

# 種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用

平井 一 男\*

**要 旨** 移動荷重をうける橋梁の振動解析は、従来多くの人によって研究されてきたが、一般にかなり困難な問題であった。この研究は、単純ばり・連続ばり・ゲルバーばり・格子桁などが種々の移動荷重をうける場合、その振動系の基礎微分方程式をたてるにあたって、便利な解析法を新たに提案し、この方法を利用して移動荷重が速度を変化しながら単純ばり上を移動する場合の動的たわみの解を求め、また、実在橋について数値計算を行ない、移動荷重の加速度の大きさが衝撃率にどのような影響を与えるかを合わせて調べてみたものである。

## 1. はしがき

移動荷重が橋梁上を走行するとき、橋梁に生じる動的影響を調べる問題は重要なことであるから、従来多くの人の研究対象となり、発表されている論文の数も非常に多い。これらの論文において取り扱っている解析法では、はりのたわみ振動の微分方程式

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = F(t, x)$$

を解いて求めるか、または、はりと移動荷重の運動エネルギーを求めて、これを Lagrange の運動方程式に代入して基礎方程式を直接求めるなどの方法がとられてきているようである。橋梁が単純ばりのような簡単な構造物で、かつ、移動荷重も一つの質量のみをもつと考えられるような簡単な場合には、上記の方法によって求めることも比較的簡単である。しかしながら、橋梁が連続ばり・ゲルバーばり・格子桁のようにいくつかのはりが組み合った複雑な構造で、かつ、移動荷重についても、自動車などのように前後車輪部のスプリングに生じる固定摩擦・タイヤなどの非線形の影響をも考慮せねばならないような複雑な振動系の場合となると、これらの方法によって基礎方程式を直接求めることも可能ではあるが、一般には非常に複雑な解析過程を必要とすることが予想される。

以上のようなわけで、筆者のこの研究では、基礎方程式をたてる際に、最初から荷重とはりとを同時に考慮した基礎方程式を直接求める方法をとらないで、まず第一段階としてはりの任意の固定点に  $P(t)$  なる外力が作用するときの運動方程式を求めたのち、これを移動荷重が作用する問題に適用することにした。この方法によれば、あらかじめはりの固有振動数、振動モードが求められる

かぎり、基礎方程式を比較的簡単に誘導することができるので非常に便利である。このことについてはあとに詳しく述べる。

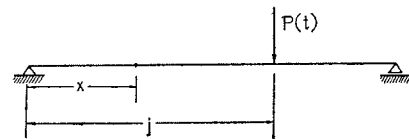
この研究では、まず提案の方法によって、移動荷重によりはりに生じる動的たわみを求める運動方程式を一般の場合について求め、つぎに特別な場合として荷重が単純ばり上を一定加速度で移動する問題を解析し、実在橋に対し数値計算を行ない、橋梁に生じる衝撃率が荷重の速度変化によってどのように変化するかを求めてみた。

## 2. 基礎方程式

### (1) 集中荷重が移動する場合

移動荷重の問題を取り扱う前に、まず図-1に示すような単純ばり上の任意の固定点  $x=j$  に外力  $P(t)$  が作用するとき、任意の点  $x=i$  におけるレスポンスを求めることについて考えてみる。

Fig. 1



はりの自由振動の基礎微分方程式はよく知られているように式(1)で与えられる。

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

ここに、

$EI$ : はりの曲げ剛性

$\rho$ : はりの単位長さあたりの質量

上式より、単純ばりの境界条件を満足する条件から、固有角速度  $\omega_m$ 、振動モード  $\varphi_m(x)$  を求めると式(2)、(3)にて与えられる。

$$\omega_m = \left( \frac{m\pi}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho}} \dots\dots\dots(2)$$

$$\varphi_m(x) = C \sin(m\pi x/l) \dots\dots\dots(3)$$

式(3)によって自由振動の振動モードは決定できるが、その振幅  $C$  の値は任意に選ぶことのできる常数であるから、あとの解析に便利になるように正規化(Normalize)の条件を満足するように以下の方法によって  $C$  を決定する<sup>1)</sup>。はりが角速度  $\omega_m$ 、振動モード  $\varphi_m(x)$  なる自由振動を行なっているときには、このはりに分布している慣性力は  $\rho \omega_m^2 \varphi_m(x)$  で表わされる。

