-5)と非常に相違する。

つぎに移動荷重が橋梁上を通過したのち、直交異方性板に生じる各モードの自由振動の大きさ(式(30)の F 値)が板の形状の変化によってどのように変化するかについて述べる。ここでは、はりとしての振動と比較するために、はりとして解析したときの自由振動の大きさととの比 R で表わし、走行荷重の位置が板中央 ($y_j=0$) の

* ここでいう動的増加率とは、 $(w_d - w_s) \times 100 / w_s$ で表わされるものである。ただし、 w_d : 動的最大のたわみ、 w_s : 静的最大のたわみ

Fig. 8 The Magnitudes of the Natural Modes of Vibration at a Point ($x_i=l/2, y_i=0$) Divided by Those by Beam Theory.

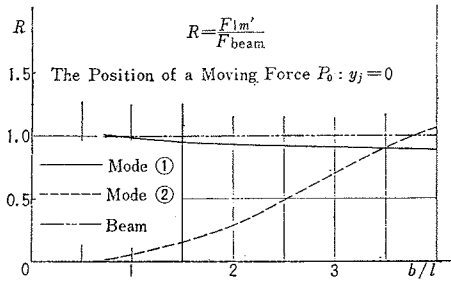
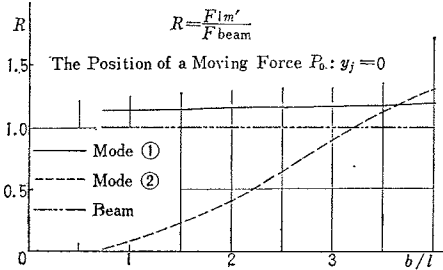


Fig. 9 The Magnitudes of the Natural Modes of Vibration at a Point ($x_i=l/2, y_i=b/2$) Divided by Those by Beam Theory.



場合に、測定点 i ($x_i=l/2, y_i=0, y_i=b/2$) の位置によって、どのように変化するかを 図-8,9 に示した。R の値は、自由辺中央 ($x_i=l/2, y_i=b/2$) の測定点においては ① の振動モードは b/l の値が大きくなるとやや大きく発生する傾向にあるが、板中点 ($x_i=l/2, y_i=0$) の測定点では逆に小さくなっている。② の振動モードは両者の場合とも b/l の値が増加すると同じように大きく発生するが、 $x_i=l/2, y_i=0$ に測定点をおいたほうが振動は小さくなる。また、② のモードは $b/l < 1$ のときには ① のモードの 10% 程度しか発生しないから、実際の問題として無視しても十分と考えられる。

Fig. 10 The Magnitudes of the Natural Modes of Vibration at a Point ($x_i=l/2, y_i=b/2$) Divided by Those by Beam Theory.

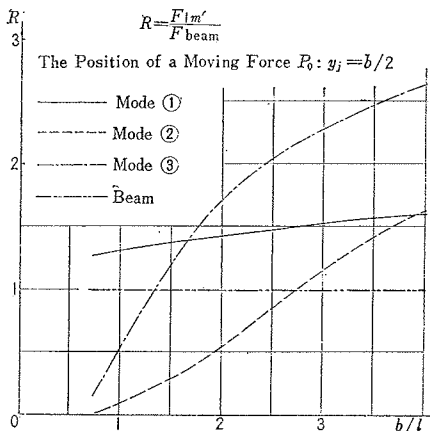


図-10 は荷重が $y_j=b/2$ を走行したとき、自由辺中央点 ($x_i=l/2, y_i=b/2$) における R の変化を示したものである。この図から ③ の振動モードは $b/l \leq 0.72$ のときには、ほとんど発生しないが b/l の値が大きくなるにつれて急に大きく生じるようになり、 b/l の値が 1.7 を越えると各モードのうち一番大きく生じることがわかる。

4. 結 論

以上、一定力が両端単純支持された直交異方性板上を移動するとき、任意の点における動的たわみを求める基礎式と、これを実在橋の幅員が変化した場合に適用して数値計算を行なった結果とについて述べたが、以下のことが結論づけられると思う。

