

単純支持曲線桁橋の立体的解析*

小 西 一 郎**
小 松 定 夫***

1. 緒 言

市街地における自動車交通の輻輳は日を追って激しさを加え、交通の立体化は近代都市にとって必至の状態となった。そこで自動車専用高架道路の立案ならびに建設が急務の問題となっている。すでに東京都などにおいては、その一部の工事が着々と実施されつつある。また山間部の開発が進み、彎曲部の多い山地における産業道路などの新設が各地で行なわれている。これらの路線にそって、曲線桁橋の架設の機会が多く、曲線桁の正確な理論と、それにもとづく合理的設計計算法の確立が特に重要になってきた。

曲線桁の解析については、かなり多くの人によって報告されている。ここにその代表的なものについて紹介すれば、つぎのとおりである。

H. Gottfeldt¹⁾ は曲線トラス橋について、立体トラスの理論にもとづき、断面力の公式を与えた。しかしこれをそのまま今日の曲線桁橋に適用するについては、問題があるようである。というのは、この理論では横桁の取りつけ格点間で、主桁は直線形で、格点で折り曲がっているものと仮定している。実際には主桁の彎曲のため、そこにねじりモーメントが作用する。主桁が薄肉開断面の場合には、そのねじり剛さが小さいので、この仮定は危険な結果を招くことになる。すなわち主桁フランジ内にねじりモーメントに抵抗するため曲率中心方向に向かう水平力を誘発し、フランジ内に2次応力が発生する。その大きさもかなりの量に達する。仮に、このような主桁の曲率による2次応力に対し適当な補正計算が行なわれたとしても、つぎの点で不十分なように思われる。

一般に曲線並列I桁橋の場合には、曲線桁構造の特性として、内桁と外桁の曲げモーメントは大いに異なる。そこで内桁と外桁の剛性が、それに応じるように設計される。普通、主桁を数本の横桁で結合した構造物であるから主桁間の荷重分配という考え方からすれば、あくまでも主桁相互の曲げ剛さとかねじり剛さの比が影響するものと思われる。ところがGottfeldの曲げモーメントの解式にはそのような因子が全然ふくまれていない。

さて、曲線桁理論は大別して3つの群に分類できる。

第1は曲線桁をなんら幅を持たない1本の細い線材とみなし、ただその曲げ剛さとねじり剛さのみを考慮した単純理論である。B. Velutini²⁾はこの考え方をコンクリートの中実矩形断面を有する曲線桁に適用した。さらにCastiglianoの定理を用いて、端曲げモーメントおよび端ねじりモーメントと端部回転角との関係式を求め、モーメント分配法を応用して連続曲線桁の断面力を計算することを提唱した。E. Volterra³⁾は直線桁理論のSt. Venantの公式、すなわち

$$M = EI/R_1 \quad \text{曲げモーメント (a)}$$

$$T = K \theta' \quad \text{ねじりモーメント (b)}$$

より $\frac{1}{R_1} = \frac{\beta}{R} - \frac{d^2\delta}{dx^2}$ 彎曲率、

$$\theta' = \frac{d\beta}{dx} + \frac{1}{R} \frac{d\delta}{dx} \quad \text{ねじり率 (c)}$$

なる変形量間の関係式を用いている。ここに R は曲りばりの曲率半径、 δ はたわみ、 β は断面回転角である。

これらの関係を用い、断面力と外力とのつりあい条件式から δ と β に関する微分方程式を与えた。そして等間隔に配置された剛支点上に載った円形曲りばりに等分布荷重および集中荷重が作用する場合について解いた。さらに同じ理論にしたがい、E. Volterra, R. Chung⁴⁾, G. Oravas⁵⁾ は弾性支承上の円形曲りばり上に等間隔に数個の集中荷重が作用する場合について考察した。

H.H. Fickel⁶⁾ は曲線桁の曲げモーメント、せん断力およびねじりモーメントに関する影響線を求める計算法について述べ、また連続桁に言及している。

F. Resinger, H. Egger⁷⁾ は3スパン連続合成箱桁橋について支点反力および最大応力を計算している。

以上は曲げ剛さとねじり剛さを有する細い曲線材の理論であるから、全断面の半径方向への拡がりについて全く考慮されていない。したがって断面力としては、曲げモーメント、せん断力、ねじりモーメントの3つにかぎられる。連続桁を取り扱っている文献(6)では、不静定量は支点曲げモーメントのみである。また上記の3つの断面力から応力を計算する際にも従来の直線桁の公式(a), (b)によることとしているので、いかなる荷重状態に対しても常に断面内の応力分布は直線桁のそれに相似することになる。しかし実際に、横方向に拡がりを持つ断面を有する曲線桁橋においては、桁の曲率の影響で応力の分布状態は直線桁のそれとかなり違って来る。また、たとえば主桁がねじり剛さの小さいI桁からなるよ

* 昭和35年5月第15回土木学会年次学術講演会に発表

** 正員 工博 京都大学教授 工学部土木工学科

*** 正員 工博 大阪市立大学助教授 工学部土木工学科

うな橋梁構造物に対しては、ねじり剛さのみで、外力トルクに抵抗するとの仮定に立つ単純理論によっては、解決できないと思われる。

第2群に属するものとして、曲げねじり理論を応用した F. Wansleben⁹⁾の研究があげられる。単純理論では断面のそり拘束の影響が無視されているが、曲げねじり理論ではそれを考慮に入れることになる。曲りばりにおけるトルク荷重下のせん断応力および垂直応力分布について論じている。しかし曲げねじりせん断応力については言及していない。また曲げモーメントが作用する場合の垂直応力およびせん断応力の橋断面内分布に関する問題に対し解が与えられていない。さらに曲りばりについては必ずたわみが、ねじり変形と密接な関連性を有する点を無視している。すなわち、曲げとねじりが連成するという曲りばりの重要な特性が見すごされているようである。

著者らがすでに発表した「薄肉曲線桁の基礎理論」⁹⁾はこの群に属するものである。この理論では橋断面の拡がりや曲率の関係を重視し、薄肉構造理論を曲線桁橋に拡張したものである。したがって断面諸量の算定、断面力と応力との関係などすべての量的関係に曲線形の影響が入ってくる。このような薄肉基礎理論によれば、第1群の単純理論で与えられなかったところの、そり拘束による断面力や応力が適確に解明される。

本文では、曲線桁橋全体の曲げとねじりの連成関係を考察し、橋断面の断面力、変形量の橋軸方向変化状態を代表的荷重について明白にした。この解を基礎式(9)に用いて橋断面任意点の応力およびたわみを求める。

第3の群に属するものは、Faltwerkの考え方に基礎をおくもので C.E. Cutti¹⁰⁾は高層鉄骨構造物の隅角部に、型鋼を集成溶接した小型の上下左右対称な箱型曲線ばりを使用した場合について解を求めた。そして模型試験の結果と比較している。応力や断面力の分布に関しかなり大胆な仮定を設けている。また断面形状が複雑な橋梁構造物に適用する場合にはかなり無理がある。これは対象とする構造形式に制約がある。

一方、D. Rüdigerは等間隔に並列する曲線矩形ばり上に扇形床板が合成された板桁構造物について、弾性学を用い応力、変形の級数解を与えた。主としてコンクリートのT桁並列形式を対象としたものであって、これをそのまま任意橋断面形状の橋梁構造物などに適用することは困難である。これは曲線板桁橋に応用できる厳密解である。

一般に、曲線桁橋では通常の走行荷重の下で必ずねじりモーメントが作用する。したがって桁橋全体を立体的に構成し、ねじり剛さの大きい閉断面を有するものがすぐれている。それで曲線桁橋の解析には、橋全体のねじり剛さを考慮した立体的解析法が特に重視されることに

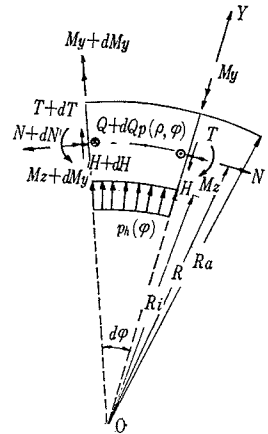
なる。このような見地から、(1)薄肉閉断面構造を採用し、(2)それに薄肉構造理論を適用し立体的解析を行なう。このような方針で設計することによって、力学的に優秀な構造形式のものを、その力学的性状を十分に考慮した上で、経済的に有利な桁橋として設計できる。

本文中に特に説明がない記号については文献(12)を参照されたい。

2. 薄肉曲線桁橋の断面力と外力の関係

薄肉曲線桁橋に鉛直方向の分布荷重 $p(\rho, \varphi)$ と水平方向の分布荷重 $p_h(\varphi)$ が作用する場合に、橋断面全体の断面力(曲げモーメント M_y, M_z , ねじりモーメント T , せん断力 Q, H , 軸力 N)と外力との関係式を求める。そのため微小中心角 $d\varphi$ をはさむ隣接2断面で切り取られる要素についてつりあいを考える。

図一 断面力と外力



① Z軸方向の力のつりあい

$$\frac{dQ}{d\varphi} = - \int_{\bar{R}_i}^{\bar{R}_a} p(\rho, \varphi) \rho d\rho \dots\dots\dots(1)$$

ここに \bar{R}_i, \bar{R}_a はそれぞれ鉛直荷重の内縁および外の曲率中心0からの水平距離である。

② φ方向の力のつりあい

$$\frac{dN}{d\varphi} = -H \dots\dots\dots(2)$$

③ Y方向の力のつりあい

$$\frac{dH}{d\varphi} + p_h(\varphi) - N = 0 \dots\dots\dots(3)$$

④ せん断中心のまわりのモーメントのつりあい

$$\frac{dT}{d\varphi} = M_y + \int_{\bar{R}_i}^{\bar{R}_a} p(\rho, \varphi) Y \rho d\rho - p_h(\varphi) \cdot Z - Ne \dots\dots\dots(4)$$

e は中立軸とせん断中心の距離

⑤ y軸まわりのモーメントのつりあい

$$\frac{dM_y}{d\varphi} = QR_0 - T - H_e \dots\dots\dots(5)$$

⑥ z軸まわりのモーメントのつりあい

$$\frac{dM_z}{d\varphi} = HR \dots\dots\dots(6)$$

まず、関係式(2),(3),(6)より H, N を消去すれば、 M_z に関する微分方程式をうる。

$$\frac{d^2 M_z}{d\varphi^2} + \frac{dM_z}{d\varphi} = -R \frac{dp_h}{d\varphi} \dots\dots\dots(7)$$

つぎに式(1),(4),(5)より T, Q を消去すれば M_y

に関するつぎの微分方程式をうる。

$$\frac{d^2 M_y}{d\varphi^2} + M_y = p_h z_h - \int_{\bar{R}_i}^{\bar{R}_a} p \rho^2 d\rho \dots\dots\dots(8)$$

また式(2),(3)より H を消去して, N の微分方程式をうる。

$$\frac{d^2 N}{d\varphi^2} + N = p_h \dots\dots\dots(9)$$

結局, 与えられた鉛直荷重 p と水平荷重 p_h に対して, これらの3つの微分方程式を連立に解けば, 2方向の曲げモーメントと軸力が知れる。鉛直荷重のみの場合には p_h および N が消えるので微分方程式(8)から M_y はただちに求まる。

3. 単純支持曲線桁橋に代表的荷重が作用する場合の解

図-2 に示すような6つの代表的な荷重状態に対して微分方程式(8)を解き, その解をもとにして各種の断面力および変形量を求める。

(1) 曲げモーメント M_y

単純支持曲線桁橋については両端支点断面で $M_y=0$ の境界条件のもとに表-1のような曲げモーメントの解を得た。表-1において

$$L_1 = \frac{1}{3}(\bar{R}_a^3 - \bar{R}_i^3), \quad L_2 = \frac{R_0}{2}(\bar{R}_a^2 - \bar{R}_i^2) \dots\dots\dots(10)$$

また荷重状態(6)は $\varphi=\psi$ なる位置に, せん断中心軸まわりの集中トルク m_T が作用する場合をいう。

図-2 代表的鉛直荷重

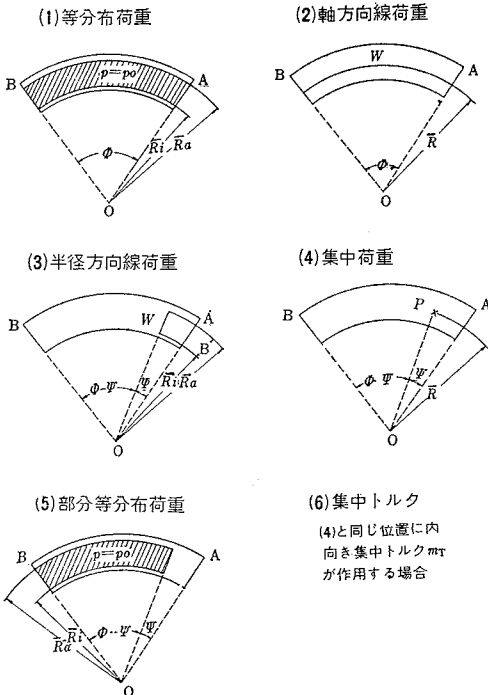


表-1 両支点における境界条件 単純支持 $M_y=0$

荷重	曲げモーメント M_y の解
(1)	$L_1 p_0 \left[\frac{\sin \varphi + \sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} - 1 \right]$
(2)	$\bar{R}^2 W \left[\frac{\sin \varphi + \sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} - 1 \right]$
(3)	$\frac{L_2}{R_0} W \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{L_2}{R_0} W \frac{\sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi, \quad \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(4)	$\bar{R} P \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\bar{R} P \frac{\sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi, \quad \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(5)	$L_1 p_0 \frac{1 - \cos(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $L_1 p_0 \left[\frac{\sin \varphi + \sin(\Phi - \varphi) \cos \Psi}{\sin \Phi} - 1 \right], \quad \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(6)	$-m_T \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $-m_T \frac{\sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi, \quad \Psi \leq \varphi \leq \Phi$

水平荷重が存在せぬときには, 軸力 N および曲げモーメント M_x は生じないことが明らかである。

(2) 曲げねじりモーメント M_w

図-2 に示す荷重状態においては, 関係式(4)中の p_h と N は消え,

$$\frac{dT}{d\varphi} = M_y + \int_{\bar{R}_i}^{\bar{R}_a} p Y \rho d\rho \dots\dots\dots(11)$$

一方, 曲げねじりモーメント M_w とねじりモーメント T の間にはつぎの関係があることが容易にわかる。

$$\frac{d^2 M_w}{d\varphi^2} - \frac{G_s J}{E_s C_w} R^2 M_w = -R \frac{dT}{d\varphi} \dots\dots\dots(12)$$

よって式(11)と式(12)とから M_w に関する微分方程式をうる。

$$\frac{d^2 M_w}{d\varphi^2} - \alpha^2 M_w = -R (M_y + \int_{\bar{R}_i}^{\bar{R}_a} p Y \rho d\rho) \dots\dots\dots(13)$$

ここに

$$\alpha = R \sqrt{\frac{G_s J}{E_s C_w}} \dots\dots\dots(14)$$

各荷重状態に対応する微分方程式ならびにそれらの解は表-2に示す。表-2の中で,

$$L_3 = R_0^2 (\bar{R}_a - \bar{R}_i) \dots\dots\dots(15)$$

(3) ねじれ角 θ

ねじれ角 θ は M_w 値から2度積分して与えられる。

$$\theta = \iint \frac{M_w}{E_s C_w} - R^2 (d\varphi)^2 + A\varphi + B \dots\dots\dots(16)$$

ここに A, B は積分定数で, 境界条件から決まる。その結果は表-3のようである。

(4) 断面回転角 β

断面回転角 β に関するつぎの微分方程式は容易に誘導できる。

表-2 両支点における境界条件 断面が自由にそる $M_w=0$

荷重	曲げねじりモーメント M_w の解
(1)	$R p_0 \left\{ \frac{L_1}{\alpha^2+1} \frac{\sin \varphi + \sin(\Phi-\varphi)}{\sin \Phi} - \left(\frac{L_1}{\alpha^2+1} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right) \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha(\Phi-\varphi)}{\sinh \alpha \Phi} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right\}$
(2)	$RW \left\{ \frac{\bar{R}^2}{\alpha^2+1} \frac{\sin \varphi + \sin(\Phi-\varphi)}{\sin \Phi} - \left(\frac{\bar{R}^2}{\alpha^2+1} - \frac{\bar{R}R_0}{\alpha^2} \right) \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha(\Phi-\varphi)}{\sinh \alpha \Phi} - \frac{\bar{R}R_0}{\alpha^2} \right\}$
(3)	$\frac{R}{R_0} W \left\{ \left(\frac{L_2}{\alpha^2+1} - \frac{L_3}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha(\Phi-\Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi + \frac{L_2}{\alpha^2+1} \frac{\sin(\Phi-\Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{R}{R_0} W \left\{ \left(\frac{L_2}{\alpha^2+1} - \frac{L_3}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha(\Phi-\varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi + \frac{L_2}{\alpha^2+1} \frac{\sin(\Phi-\varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(4)	$RP \left\{ \left(\frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} - \frac{R_0}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha(\Phi-\Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi + \frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} \frac{\sin(\Phi-\Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $RP \left\{ \left(\frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} - \frac{R_0}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha(\Phi-\varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi + \frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} \frac{\sin(\Phi-\varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(5)	$R p_0 \left\{ \left(\frac{L_1}{\alpha^2+1} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right) \frac{\cosh \alpha(\Phi-\Psi) - 1}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi + \frac{L_1}{\alpha^2+1} \frac{1 - \cos(\Phi-\Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $R p_0 \left\{ \frac{L_1}{\alpha^2+1} \frac{\sin \varphi + \sin(\Phi-\varphi) \cos \Psi}{\sin \Phi} - \left(\frac{L_1}{\alpha^2+1} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right) \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha(\Phi-\varphi) \cosh \alpha \Psi}{\sinh \alpha \Phi} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(6)	$-m_T \frac{R}{\alpha^2+1} \left[\alpha \frac{\sinh \alpha(\Phi-\Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi + \frac{\sin(\Phi-\Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi \right], 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $-m_T \frac{R}{\alpha^2+1} \left[\alpha \frac{\sinh \alpha(\Phi-\varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi + \frac{\sin(\Phi-\varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi \right], \Psi \leq \varphi \leq \Phi$

表-3 両支点における境界条件 ねじりに対し固定 $\theta=0$

荷重	ねじれ角 θ の解
(1)	$\frac{R p_0}{G_s J} \left\{ \left(\frac{L_2}{\alpha^2} - \frac{L_1}{\alpha^2+1} \right) \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha(\Phi-\varphi)}{\sinh \alpha \Phi} - \frac{L_1}{\alpha^2+1} \alpha^2 \frac{\sin \varphi + \sin(\Phi-\varphi)}{\sin \Phi} + \frac{L_2}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2 \Phi \varphi}{2} - \frac{\alpha^2 \varphi^2}{2} - 1 \right) + L_1 \right\}$
(2)	$\frac{RW}{G_s J} \left\{ \left(\frac{R_0}{\alpha^2} - \frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} \right) \bar{R} \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha(\Phi-\varphi)}{\sinh \alpha \Phi} - \frac{\bar{R}^2}{\alpha^2+1} \alpha^2 \frac{\sin \varphi + \sin(\Phi-\varphi)}{\sin \Phi} + \frac{R_0 \bar{R}}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2 \Phi \varphi}{2} - \frac{\alpha^2 \varphi^2}{2} - 1 \right) + \bar{R}^2 \right\}$
(3)	$\frac{RW}{R_0 G_s J} \left\{ \left(\frac{L_2}{\alpha^2+1} - \frac{L_3}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha(\Phi-\Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi - \frac{L_2}{\alpha^2+1} \alpha^2 \frac{\sin(\Phi-\Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi + L_3 \frac{\Phi-\Psi}{\Phi} \varphi \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{RW}{R_0 G_s J} \left\{ \left(\frac{L_2}{\alpha^2+1} - \frac{L_3}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha(\Phi-\varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi - \frac{L_2}{\alpha^2+1} \alpha^2 \frac{\sin(\Phi-\varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi + L_3 \frac{\Phi-\varphi}{\Phi} \Psi \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(4)	$\frac{RP}{G_s J} \left\{ \left(\frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} - \frac{R_0}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha(\Phi-\Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi - \frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} \alpha^2 \frac{\sin(\Phi-\Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi + R_0 \frac{\Phi-\Psi}{\Phi} \varphi \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{RP}{G_s J} \left\{ \left(\frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} - \frac{R_0}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\sinh \alpha(\Phi-\varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi - \frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} \alpha^2 \frac{\sin(\Phi-\varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi + R_0 \frac{\Phi-\varphi}{\Phi} \Psi \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(5)	$\frac{R p_0}{G_s J} \left\{ \left(\frac{L_1}{\alpha^2+1} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right) \frac{\cosh \alpha(\Phi-\Psi) - 1}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi - \frac{L_1}{\alpha^2+1} \alpha^2 \frac{1 - \cos(\Phi-\Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi + \frac{L_2}{2\Phi} (\Phi-\Psi)^2 \varphi \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{R p_0}{G_s J} \left\{ \left(\frac{L_2}{\alpha^2} - \frac{L_1}{\alpha^2+1} \right) \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha(\Phi-\varphi) \cosh \alpha \Psi}{\sinh \alpha \Phi} - \frac{L_1}{\alpha^2+1} \alpha^2 \frac{\sin \varphi + \sin(\Phi-\varphi) \cos \Psi}{\sin \Phi} - \frac{L_2}{2} (\varphi-\Psi)^2 + \frac{\varphi}{2\Phi} L_2 (\Phi-\Psi)^2 + L_1 - \frac{L_2}{\alpha^2} \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(6)	$-m_T \frac{R \alpha}{G_s J (\alpha^2+1)} \left\{ \frac{\sinh \alpha(\Phi-\Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi - \alpha \frac{\sin(\Phi-\Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $-m_T \frac{R \alpha}{G_s J (\alpha^2+1)} \left\{ \frac{\sinh \alpha(\Phi-\varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi - \alpha \frac{\sin(\Phi-\varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$

$$\frac{d^2 \beta}{d\varphi^2} + \beta = M_w \frac{R^2}{E_s C_w} + M_y \frac{R}{E_s I_y'} \dots\dots\dots(17)$$