(1) 基礎式について

直交異方性板上を荷重が移動するとき、任意の点における動的たわみは、式 (24) を解いて求めることができる。式 (24) より、荷重が移動するときの問題は、 $\phi_{mm}' = 1$ なる固定点に $\phi_{mm}'\{x_j(t), y_j(t)\} \cdot P(t)$ なる外力が作用する問題と等価であることがわかる。式 (24) は、直交異方性板の振動モード ϕ_{mm}' と固有振動数 ω_{mm}' が求められたならば、ただちに使用できる基礎方程式である。また、この式は荷重の走行位置を時間の関数として、式 (24) の右辺に代入すればよいから、荷重の速度が変化する場合や荷重が x, y 両方向に移動する場合についても適用できる。数値計算の場合には、移動する荷重の大きさは一定と考えたが、一般に移動荷重は質量を有しているので、これによって生じる慣性力の影響も考慮しなければならないときがある。このとき運動方程式は多元連立微分方程式となるから、簡単に解くことはできない。しかし、電子計算機を使用すれば容易に解くことができるので、現在、電子計算機を使用して解析を行っているのでつぎの機会に発表したい。

(2) 数値計算結果について

数値計算は大阪市に架設された長堀川新橋の幅員が大きくなった場合を想定し、この上を $P_0=1t$ の荷重が移動する場合について行なった。この橋は中空板構造となっているために、 D_x と D_y との比はほぼ 1 に近く、実際には等方性板に近いものであるが、はりとしての振動性状と板としての振動性状との相違が定量的にかなりくわしく解析できたと思う。

固有振動数は、幅員の大きい橋に対しても通常簡単のために単純ばりと考えて、解析を行なって実測結果と比較することが多いが、図-2 からわかるように、① の振動モードは単純ばりと考えた場合とほとんど同じ固有振動数を持っているために、この①の振動モードのみを測定し、たとえ、その結果が実測値とよく一致していても②,③のモードに対する考察を行なわなければ十分とはいえないと思われる。しかし実際の問題として、図

8~10 からわかるように、 $b/l < 0.7$ の場合にはほとんど①の振動モードのみが発生するので、このような橋梁に対しては はりとして解析を行なっても十分であると考えられる。これに反して、 b/l の値が0.7を越えるような橋梁に対しては、荷重の走行位置、測定点の選び方に十分考慮をはらう必要がある。また、固有振動数は①の振動モードに対するものが一番小さいので板として共振の影響を考える場合でも、この①の振動モードの固有振動数以下のものについて考えなくても十分と思われる。

動的たわみ曲線は、 $b/l=4$ のときには、荷重が $y_j=0$ を走行した場合、 $y_i=0$ の点において動的増加率が非常に減少しているが、これは前述したように、①と②の振動モードの振動数が異なっており、荷重が $l/2$ 点付近にきたとき、この位相差が π に近くなるからである。この現象は、初期条件が $t=0$ において橋梁が静止しているという仮定のもとに解いたから、このような結果が得られたので、前に通過した荷重によって橋が自由振動を行なっているような場合には、さらに大きい値に達する可能性がある。さらに、図一7 にみられるように幅員が大きくなると、走行位置や荷重点の選び方によっては静的たわみの絶対値は小さくすることができるけれども、自由振動はかなり大きく生じている。図一7 の場合は静的たわみは負となっているので、測定点を適当に選ぶと極端な場合には静的たわみを0にすることも可能である。この場合、動的増加率は無限大の大ききになることになる。

走行荷重による実験値を処理するとき、通常、衝撃率と俗称して、動的たわみ記録の最大値付近における $(w_{\max} - w_{\min}) / (w_{\max} + w_{\min})$ の値を用いるが、これが本文の場合の動的増加率に対応するわけで、幅員の大

きい橋の場合この値については、荷重の走行位置と測定位置との相互関係を考慮する必要があると考えられる。最近、自動車数が急速に増加し、その結果、道路が拡幅されて幅員の大きい橋の架設が行なわれる傾向にあるが、この種の橋の振動性状を解析するには、この直交異方性板理論によるのが一つの有効な解析手段と考えられる。

以上、 $D_x/D_y \neq 1$ の直交異方性板の場合についての計算結果を述べたが、さらに種々の D_x , D_y の異なった値のものに対して数値計算を行ない、直交異方性板の振動状態を究明したいと考えている。

最後に、この研究を行なうにあたり、いろいろご指導いただいた名古屋大学 成岡教授、熊本大学 吉村教授に深く感謝するとともに、多数の学生諸氏に謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Naruoka, Hirai : A study of composite grillage girder bridge, Technical report of the engineering research institute, Kyoto Univ., No. 30, 1956.
- 2) 井口 : 相対2辺が単純支持, 他の2辺が自由なる矩形板の振動について, 土木学会誌 第26巻(昭和15年4月), p. 427.
- 3) 米沢 : 直交異方性板理論による桁橋構造の自由振動に関する研究, 土木学会誌 第40巻2号, p. 21
- 4) Naruoka, Yonezawa : A study on the period of the free lateral vibration of the beam bridge by the theory of the orthotropic rectangular plate, Ingenieur-Archiv, 26 Band, 1 Heft, 1958. S. 20.
- 5) Highway bridge impact investigation, Eighth progress report, Department of Civil Engineering, Univ. of Illinois, Oct. 1958.
- 6) 例えば, Structural Design for Dynamic Loads, Chap. 5, C.H. Norris and others, McGraw Hill.

(原稿受付 : 1962.8.10)

DYNAMIC RESPONSES OF ORTHOTROPIC PLATES WITH TWO OPPOSITE FREE EDGES AND OTHER TWO SIMPLY SUPPORTED EDGES UNDER THE ACTION OF A CONSTANT MOVING FORCE

By Itio Hirai, C. E. Member

1. Introduction

The primary purposes of the present study are to derive the equations of motion of orthotropic plates under the action of a moving force and to apply these equations to an existing very wide highway bridge to distinguish the dynamic characteristics between the plate and the beam.

Though the papers concerned with the orthotropic plates have so far treated the natural frequencies and the natural modes of vibration, it appears that most of the modes may be neglected for the practical problems, because the magnitudes of mode of vibration are considerably small.

Therefore, the study presented herein indicates the relations between the magnitudes of vibration caused at an arbitrary point under a moving load and the shapes of the plate, e.g., the ratio of width to span.

2. Equations of motion

With the coordinates as shown in Fig. 1, the dynamic deflection for the mm' th mode of vibration at an arbitrary point of an orthotropic plate is obtained from the following equation:

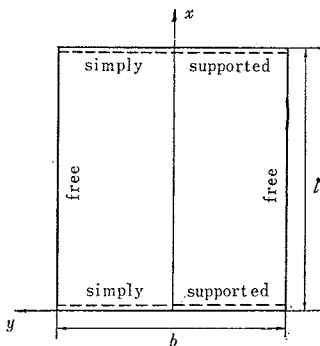


Fig. 1 Orthotropic Plate.

$$\ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} = \Phi_{mm'}(x=x_i, y=y_i) \Phi_{mm'}(x=x_j, y=y_j) P(t) \dots\dots\dots (1)$$

where $m(m')$ is the number of mode in the $x(y)$ direction,

(x_i, y_i) : the coordinates of a measuring point,

$\omega_{mm'}$: circular frequency for mm' th mode

(x_j, y_j) : the coordinates of an applied force

$P(t)$: a concentrated force

$\Phi_{mm'}(x, y)$ is the normalized mm' th modes of vibration which satisfies the equation (2).

$$\iint_A \Phi_{mm'}^2(x, y) \cdot \rho dx dy = 1 \dots\dots\dots (2)$$

When a load moves on the plate, the coordinates (x_j, y_j) of the applied point can be replaced by time functions $x_j(t), y_j(t)$ and eq. (1) becomes eq. (3).

$$\ddot{w}_{mm'} + \omega_{mm'}^2 w_{mm'} = \Phi_{mm'}(x=x_i, y=y_i) \cdot \Phi_{mm'}\{x=x_j(t), y=y_j(t)\} P(t) \dots\dots\dots (3)$$

The above equation may easily be derived whenever the circular frequency $\omega_{mm'}$ and the natural mode of vibration $\Phi_{mm'}$, is obtained and the position of load is also expressed by a function of time. And then, eq. (3) may be solved generally, if the effects of inertia forces by the masses of load can be neglected.

3. Numerical computation

Numerical calculations were carried out for the Nagahori bridge, a simple span highway bridge (span: $l=30.6$ m, total weight: $W=321.9$ ton, flexural rigidity per unit of width in the $x(y)$ directions: $D_x=1.412 \times 10^{10}$ kg-cm, $D_y=1.483 \times 10^{10}$ kg-cm, width: $b=22.0$ m).

The ratio β between the width and span of this bridge is 0.719, but the numerical computations were carried out for the range $\beta=0.719 \sim 4.0$ assuming that the width of this bridge was enlarged leaving the other constants unchanged. The moving load is as follows: $P_0=1$ ton, the speed: $v_0=20$ m/sec (72 km/h), the position of the load: $y_j=0$, and $y_j=b/2$.