ここに

$$I_y' = I_y - \frac{I_y z^2}{I_z} \dots\dots\dots(18)$$

方程式 (17) の右辺 M_y および M_w の項は表-1, 2 のようにすでに φ の関数として知られている。これらを用いて代表的荷重状態について β を求めれば、表-4 のようである。表-4 の中にふくまれる定数 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ はつぎの値をとる。

$$\kappa_1 = \left[\frac{R^2}{E_s C_w (\alpha^2+1)} + \frac{1}{E_s I_y'} \right] \frac{L_1}{2} \dots\dots\dots(19-1)$$

$$\kappa_2 = \frac{R^2}{E_s C_w (\alpha^2+1)} \left(\frac{L_1}{\alpha^2+1} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right) \dots\dots\dots(19-2)$$

$$\kappa_3 = \frac{R^2 L_2}{E_s C_w \alpha^2} + \frac{L_1}{E_s I_y'} \dots\dots\dots(19-3)$$

μ_1, μ_2 および μ_3 はそれぞれ κ_1, κ_2 および κ_3 において $L_1 \rightarrow \bar{R}^2, L_2 \rightarrow R_0 \bar{R}$ でおきかえた値をもつものである。また定数 ν_1 と ν_2 は、

$$\nu_1 = \left[\frac{R^2}{E_s C_w (\alpha^2+1)} + \frac{1}{E_s I_y'} \right] \frac{L_2}{2} \dots\dots\dots(20-1)$$

表-4 両支点における境界条件 ねじりに対し固定, 剛支承 $\beta=0, x=\frac{R^2}{L_1}\kappa_1$

荷重	断面回転角 β の解
(1)	$R p_0 \left\{ \kappa_1 \left[\frac{1-\cos \Phi}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi \right) + (\varphi - \Phi) \sin \varphi \right] \right.$ $\left. + \kappa_2 \left[\frac{\sin \varphi + \sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} - \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \right] + \kappa_3 \left[\frac{\sin \varphi + \sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} - 1 \right] \right\}$
(2)	$R W \left\{ \mu_1 \left[\frac{1-\cos \Phi}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi \right) + (\varphi - \Phi) \sin \varphi \right] \right.$ $\left. + \mu_2 \left[\frac{\sin \varphi + \sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} - \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \right] + \mu_3 \left[\frac{\sin \varphi + \sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} - 1 \right] \right\}$
(3)	$\frac{R}{R_0} W \left\{ \nu_1 \left[\frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi \right) + (\sin \overline{\Phi - \Psi} - \overline{\Phi - \Psi} \cos \overline{\Phi - \Psi}) \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} \right] \right.$ $\left. + \nu_2 \alpha \left[\frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi - \alpha \sin(\Phi - \Psi) \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} \right] \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{R}{R_0} W \left\{ \nu_1 \left[\frac{\sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} - \Psi \cos \Psi \right) + (\sin \overline{\Phi - \varphi} - \overline{\Phi - \varphi} \cos \overline{\Phi - \varphi}) \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \right] \right.$ $\left. + \nu_2 \alpha \left[\frac{\sinh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi - \alpha \sin(\Phi - \varphi) \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \right] \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(4)	$\frac{R P}{R} \left\{ \mu_1 \left[\frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi \right) + (\sin \overline{\Phi - \Psi} - \overline{\Phi - \Psi} \cos \overline{\Phi - \Psi}) \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} \right] \right.$ $\left. + \mu_2 \alpha \left[\frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi - \alpha \sin(\Phi - \Psi) \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} \right] \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{R P}{R} \left\{ \mu_1 \left[\frac{\sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} - \Psi \cos \Psi \right) + (\sin \overline{\Phi - \varphi} - \overline{\Phi - \varphi} \cos \overline{\Phi - \varphi}) \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \right] \right.$ $\left. + \mu_2 \alpha \left[\frac{\sinh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi - \alpha \sin(\Phi - \varphi) \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \right] \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(5)	$R p_0 \left\{ \frac{\kappa_1}{\sin \Phi} \left[(\cos \Phi - \cos \Psi) \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} + \varphi \cos \varphi (\cos \overline{\Phi - \Psi} - 1) + \Psi \sin(\Phi - \Psi) \sin \varphi \right] \right.$ $\left. + \kappa_2 \left[\frac{\cosh \alpha (\Phi - \Psi) - 1}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi + \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} (1 - \cos \overline{\Phi - \Psi}) \right] + \kappa_3 \left[1 - \cos(\Phi - \Psi) \right] \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $R p_0 \left\{ \frac{\kappa_1}{\sin \Phi} \left[(\cos \Phi - \cos \Psi) \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi + \varphi \cos(\Phi - \varphi) \cos \Psi + \Psi \sin(\Phi - \varphi) \sin \Psi \right] \right.$ $\left. + \kappa_2 \left[\frac{\sin \varphi + \sin(\Phi - \varphi) \cos \Psi}{\sin \Phi} - \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha (\Phi - \varphi) \cosh \alpha \Psi}{\sinh \alpha \Phi} \right] \right.$ $\left. + \kappa_3 \left[\frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} + \sin(\Phi - \varphi) \frac{\cos \Psi}{\sin \Phi} - 1 \right] \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(6)	$-m_T \left\{ \frac{\lambda}{R} \left[\frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi \right) + (\sin \overline{\Phi - \Psi} - \overline{\Phi - \Psi} \cos \overline{\Phi - \Psi}) \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} \right] \right.$ $\left. + \frac{R^3 \alpha}{E_s C_w (\alpha^2 + 1)^2} \left[\frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi - \alpha \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi \right] \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $-m_T \left\{ \frac{\lambda}{R} \left[\frac{\sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} - \Psi \cos \Psi \right) + (\sin \overline{\Phi - \varphi} - \overline{\Phi - \varphi} \cos \overline{\Phi - \varphi}) \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \right] \right.$ $\left. + \frac{R^3 \alpha}{E_s C_w (\alpha^2 + 1)^2} \left[\frac{\sinh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi - \alpha \frac{\sin(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi \right] \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$

$$\nu_2 = \frac{R^2}{E_s C_w (\alpha^2 + 1)} \left(\frac{L_2}{\alpha^2 + 1} - \frac{L_3}{\alpha^2} \right) \dots \dots (20-2)$$

(5) たわみ δ

任意断面におけるせん断中心のたわみ δ は (3) の θ と (4) の β を用いて, 次式で与えられる。

$$\delta = R_0 (\theta - \beta)$$

代表的荷重状態について, δ の解を求めれば表-5 のようである。

(6) St. Venant ねじりモーメント T_s

St. Venant ねじりモーメント T_s は, θ の解を用いて

$$T_s = G_s J \frac{d\theta}{R d\varphi}$$

より容易に得られる。その結果を表-6 に示す。

(7) 2次ねじりモーメント T_w

2次ねじりモーメント T_w は, やはり θ の解を用いて,

$$T_w = E_s C_w \frac{d^3 \theta}{R^3 d\varphi^3}$$

より, ただちに計算できる。 T_w の解を表-7 に示す。

(8) 全ねじりモーメント T

(6) と (7) で得られた 2種のねじりモーメント T_s と T_w の和として, 全ねじりモーメント T が表-8 のように求まる。

(9) せん断力 Q

せん断力 Q は式 (5) からすでに (1) と (8) において得られた M_y と T を用いて式 (5)' より求まる。

表-5 両支点における境界条件 剛支承 $\delta=0$ $\omega_1 = \frac{L_1 \alpha^2}{G_s J (\alpha^2 + 1)} + \kappa_2 + \kappa_3$, $\omega_2 = \frac{\bar{R}^2 \alpha^2}{G_s J (\alpha^2 + 1)} + \mu_2 + \mu_3$

荷重	た わ み δ の 解
(1)	$R_0 R \rho_0 \left\{ -\frac{\kappa_2}{\alpha^2} \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} - \omega_1 \frac{\sin \varphi + \sin (\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} + \frac{1}{G_s J} \left[\frac{L_2}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2 \varphi \Phi}{2} - \frac{\alpha^2 \varphi^2}{2} - 1 \right) + L_1 \right] - \kappa_1 \left[\frac{1 - \cos \Phi}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi \right) + (\varphi - \Phi) \sin \varphi \right] + \kappa_3 \right\}$
(2)	$R_0 R W \left\{ -\frac{\mu_2}{\alpha^2} \frac{\sinh \alpha \varphi + \sinh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} - \omega_2 \frac{\sin \varphi + \sin (\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} + \frac{1}{G_s J} \left[\frac{R_0 \bar{R}}{\alpha^2} \left(\frac{\alpha^2 \varphi \Phi}{2} - \frac{\alpha^2 \varphi^2}{2} - 1 \right) + \bar{R}^2 \right] - \mu_1 \left[\frac{1 - \cos \Phi}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi \right) + (\varphi - \Phi) \sin \varphi \right] + \mu_3 \right\}$
(3)	$RW \left\{ \frac{\nu_2}{\alpha} \frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi + \alpha^2 \left[\nu_2 - \frac{L_2}{G_s J (\alpha^2 + 1)} \right] \frac{\sin (\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi - \nu_1 \left[\frac{\sin (\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi \right) + (\sin \overline{\Phi - \Psi} - \overline{\Phi - \Psi} \cos \overline{\Phi - \Psi}) \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} \right] + \frac{L_3}{G_s J} \frac{\Phi - \Psi}{\Phi} \varphi \right\}, \quad 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $RW \left\{ \frac{\nu_2}{\alpha} \frac{\sinh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi + \alpha^2 \left[\nu_2 - \frac{L_2}{G_s J (\alpha^2 + 1)} \right] \frac{\sin (\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi - \nu_1 \left[\frac{\sin (\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} - \Psi \cos \Psi \right) + (\sin \overline{\Phi - \varphi} - \overline{\Phi - \varphi} \cos \overline{\Phi - \varphi}) \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \right] + \frac{L_3}{G_s J} \frac{\Phi - \varphi}{\Phi} \Psi \right\}, \quad \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(4)	$\frac{R_0 R}{\bar{R}} P \left\{ \frac{\mu_2}{\alpha} \frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi + \alpha^2 \left[\mu_2 - \frac{\bar{R}^2}{G_s J (\alpha^2 + 1)} \right] \frac{\sin (\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi - \mu_1 \left[\frac{\sin (\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi \right) + (\sin \overline{\Phi - \Psi} - \overline{\Phi - \Psi} \cos \overline{\Phi - \Psi}) \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} \right] + \frac{R_0 \bar{R}}{G_s J} \frac{\Phi - \Psi}{\Phi} \varphi \right\}, \quad 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{R_0 R}{\bar{R}} P \left\{ \frac{\mu_2}{\alpha} \frac{\sinh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi + \alpha^2 \left[\mu_2 - \frac{\bar{R}^2}{G_s J (\alpha^2 + 1)} \right] \frac{\sin (\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi - \mu_1 \left[\frac{\sin (\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} - \Psi \cos \Psi \right) + (\sin \overline{\Phi - \varphi} - \overline{\Phi - \varphi} \cos \overline{\Phi - \varphi}) \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \right] + \frac{R_0 \bar{R}}{G_s J} \frac{\Phi - \varphi}{\Phi} \Psi \right\}, \quad \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(5)	$R_0 R \rho_0 \left\{ \frac{\kappa_2}{\alpha^2} \frac{\cosh \alpha (\Phi - \Psi) - 1}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi - \omega_1 \frac{1 - \cos (\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi + \frac{L_2 \varphi}{2 G_s J \Phi} (\Phi - \Psi)^2 - \kappa_1 \left[\frac{1 - \cos (\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi \right) - (\Phi - \Psi) \sin (\Phi - \Psi) \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} \right] \right\}, \quad 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $R_0 R \rho_0 \left\{ -\frac{\kappa_2}{\alpha^2} \frac{\sinh \alpha \varphi + \cosh \alpha \Psi \sinh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} - \omega_1 \frac{\sin \varphi + \cos \Psi \sin (\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} + \frac{1}{G_s J} \left[L_1 + L_2 \left(\frac{\varphi}{2 \Phi} \overline{\Phi - \Psi}^2 - \frac{1}{2} \overline{\varphi - \Psi}^2 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \right] - \frac{\kappa_1}{\sin \Phi} \left[(\cos \Phi - \cos \Psi) \frac{\Phi \sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi + \varphi \cos (\Phi - \varphi) \cos \Psi + \Psi \sin (\Phi - \varphi) \sin \Psi \right] + \kappa_3 \right\}, \quad \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(6)	$-m_T R_0 R \left\{ \frac{R^2}{E_s C_w (\alpha^2 + 1)^2 \alpha} \frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \varphi + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \left[\frac{R^2}{E_s C_w (\alpha^2 + 1)} - \frac{1}{G_s J} \right] \frac{\sin (\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \sin \varphi - \frac{\lambda}{R^2} \left[\frac{\sin (\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} - \varphi \cos \varphi \right) + (\sin \overline{\Phi - \Psi} - \overline{\Phi - \Psi} \cos \overline{\Phi - \Psi}) \frac{\sin \varphi}{\sin \Phi} \right] \right\}, \quad 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $-m_T R_0 R \left\{ \frac{R^2}{E_s C_w (\alpha^2 + 1)^2 \alpha} \frac{\sinh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \left[\frac{R^2}{E_s C_w (\alpha^2 + 1)} - \frac{1}{G_s J} \right] \frac{\sin (\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi - \frac{\lambda}{R^2} \left[\frac{\sin (\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \left(\Phi \cos \Phi \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} - \Psi \cos \Psi \right) + (\sin \overline{\Phi - \varphi} - \overline{\Phi - \varphi} \cos \overline{\Phi - \varphi}) \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \right] \right\}, \quad \Psi \leq \varphi \leq \Phi$

表-6

荷重	St. Venant のねじりモメント T_s
(1)	$\rho_0 \left\{ \left(\frac{L_1}{\alpha^2 + 1} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\cosh \alpha (\Phi - \varphi) - \cosh \alpha \varphi}{\sinh \alpha \Phi} + \frac{L_1 \alpha^2}{\alpha^2 + 1} \frac{\cos (\Phi - \varphi) - \cos \varphi}{\sin \Phi} + L_2 \left(\frac{\Phi}{2} - \varphi \right) \right\}$
(2)	$W \left\{ \left(\frac{\bar{R}^2}{\alpha^2 + 1} - \frac{\bar{R} R_0}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\cosh \alpha (\Phi - \varphi) - \cosh \alpha \varphi}{\sinh \alpha \Phi} + \frac{\bar{R}^2 \alpha^2}{\alpha^2 + 1} \frac{\cos (\Phi - \varphi) - \cos \varphi}{\sin \Phi} + \bar{R} R_0 \left(\frac{\Phi}{2} - \varphi \right) \right\}$
(3)	$\frac{W}{R_0} \left\{ \left(\frac{L_2}{\alpha^2 + 1} - \frac{L_3}{\alpha^2} \right) \alpha^2 \frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \cosh \alpha \varphi - \frac{L_2 \alpha^2}{\alpha^2 + 1} \frac{\sin (\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi + L_3 \frac{\Phi - \Psi}{\Phi} \right\}, \quad 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{W}{R_0} \left\{ \left(\frac{L_3}{\alpha^2} - \frac{L_2}{\alpha^2 + 1} \right) \alpha^2 \frac{\cosh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi + \frac{L_2 \alpha^2}{\alpha^2 + 1} \frac{\cos (\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi - L_3 \frac{\Psi}{\Phi} \right\}, \quad \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(4)	$P \left\{ \left(\frac{\bar{R}}{\alpha^2 + 1} - \frac{R_0}{\alpha^2} \right) \alpha^2 \frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \cosh \alpha \varphi - \frac{\bar{R} \alpha^2}{\alpha^2 + 1} \frac{\sin (\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi + R_0 \frac{\Phi - \Psi}{\Phi} \right\}, \quad 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $P \left\{ \left(\frac{R_0}{\alpha^2} - \frac{\bar{R}}{\alpha^2 + 1} \right) \alpha^2 \frac{\cosh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi + \frac{\bar{R} \alpha^2}{\alpha^2 + 1} \frac{\cos (\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi - R_0 \frac{\Psi}{\Phi} \right\}, \quad \Psi \leq \varphi \leq \Phi$

表-6 つづき

(5)	$p_0 \left\{ \left(\frac{L_1}{\alpha^2+1} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\cosh \alpha \varphi}{\sinh \alpha \Phi} [\cosh \alpha (\Phi - \Psi) - 1] - \frac{L_1 \alpha^2}{\alpha^2+1} [1 - \cos(\Phi - \Psi)] \frac{\cos \varphi}{\sin \Phi} + \frac{L_2}{2\Phi} (\Phi - \Psi)^2 \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $p_0 \left\{ \left(\frac{L_1}{\alpha^2+1} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\cosh \alpha (\Phi - \varphi) \cosh \alpha \Psi - \cosh \alpha \varphi}{\sinh \alpha \Phi} + \frac{L_1 \alpha^2}{\alpha^2+1} \frac{\cos(\Phi - \varphi) \cos \Psi - \cos \varphi}{\sin \Phi} \right.$ $\left. + L_2 \left[\Psi - \varphi + \frac{1}{2\Phi} (\Phi - \Psi)^2 \right] \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(6)	$-m_T \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} \left[\frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \cosh \alpha \varphi - \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi \right], 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $m_T \frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} \left[\frac{\sinh \alpha \Psi}{\sinh \alpha \Phi} \cosh \alpha (\Phi - \varphi) - \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \cos(\Phi - \varphi) \right], \Psi \leq \varphi \leq \Phi$

表-7

荷重	2次ねじりモーメント T_w
(1)	$p_0 \left\{ \left(\frac{L_2}{\alpha^2} - \frac{L_1}{\alpha^2+1} \right) \alpha \frac{\cosh \alpha (\Phi - \varphi) - \cosh \alpha \varphi}{\sinh \alpha \Phi} + \frac{L_1}{\alpha^2+1} \frac{\cos(\Phi - \varphi) - \cos \varphi}{\sin \Phi} \right\}$
(2)	$W \left\{ \left(\frac{\bar{R} R_0}{\alpha^2} - \frac{\bar{R}^2}{\alpha^2+1} \right) \alpha \frac{\cosh \alpha (\Phi - \varphi) - \cosh \alpha \varphi}{\sinh \alpha \Phi} + \frac{\bar{R}^2}{\alpha^2+1} \frac{\cos(\Phi - \varphi) - \cos \varphi}{\sin \Phi} \right\}$
(3)	$\frac{W}{R_0} \left\{ \left(\frac{L_3}{\alpha^2} - \frac{L_2}{\alpha^2+1} \right) \alpha^2 \frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \cosh \alpha \varphi - \frac{L_2}{\alpha^2+1} \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{W}{R_0} \left\{ \left(\frac{L_2}{\alpha^2+1} - \frac{L_3}{\alpha^2} \right) \alpha^2 \frac{\cosh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi + \frac{L_2}{\alpha^2+1} \frac{\cos(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(4)	$P \left\{ \left(\frac{R_0}{\alpha^2} - \frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} \right) \alpha^2 \frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \cosh \alpha \varphi - \frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $P \left\{ \left(\frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} - \frac{R_0}{\alpha^2} \right) \alpha^2 \frac{\cosh \alpha (\Phi - \varphi)}{\sinh \alpha \Phi} \sinh \alpha \Psi + \frac{\bar{R}}{\alpha^2+1} \frac{\cos(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(5)	$p_0 \left\{ \left(\frac{L_2}{\alpha^2} - \frac{L_1}{\alpha^2+1} \right) \alpha \frac{\cosh \alpha (\Phi - \Psi) - 1}{\sinh \alpha \Phi} \cosh \alpha \varphi - \frac{L_1}{\alpha^2+1} \frac{1 - \cos(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $p_0 \left\{ \left(\frac{L_1}{\alpha^2+1} - \frac{L_2}{\alpha^2} \right) \alpha \frac{\cosh \alpha \varphi - \cosh \alpha (\Phi - \varphi) \cosh \alpha \Psi}{\sinh \alpha \Phi} - \frac{L_1}{\alpha^2+1} \frac{\cos \varphi - \cos(\Phi - \varphi) \cos \Psi}{\sin \Phi} \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(6)	$\frac{m_T}{\alpha^2+1} \left\{ \alpha^2 \frac{\sinh \alpha (\Phi - \Psi)}{\sinh \alpha \Phi} \cosh \alpha \varphi + \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $-\frac{m_T}{\alpha^2+1} \left\{ \alpha^2 \frac{\sinh \alpha \Psi}{\sinh \alpha \Phi} \cosh \alpha (\Phi - \varphi) + \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \cos(\Phi - \varphi) \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$

表-8

荷重	ねじりモーメント T の解
(1)	$p_0 \left\{ L_1 \frac{\cos(\Phi - \varphi) - \cos \varphi}{\sin \Phi} + L_2 \left(\frac{\Phi}{2} - \varphi \right) \right\}$
(2)	$\bar{R} W \left\{ \bar{R} \frac{\cos(\Phi - \varphi) - \cos \varphi}{\sin \Phi} + R_0 \left(\frac{\Phi}{2} - \varphi \right) \right\}$
(3)	$-\frac{W}{R_0} \left\{ L_2 \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi - L_3 \frac{\Phi - \Psi}{\Phi} \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{W}{R_0} \left\{ L_2 \frac{\cos(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi - L_3 \frac{\Psi}{\Phi} \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(4)	$-P \left\{ \bar{R} \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi - R_0 \frac{\Phi - \Psi}{\Phi} \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $P \left\{ \bar{R} \frac{\cos(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi - R_0 \frac{\Psi}{\Phi} \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(5)	$p_0 \left\{ -L_1 \frac{1 - \cos(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi + \frac{L_2}{2\Phi} (\Phi - \Psi)^2 \right\}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $p_0 \left\{ L_1 \frac{\cos(\Phi - \varphi) \cos \Psi - \cos \varphi}{\sin \Phi} + L_2 \left(\frac{\Phi^2 + \Psi^2}{2\Phi} - \varphi \right) \right\}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(6)	$m_T \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $-m_T \frac{\sin \Psi}{\sin \Phi} \cos(\Phi - \varphi), \Psi \leq \varphi \leq \Phi$

表-9

荷重	せん断力 Q の解
(1)	$\frac{L_2}{R_0} p_0 \left(\frac{\Phi}{2} - \varphi \right)$
(2)	$\bar{R} W \left(\frac{\Phi}{2} - \varphi \right)$
(3)	$(\bar{R}_a - \bar{R}_i) W \frac{\Phi - \Psi}{\Phi}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $-(\bar{R}_a - \bar{R}_i) W \frac{\Psi}{\Phi}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(4)	$P \frac{\Phi - \Psi}{\Phi}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $-P \frac{\Psi}{\Phi}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(5)	$\frac{p_0}{4\Phi} (\bar{R}_a^2 - \bar{R}_i^2) (\Phi - \Psi)^2, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $\frac{p_0}{2} (\bar{R}_a^2 - \bar{R}_i^2) \left(\frac{\Phi^2 + \Psi^2}{2\Phi} - \varphi \right), \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(6)	0

$$Q = \frac{1}{R_0} \left(\frac{dM_y}{d\varphi} + T \right) \dots\dots\dots(5)'$$