The coordinates of measuring points: $x_i=l/2, y_i=0$, and $x_i=l/2, y_i=b/2$

As the plate possesses an infinite number of degrees of freedom, the natural frequencies and the number of the natural modes also are

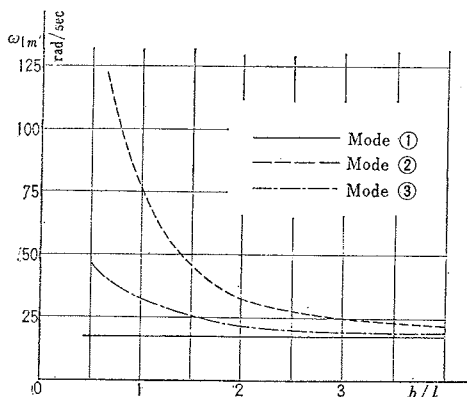


Fig. 2 Relation between the Frequency of Free Vibration of Various Modes and the Shape of the Plate.

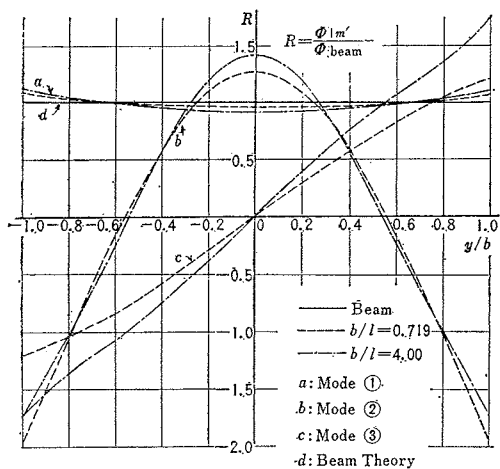


Fig. 3 Shapes of Modes at the Cross Section $x=l/2$ infinite. However, numerical calculation were carried out for values of $m=1, m'=1, 2, 3$.

Fig. 2 shows the relation between the natural frequencies and the shapes of the plate. The modes ① and ② in Fig. 2 are symmetrical and the mode ③ is asymmetrical with respect to the x axis, at the cross section $x=l/2$ as shown in Fig. 3.

The natural frequency for the mode ① is the smallest of all and corresponds to one obtained by assuming the bridge as a beam.

Figs. 4 and 5 show the typical deflection diagrams which indicate the characteristics as a plate. In Fig. 4, the value of dynamic increment factor is about 2%. This is due to the fact that, because the ratio of amplitude of mode ② to that of mode ① is about 1.1 and then the natural frequency of each mode is different, the resultant value of the two modes becomes nearly

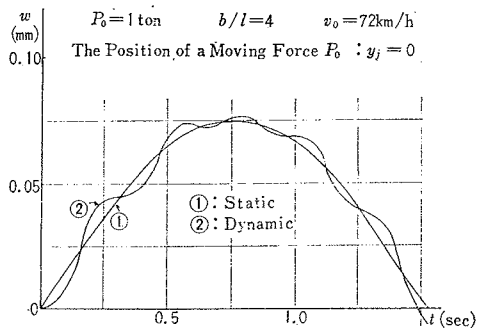


Fig. 4 Dynamic Deflection Diagram at a Point. ($x_i=l/2, y_i=0$)

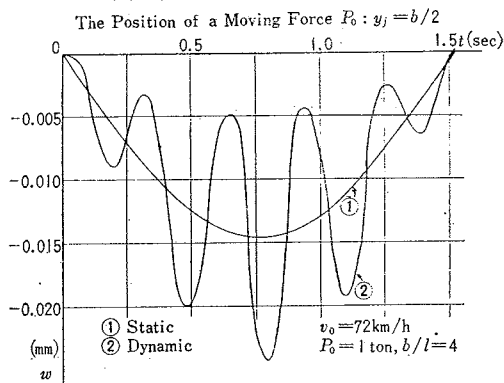


Fig. 5 Dynamic Deflection Diagram at a Point ($x_i=l/2, y_i=0$)

equal to zero, when a moving load reaches a certain point near midspan. In Fig. 5, the value of static deflection is negative. As we can put the measuring point in such a way that the static deflection is zero for a special case, the value of the dynamic increment factor becomes infinite.

It should be noted that, even if the observed value may agree well with the value obtained by the use of the simplified beam theory, the consideration of the modes ② and ③ must be made, since the natural frequency of mode ① is nearly equal to that of beam independently of the ratio between the width and span. For the practical purposes, however, the beam theory is applicable as an approximate method to the cases where the ratio of width to span is smaller than 0.7, because the amplitudes of modes ② and ③ are both less than about one-tenth of mode ①.

It may be concluded that the analysis based on the orthotropic plate theory is effective for the determination of dynamic characteristics of the very wide bridge.

(Received August 10, 1962)