その結果を表-9に示す。式(5)'から明らかのように、このせん断力 Q の中には、ねじりせん断応力からの影響がふくまれている。

4. 応力公式

任意橋断面内の任意点における応力は既報の公式によって、3.の各断面力を用いて容易に計算できる。応力公式をまとめて記せばつぎのようである。

(1) 垂直応力 σ

$$\sigma = \frac{N}{F_s} \frac{R}{n\rho} + \left(\frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z \right) \frac{R}{n\rho} + \frac{M_w}{C_w} \frac{W_s}{n} \dots(21)$$

$I_y, I_z, I_{yz}, F_s, W_s$ および C_w については文献9)参照。

(2) せん断応力 τ

第 k 室に面する、境界でない壁内にある点において、

$$\tau = -(H\check{q}_h + \check{Q}\check{q}_b) \frac{1}{t} + \frac{R^2}{\rho^2} \frac{\check{q}_k}{t} \frac{T_s}{J} + \frac{q^*}{t} \frac{T_w}{C_w} \dots\dots\dots(22-1)$$

第 k 室と第 $k \pm 1$ 室との境界壁内にある点において、

$$\tau = -(H\check{q}_h + \check{Q}\check{q}_b) \frac{1}{t} + \frac{R^2}{\rho^2} (\check{q}_k - \check{q}_{k \pm 1}) \frac{T_s}{tJ} + \frac{q^*}{t} \frac{T_w}{C_w} \dots\dots\dots(22-2)$$

式(22)にふくまれる \check{Q} は曲げによるせん断力で表-10に示される。 $\check{q}_h, \check{q}_b, \check{q}, q^*, J$ および C_w などについては文献9)を参照されたい。

表-10

荷重	曲げによるせん断力 \check{Q}
(1)	$p_0 L_1 \frac{\cos \varphi - \cos(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \cdot \frac{1}{R_0}$
(2)	$W \bar{R}^2 \frac{\cos \varphi - \cos(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \cdot \frac{1}{R_0}$
(3)	$W \frac{L_2}{R_0} \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi \cdot \frac{1}{R_0}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $-W \frac{L_2}{R_0} \frac{\cos(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi \cdot \frac{1}{R_0}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(4)	$P \bar{R} \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi \cdot \frac{1}{R_0}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $-P \bar{R} \frac{\cos(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi \cdot \frac{1}{R_0}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(5)	$p_0 L_1 \frac{1 - \cos(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi \cdot \frac{1}{R_0}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $p_0 L_1 \frac{\cos \varphi - \cos(\Phi - \varphi) \cos \Psi}{\sin \Phi} \cdot \frac{1}{R_0}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$
(6)	$-m_T \frac{\sin(\Phi - \Psi)}{\sin \Phi} \cos \varphi \cdot \frac{1}{R_0}, 0 \leq \varphi \leq \Psi$ $m_T \frac{\cos(\Phi - \varphi)}{\sin \Phi} \sin \Psi \cdot \frac{1}{R_0}, \Psi \leq \varphi \leq \Phi$

5. 数値計算例

直線桁橋との比較の意味で、すでに学会論文集第25号で論じた合成箱桁橋(King County 橋)と同様の断面を有し、同じ支間長を有する曲率半径 30 m の曲線桁橋について数値計算を行なった。支間長 $l=33.527$ m であるから中心角 Φ は、

$$\Phi = \frac{l}{R} = \frac{33.527}{30} = 1.11757$$

計算結果を一括して示せば、つぎのようである。

(1) 断面力

すでに述べたような、代表的な鉛直荷重が載荷した場合、全橋断面の種々な断面力の分布状態を図示すれば、つぎのようである。 $\bar{R}=2664.75; 3000; 3335.25$ cm は内、中、外桁載荷を示す。

- ① 曲げモーメント M_y 図-3
- ② 曲げねじりモーメント M_w 図-4
- ③ 曲げによるせん断力 \check{Q} 図-5
- ④ St. Venant ねじりモーメント T_s 図-6
- ⑤ 2次ねじりモーメント T_w 図-7
- ⑥ 合せん断力 Q 図-8
- ⑦ 合ねじりモーメント T 図-9

(2) 変形量

代表的鉛直荷重が作用する場合の変形状態を、つぎに図示する。

- ① たわみ δ 図-10
- ② 断面回転角 β 図-11
- ③ ねじれ角 θ 図-12

図-3 曲げモーメント M_y

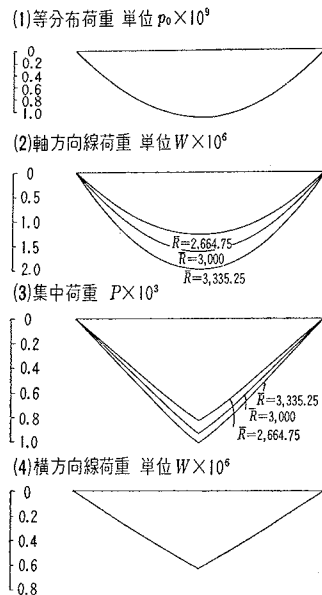
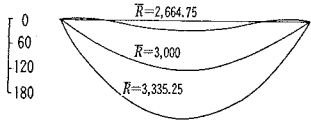


図-4 曲げねじりモーメント M_w

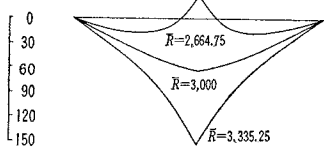
(1) 等分布荷重 単位 $p_0 \times 10^3$ uniformly distributed load unit $p_0 \times 10^3$



(2) 軸方向線荷重 単位 $W \times 10^3$ Line load distributed along the axis $W \times 10^3$



(3) 集中荷重 単位 $P \times 10^3$ Concentrated load unit $P \times 10^3$



(4) 横方向線荷重 単位 $W \times 10^6$

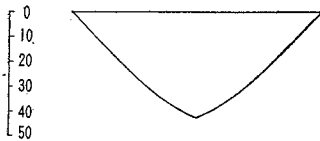
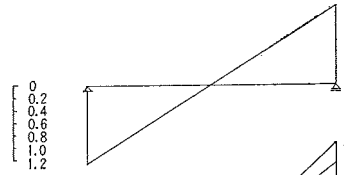


図-5 曲げによるせん断力 \bar{Q}

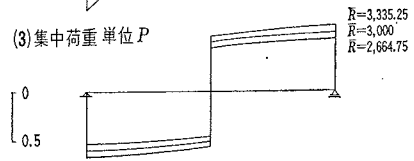
(1) 等分布荷重 単位 $p_0 \times 10$



(2) 軸方向線荷重 単位 $W \times 10^3$



(3) 集中荷重 単位 P



(4) 横方向線荷重 単位 $W \times 10^3$

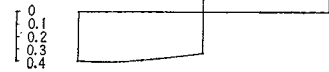
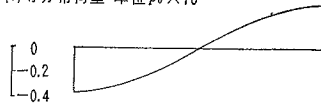
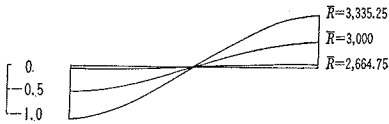


図-6 St. Venant ねじりモーメント T_s

(1) 等分布荷重 単位 $p_0 \times 10^3$



(2) 軸方向線荷重 単位 $W \times 10^6$



(3) 集中荷重 単位 $P \times 10^3$



(4) 横方向線荷重 単位 $W \times 10^6$

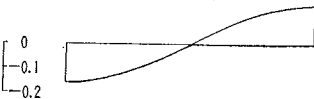
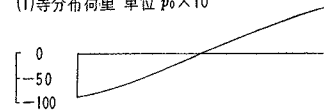
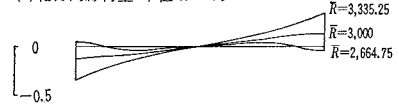


図-7 2次ねじりモーメント T_w

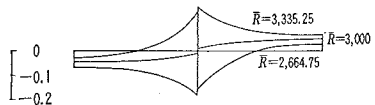
(1) 等分布荷重 単位 $p_0 \times 10^6$



(2) 軸方向線荷重 単位 $W \times 10^6$



(3) 集中荷重 単位 $P \times 10^3$



(4) 横方向線荷重 単位 $W \times 10^3$



図-8 合せん断力 Q

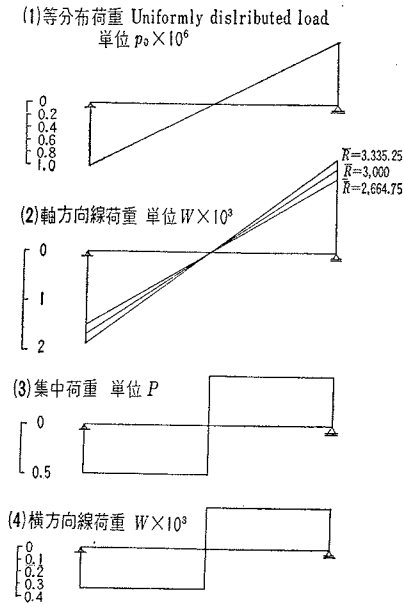


図-9 合ねじりモーメント T

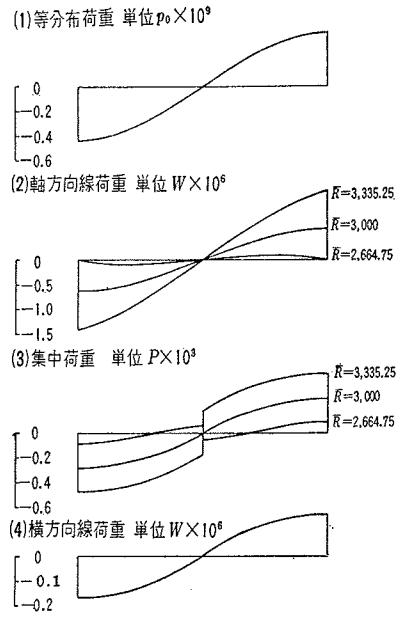


図-10 たわみ δ

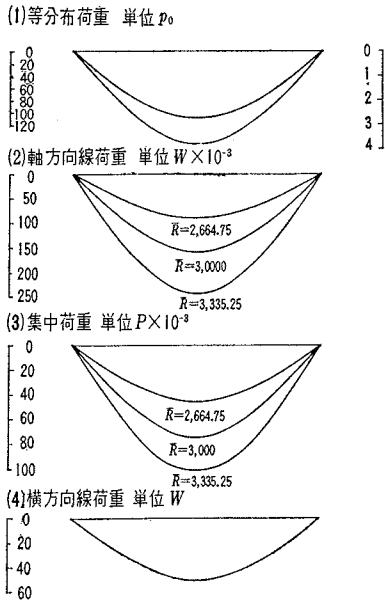


図-11 断面回転角 β

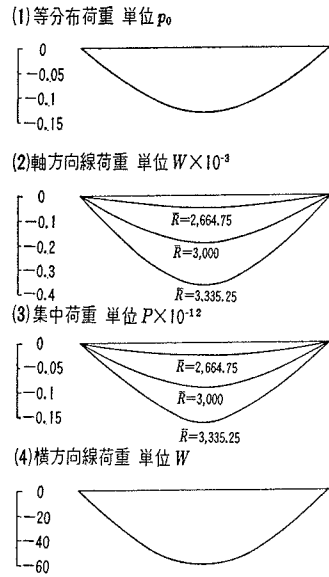
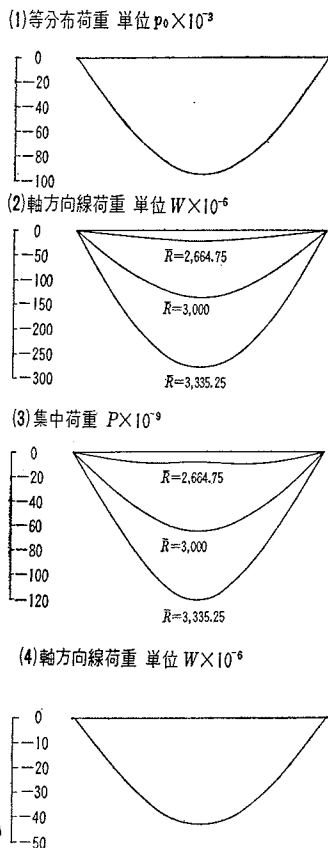


図-12 ねじれ角 θ



(3) 影響面

集中荷重 $P=1$ が橋面上を移動する場合について、断面力および変形量に関する影響面を示せば、つぎのようである。

① 中央断面の曲げモーメント M_y 図-13：横断面半径方向には全く直線状に変化していることを認める。この傾向は、ほかの量の影響面についても同じである。曲げモーメントについては、荷重の横断面方向の位置に関せず大体同じ程度の縦距を有する。そして縦距はスパン方向に大体直線状に変化している。

② 中央断面の曲げねじりモーメント M_w 図-14：有効幅員の外縁に載荷した方が内縁に載荷したときよりも、はるかに大きい縦距を与える。

③ 端部断面の合せん断力 Q 図-15：載荷点の半径方向の位置には無関係で、ただ中心角に比例して橋軸方向に変化する。

④ 端部断面の曲げせん断力 \bar{Q} 図-16： \bar{Q} の影響線は Q のそれに類似しているが、外側載荷に際していくぶん大き目に、内側載荷に際して小さ目になる点が相違している。

⑤ 端部断面の合ねじりモーメント T 図-17：内縁載荷においては、ほとんどねじりモーメントが生じな

い。それに反し、外側載荷の場合には相当大きいねじりモーメントを生ずる。特に支間中央で最大値をとることは直線桁と全く相違する点である。そして中心角が大きくなると支承に負反力を生ずることになるので注意を要する。この合ねじりモーメントはつぎの2つにわけられる。

⑥ St. Venant ねじりモーメント T_s 図-18：ほとんど全橋面にわたって同じ方向（外下り）のねじりモーメントが生ずる。

⑦ 2次ねじりモーメント T_w 図-19：2次ねじりモーメントの大きさは、ほとんどの位置で St. Venant ねじりモーメントに比してかなり小さい。ただ端部断面の付近では相当大きくなっている。

⑧ 中央断面回転角 β 図-20：全橋面のいかなる荷重位置についても常に外向きに回転が起こる。外縁においてその程度がいちじるしい。

⑨ 中央断面ねじり角 θ 図-21

⑩ せん断中心軸中点のたわみ δ 図-22：外縁載荷において大きく、内縁載荷の約2倍となる。

⑪ 外桁中点のたわみ δ_a 図-23

⑫ 内桁中点のたわみ δ_i 図-24：橋断面が外向きに回転するので外桁は常に内桁より大きいたわむことになる。

(4) 中央断面の垂直応力

2つの代表的荷重状態すなわち (a) 鋼道路橋設計方書に規定している等分布荷重 $p_0=350 \text{ kg/m}^2$ が有効幅員の全橋面に載荷した場合、(b) 集中荷重 $P=10 \text{ t}$ が有効幅員の最も外側 $\bar{R}=3,335.25 \text{ cm}$ 、橋軸上 $\bar{R}=3,000 \text{ cm}$ 、および最も内側 $\bar{R}=2,664.75 \text{ cm}$ にそれぞれ載荷した場合について、中央断面内での垂直応力の分布状態を求めた。

① 曲げによる垂直応力 σ_b 図-25 (a), (b)：曲率の影響でいずれも内桁の内側腹板下の下突縁において σ_b が最大値をもつ、全体的に内桁の方が大きくなる。集中荷重では外縁に載る方が大きい応力を生ずる。

② 曲げねじりによる垂直応力 図-26 (a), (b)：曲率が激しい曲線桁橋においては、ほとんど全橋面のどの位置にある鉛直荷重に対しても外向きにねじれる。そのため、そり拘束による垂直応力 σ_w を生ずる。そして外桁に曲げ応力と同じ方向の応力が生じ、内桁に反対方向の応力が生ずる。

③ 合垂直応力 σ 図-27 (a), (b)：上記の2種の垂直応力は外桁で助長しあい、内桁で相消しあう。そのため外桁が内側より約50%以上も大きい応力値を示す。ねじり抵抗が小さい並列I桁橋ではこの傾向がもっといっしょくになるので実際、設計においてははたかなり外桁を内桁より大きい断面にせねばならないことになる。しかし1箱桁橋では逆にねじり抵抗が大きいので、外側腹

図-13 曲げモーメント M_y

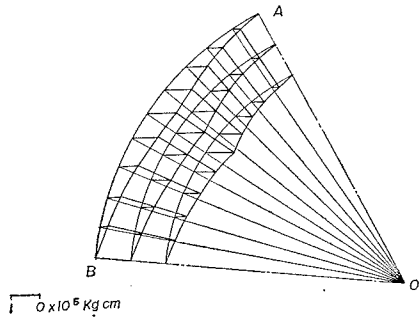


図-14 曲げねじりモーメント M_w
影響面 $P=1 \text{ t}$

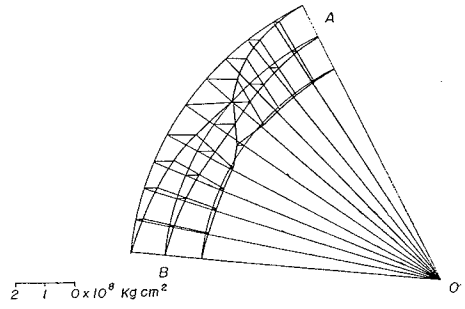


図-15 端部全せん断力 Q

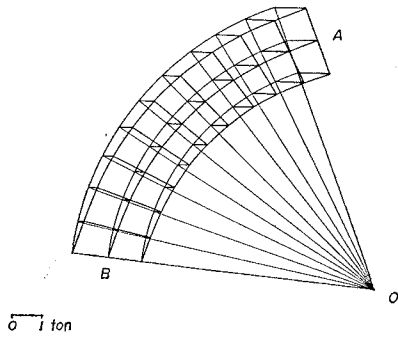


図-16 曲げによる端部せん断力 \bar{Q}
影響面 $P=1 \text{ t}$

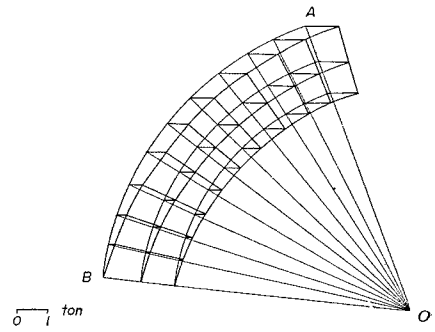


図-17 端部全ねじりモーメント T
影響面 $P=1 \text{ t}$

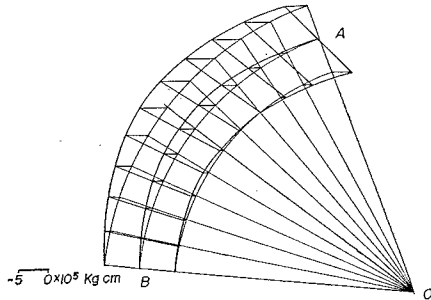


図-18 St. Venant のねじりモーメント T_s
影響面 $P=1 \text{ t}$

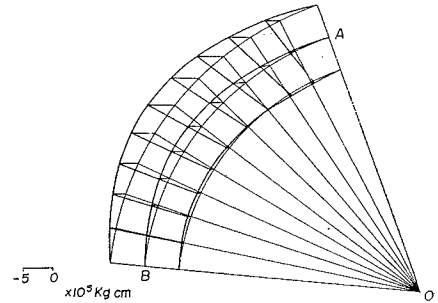


図-19 2次ねじりモーメント T_w

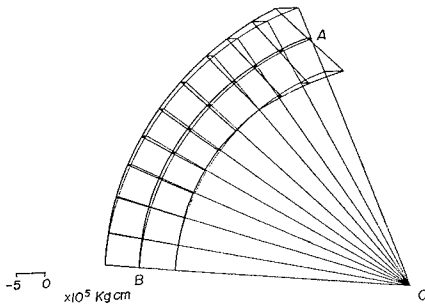


図-20 中央断面回転角 β

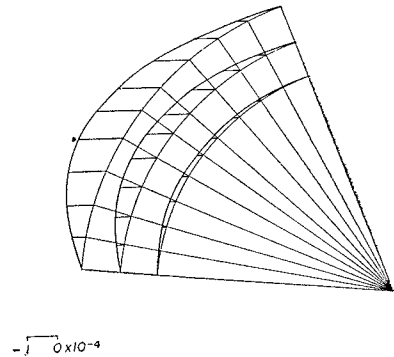


図-21 ねじれ角 θ

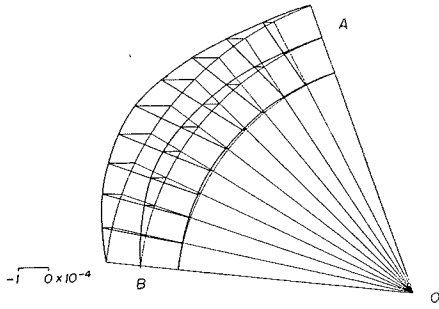


図-22 せん断中心軸中点のたわみ δ

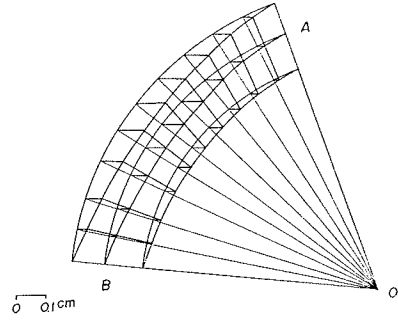


図-23 外桁中点のたわみ δ_a

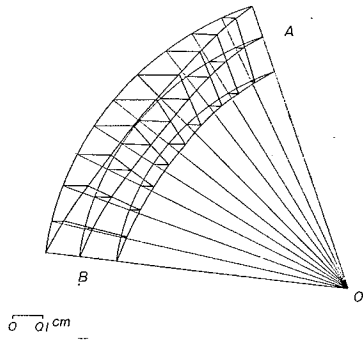


図-24 内桁中央のたわみ δ_i

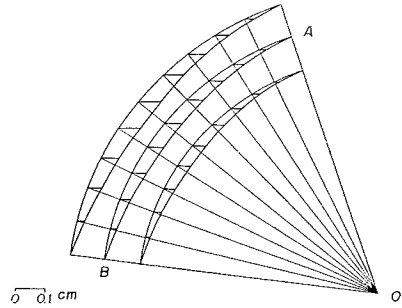


図-25 (a) 曲げ垂直応力分布 σ_b kg/cm²

(A) 等分布荷重 $P_0=0.035$ kg/cm²
コンクリート床板倍率 10 倍

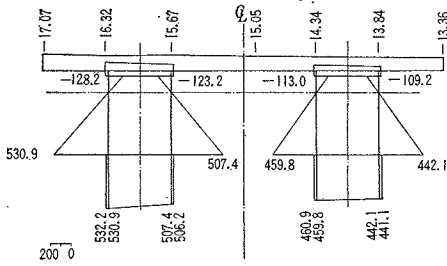
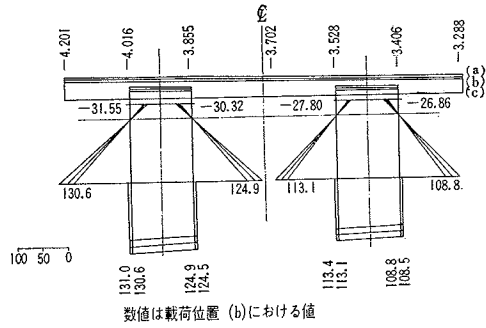


図-25 (b) 曲げ垂直応力分布 σ_b kg/cm²

(A) 集中荷重 $P=10$ t コンクリート倍率 10 倍
(a) $\bar{R}=3335.25$ (b) $\bar{R}=3000$ (c) $\bar{R}=2664.75$



数値は載荷位置 (b) における値

図-26 (a) 曲げねじり垂直応力 σ_w kg/cm²

(A) 等分布荷重 $P_0=0.035$ kg/cm²
コンクリート倍率 10 倍

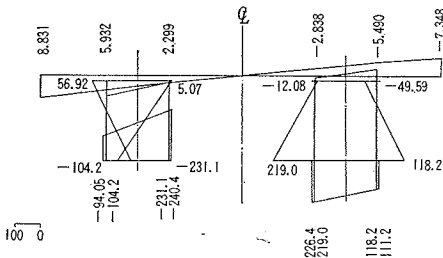
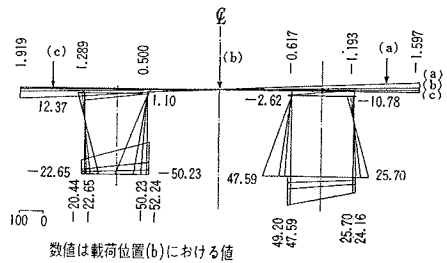


図-26 (b) 曲げねじり垂直応力 σ_w kg/cm²

(B) 集中荷重 $P=10$ t
(a) $\bar{R}=3335.25$ (b) $\bar{R}=3000$ (c) $\bar{R}=2664.75$



数値は載荷位置 (b) における値

図-27 (a) 合垂直応力 σ kg/cm²
(A) 等分布荷重 $P_0=0.03$ kg/cm²

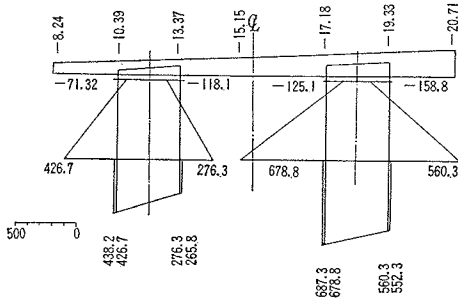
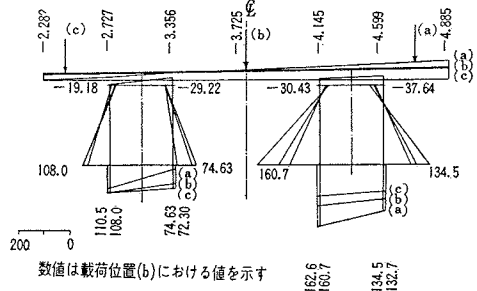


図-27 (b) 合垂直応力 σ kg/cm²
(B) 集中荷重 $P=10$ t



板と内側腹板の応力差がわずかであって、曲線橋として適しているといえる。

(5) 端部断面のせん断力

(4)と同じ2つの代表的荷重状態に対し、端部断面内に生ずるせん断応力の分布状態を図示すれば、つぎのようである。

① 曲げによるせん断応力 τ_b : 図-28(a)には等分布荷重 p_0 が有効幅員の全橋面に満載した際に生ずる、曲げによるせん断応力の分布状態を示す。図中矢印は応力の流れの方向を表わしている。 τ_b についても、曲率の影響を受けて内桁の方が外桁より大きい値をもっている。

図-28 (a) 曲げせん断応力分布 τ_b kg/cm²
(A) 等分布荷重 $P_0=0.035$ kg/cm²
コンクリートの倍率 10 倍

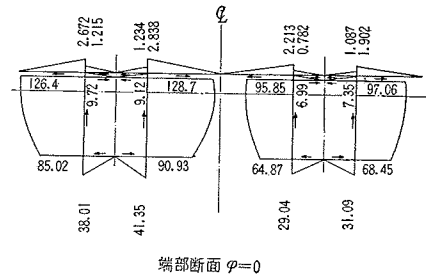
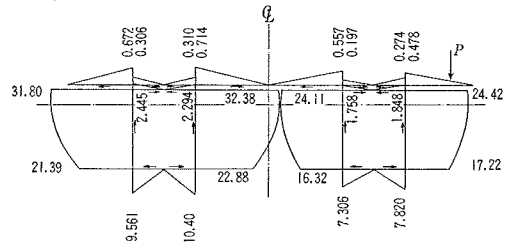


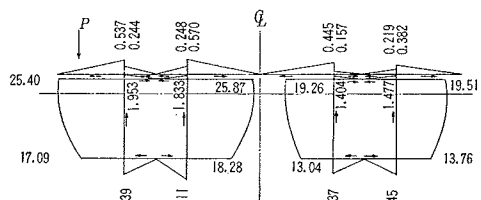
図-28(b) および(c) はそれぞれ集中荷重 $P=10$ t が、端部断面上 $R=3335.25$ cm および $R=2664.75$ cm に載荷した場合のせん断応力の分布状態ならびに流れの方向を示す。断面全体についてみれば、外縁載荷の方が大きい流れの方向は載荷位置にかかわらず同じである。一定の荷重の下では、やはり内桁の方が外桁より大きくなっている。

図-28 (b) 曲げせん断応力分布 τ_b kg/cm²
(B) 集中荷重 $P=10$ t $\bar{R}=3335.25$ cm
コンクリートの倍率 10 倍



② St. Venant せん断応力 τ_s : 等分布荷重 $p_0=350$ kg/m² が満載する場合についていえば、端部断面に図-29のようなせん断応力が生ずる。3種のせん断応力 τ_b , τ_s および τ_w の中で、 τ_s が最大である。箱桁がねじりに有効に抵抗することがこれでうなずかれる。流れの方向は両桁ともに同一方向に向いている。

図-28 (c) 曲げせん断応力分布 τ_b kg/cm²
(C) 集中荷重 $P=10$ t $\bar{R}=2664.75$ cm
コンクリートの倍率 10 倍



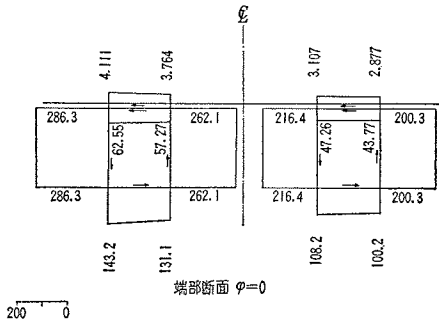
③ 2次せん断応力 τ_w : 等分布荷重が満載した場合の端部断面における2次せん断応力の分布を図-30(a)に示す。

つぎに集中荷重 $P=10$ t が端部断面上、 $\bar{R}=3335.25$ cm および $\bar{R}=2664.75$ cm に載荷した場合について、せん断応力 τ_w の分布状態をそれぞれ図-30(b) および(c)に示す。方向は載荷桁の腹板において上向き、非載荷桁の腹板において下向きになり、これによって1対のねじりモーメント T_w を生ずる。I桁橋のねじり抵抗は主としてこのせん断応力にもとづくものである。

④ 合せせん断応力 τ : 図-31には等分布荷重満載の場合について $\tau_s + \tau_w = \tau$ の分布状態を示す。等分布荷重

図-29 St. Venant せん断応力分布 τ , kg/cm²

(A) 等分布荷重 $P_0=0.035$ kg/cm²
 コンクリート倍率 10 倍



満載で、左右対称の路面を有する直線桁ではねじりを生じないが、曲線桁では外向きのねじり作用を受ける。鋼箱桁部が主としてこれに抵抗するので、その結果、内桁、外桁ともに外側腹板に上向きの大いせん断応力を生ずる。

図-31 (b), (c) はそれぞれ端部断面の $\bar{R}=3335.25$ cm および $\bar{R}=2664.75$ cm に集中荷重 $P=10$ t が作用する場合の合せせん断応力の分布状態を示す。このとき載荷桁のせん断応力がやはり大きい。そして非載荷桁のそれは 1/2 に達しない。換言すれば載荷側の桁でほとんどせん断抵抗を示すわけである。

図-30 (a) 2 次せん断応力分布 τ_w kg/cm²

(A) 等分布荷重 $P_0=0.035$ kg/cm²
 コンクリートの倍率 10 倍

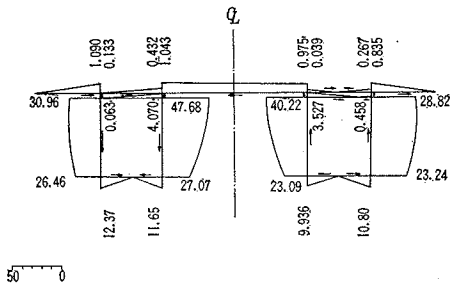


図-31 (a) 合せせん断応力 τ kg/cm²

(A) 等分布荷重 $P_0=0.035$ kg/cm²

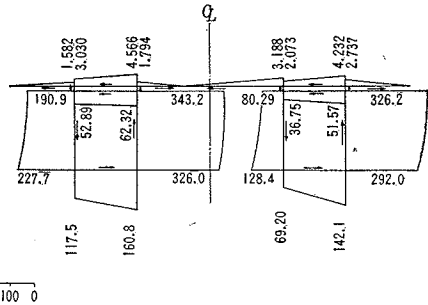


図-30 (b) 2 次せん断応力分布 τ_w kg/cm²

(B) 集中荷重 $P=10$ t $\bar{R}=3335.25$ cm
 コンクリートの倍率 10 倍

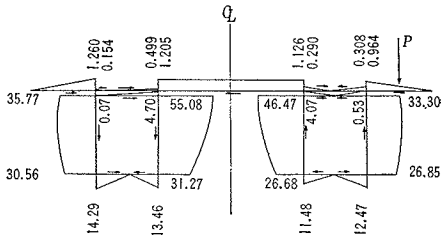


図-31 (b) 合せせん断応力 τ kg/cm²

(B) 集中荷重 $P=10$ t
 (a) $\bar{R}=3335.25$ cm

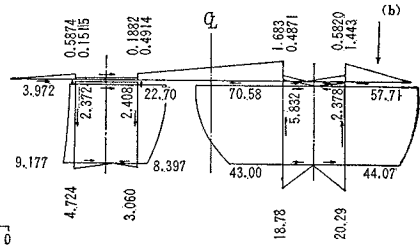


図-30 (c) 2 次せん断応力分布 τ_w kg/cm²

(C) 集中荷重 $P=10$ t $\bar{R}=2664.75$ cm
 コンクリートの倍率 10 倍

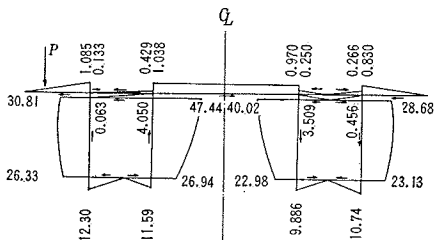
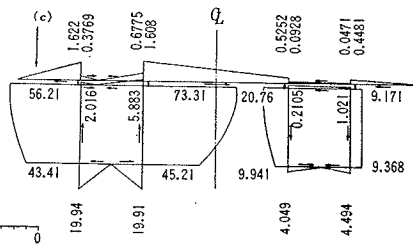


図-31 (c) 合せせん断応力分布 τ kg/cm²

(C) 集中荷重 $P=10$ t
 (c) $\bar{R}=2664.75$ cm



6. 結 言

単純支持薄肉曲線桁橋に代表的鉛直荷重が作用する場合について構造解析を行なった。すなわち、主桁が相互に、かなりの剛性を有する横繫材（横桁、対傾構、床板など）により強固に結合されていて、全橋断面形状が不変であると仮定しうる場合についての理論解を与えた。そして合成2箱桁橋について数値計算例を示し、その静力学的性状を明確にした。本結果を、さらに連続曲線桁橋の解析に応用することについては引き続き発表する予定である。

参 考 文 献

- 1) Gottfeldt, H.: Die Berechnung raumlich gekrummer Stahlbrucken, Die Bautechnik 10 Jahrg. Heft 54 S. 715~724, 1932.
- 2) Velutini, B.: Analysis of Continuous Circular Curved Beams, Jour. ACI, Vol. 22, p. 217~228, 1950.
- 3) Volterra, E.: Deflections of a Circular Beam out of its Initial Plane, Trans. ASCE, Vol. 120, p. 65~91, 1955.
- 4) Volterra, E., Chung, R.: Constrained Circular Beams on Elastic Foundations, Trans. ASCE, Vol. 120, p. 301~310, 1955.
- 5) Oravas, G.: Beitrag zur Berechnung des Kreisringes auf elastischer Unterlage, Der Bauingenieur 31 Jahrg. Heft 5, S. 177~180, 1956.
- 6) Fichel, H.H.: Analysis of Curved Girders. Proc. ASCE, Vol. 85, No. ST 7, p. 113~141 1959.
- 7) Resinger, F., Egger, H.: Die Kummerbrücke ein interessantes Kastenverbundsystem, Der Bauingenieur 35 Jahrg. Heft 6, S. 216~222, 1960.
- 8) Wansleben, F.: Die Berechnung drehfester gekrummer Stahlbrucken, Der Stahlbau 21 Jahrg. Heft 4, S. 53~56, 1952.
- 9) 小西一郎・小松定夫: 薄肉曲線桁の基礎理論, 土木学会論文集 第87号, 昭37.11.
- 10) Cutt, C.E.: Horizontally Curved Box Beams, Trans. ASCE, Vol. 118, p. 517~544, 1953.
- 11) Rudiger, O.: Die strenge Theorie der Faltwerke konstanter krummung, Osterreichisches Ing. Arch. Bd 11, Heft 1, S. 5~20, 1957.
- 12) 小西一郎・小松定夫: 曲線箱桁橋の立体的応力解析, 第15回土木学会年次学術講演会講演概要 第II部, p. 7~8, 昭35.5
- 13) 小西一郎・小松定夫: 連続曲線桁橋の立体的解析, 昭和35年度土木学会 関西支部年次学術講演会講演概要, p. 34~38, 昭35.11.
- 13) 小松定夫: 薄肉構造理論とその橋梁構造物への適用に関する研究, 第四章 曲線桁橋の立体的解析と設計に算法, p. 176~252, 昭36.7

(原稿受付: 1962.5.25)

THREE DIMENSIONAL ANALYSIS OF SIMPLY SUPPORTED CURVED GIRDER BRIDGES

By *Dr. Eng., Ichirō Konishi, C.E. Member and
Dr. Eng., Sadao Komatsu, C.E. Member*

SYNOPSIS

Whenever a curved girder bridge is loaded transversely, the bending and torsion are generally bicoupled. Hence, it is much favorable to adopt such a structural type as box girder bridge or grillage one, which can resist effectively the torsion induced over the whole cross section of bridge.

In this paper, the authors have obtained the solutions for the deformations and also for the stress resultants by means of the generalized torsion bending theory which they developed in the previous paper.

1. Fundamental differential equations and boundary conditions.

Firstly, the authors reduced six pertinent equations of statical equilibrium for the differential element cut off by two vertical planes, which contain an infinitely small angle and pass through the center of curvature both.

From these equations the authors obtained, through substitutions, the following four fundamental equations governing the two bending moments M_y, M_z , with respect to the horizontal and vertical axes Oy, Oz through the centroid O_n of the bridge section, the axial force N and also warping moment M_w .

When arbitrary vertical load acts upon the curved girder, the differential equations and the boundary conditions for the bending moment M_y , the warping moment M_w , the twist θ , the absolute rotating angle β , the deflection δ , the St. Venant's torsional moment T_s , the secondary torsional moment T_w , and the shear Q , are expressed in the following Table A.

2. The solution of the stress resultant and the deformation.

The solution for the simply supported girder can be readily found in order of Table A, and that are given, for various loading conditions as shown in Fig. 1, in Tables 1~9 inserted in

Table A.

	differential equation	boundary condition
M_y	$\frac{d^2 M_y}{d\varphi^2} + M_y = - \int \frac{\bar{R}\alpha}{\bar{R}_i} p \rho^2 d\rho$	$M_y = 0$
M_w	$\frac{d^2 M_w}{d\varphi^2} - \alpha^2 M_w = -R \left(M_y + \int \frac{\bar{R}\alpha}{\bar{R}_i} p Y \rho d\rho \right)$	$M_w = 0$
θ	$E_s C_w \frac{d^2 \theta}{R^2 d\varphi^2} = M_w$	$\theta = 0$
β	$\frac{d^2 \beta}{d\varphi^2} + \beta = M_y \frac{R}{E_s I_y'} + M_w \frac{R^2}{E_s C_w}$	$\beta = 0$
δ	$\delta = R_0(\theta - \beta)$	$\delta = 0$
T_s	$T_s = G_s J \frac{d\theta}{R d\varphi}$	—
T_w	$T_w = -E_s C_w \frac{d^3 \theta}{R^3 d\varphi^3}$	—
T	$T = T_s + T_w$	—
Q	$Q = \frac{1}{R_0} \left(\frac{dM_y}{d\varphi} + T \right)$	—

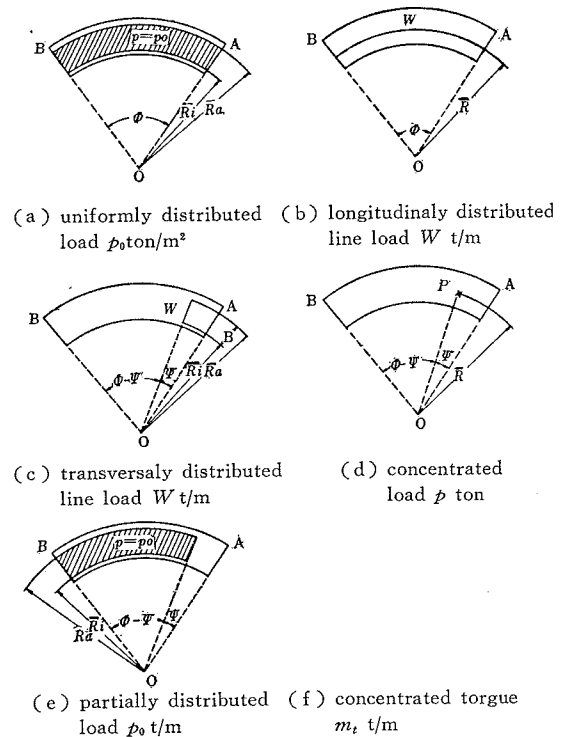


Fig. 1 Typical Loading Conditions.

this paper.

3. Numerical Example.

Applying the previously described theory, the

authors have performed numerical calculation with respect to box girder bridge, which has a span of 33.527 m and a radius of the curvature of 30 m, as shown in Fig A.

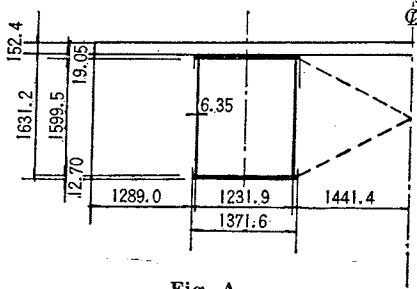


Fig. A

The results of the calculation was freely illustrated in this paper.

The contents are as follows :

(i) stress resultant

The distribution of the following seven kinds of stress resultant along the longitudinal girder axis under the typical loading conditions was clarified ;

- (1) bending moment M_y ,
- (2) warping moment M_w ,
- (3) shear due to bending \bar{Q} ,
- (4) St. Venant's torsional moment T_s ,
- (5) secondary torsional moment T_w ,
- (6) total shear Q ,
- (7) total torsional moment T .

(ii) deformations

The distribution of the following three kinds of deformation along the longitudinal girder axis under the typical loading conditions was clarified,

- (1) deflection δ
 - (2) absolute rotating angle β
 - (3) twist θ .
- (iii) influence surfaces

The influence surfaces of the following twelve

statical quantities ;

- (1) bending moment M_y at the mid span,
- (2) warping moment M_w at the mid span,
- (3) total shear Q at the end,
- (4) shear due to bending \bar{Q} at the end,
- (5) total torsional moment at the end,
- (6) St. Venant's torsional moment T_s at the end,
- (7) secondary torsional moment T_w ,
- (8) absolute rotating angle β at the mid span,
- (9) twist θ at the mid span,
- (10) deflection of the shear center δ at the mid span,
- (11) deflection of outside girder δ_a at the mid span, and
- (12) deflection of inside girder δ_i at the mid span.

(iv) Normal stress distributions for the four cases where the bridge is subjected to either the uniformly distributed load $p_0 = 350 \text{ kg/m}^2$ over the whole surface of the deck plate or the concentrated loads $P = 10 \text{ ton}$ acting upon the three different points at the mid span respectively.

The normal stress distributions were made clear,

- (1) normal stress due to bending σ_b ,
- (2) torsion bending stress σ_w ,
- (3) total normal stress $\sigma = \sigma_b + \sigma_w$,
- (v) shearing stress distributions

The shearing stress distributions at the end section, under the same loading conditions in the previous paragraph (iv), were found as follows,

- (1) shearing stress due to bending τ_b ,
- (2) St. Venant's shearing stress τ_s ,
- (3) secondary shearing stress τ_w , and
- (4) total shearing stress $\tau = \tau_b + \tau_s + \tau_w$.

(Received May 25, 1962)