いま、はりに上式で示される  $m$  次の振動モード  $\varphi_m(x)$

\* 正員 熊本大学助教授 工学部応用力学教室

に対応する慣性力を作用させ、これと  $n$  次の振動モード  $\varphi_n(x)$  に対応する変位とて仮想仕事をさせる。このときの仮想仕事  $W_1$  は次式で与えられる。

$$W_1 = \int_0^l [\rho \omega_m^2 \varphi_m(x)] \varphi_n(x) dx$$

同様に、 $n$  次の振動モード  $\varphi_n(x)$  に対応する慣性力  $\rho \omega_n^2 \varphi_n(x)$  と、 $m$  次の振動モードに対応する変位  $\varphi_m(x)$  とて仮想仕事をさせると、このときの仮想仕事  $W_2$  は次式にて与えられる。

$$W_2 = \int_0^l [\rho \omega_n^2 \varphi_n(x)] \varphi_m(x) dx$$

この  $W_1$  と  $W_2$  とは Betti's law によって等しいはずであるから

$$(\omega_m^2 - \omega_n^2) \int_0^l \varphi_m(x) \varphi_n(x) \rho dx = 0 \dots\dots\dots (4)$$

したがって、

$$m=n \text{ のとき} : \int_0^l \varphi_m^2(x) \rho dx = A = \text{常数}$$

$$m \neq n \text{ のとき} : \int_0^l \varphi_m(x) \varphi_n(x) \rho dx = 0$$

$A$  の値は、式 (3) における  $C$  の値によって任意に決められる常数であるから、あとの解析に便利になるよう正規化条件を満足するように定める。振動モード  $\varphi_m(x)$  がこのような正規化条件を満足した大きさを持つとき、これを  $\Phi_m(x)$  で表わすと上式は式 (5) となる。

$$\left. \begin{aligned} m=n \text{ のとき} & : \int_0^l \Phi_m^2(x) \rho dx = 1 \\ m \neq n \text{ のとき} & : \int_0^l \Phi_m(x) \Phi_n(x) \rho dx = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

はりがこのような正規化条件を満足した自由振動を行なうとき、このはりに作用している慣性力は式 (6) から求めることができる。

$$L_m(x) = \rho \omega_m^2 \Phi_m(x) \dots\dots\dots (6)$$

単純ばりの  $\Phi_m(x)$  を求めてみると式 (7) となる。

$$\Phi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{M}} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $M$ : はりの全質量

任意の構造物に外力が作用するとき、構造物に生じる振動はその境界条件を満足する関数である必要がある。自由振動の振動モード  $\Phi_m(x)$  は境界条件を満足するようにしてきめた関数であったから、外力が作用したとき構造物に生じる振動モードは、自由振動の振動モードと同じ形をとることが予想される。すなわち、外力が作用したとき構造物に生じる振動  $v(t, x)$  は式 (8) のように自由振動の振動モード  $\Phi_m(x)$  と時間の関数  $\mathcal{D}_m(t)$  との積の和として表わすことを考える。

$$v(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m = \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{D}_m(t) \psi_m \Phi_m(x) \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $\psi_m$  は式 (11) にて決定する常数である。

つぎに、作用する外力  $p(t, x)$  は、その分布の仕方は任

意であるが時間的変化の状態は同じであるとする。これを式で表わせば式 (9) となる。

$$p(t, x) = p(x) \cdot f(t) \dots\dots\dots (9)$$

この  $p(x)$  は  $x$  のみの関数であるから、式 (6) の  $L_m(x)$  を使用して次式のように展開すると、

$$p(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m L_m(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \omega_m^2 \rho \Phi_m(x) \dots\dots\dots (10)$$

ここに、式 (8)、(10) の  $\psi_m$  は以下の方法で決定される。すなわち、式 (10) の両辺に  $\Phi_n(x)$  をかけて積分すると、

$$\int_0^l p(x) \Phi_n(x) dx = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \omega_m^2 \int_0^l \Phi_m(x) \Phi_n(x) \rho dx$$

式 (5) の関係から、 $m=n$  の場合のみ  $\psi_m$  が決定できる。すなわち、

$$\psi_m = \int_0^l p(x) \Phi_m(x) dx / \omega_m^2 \dots\dots\dots (11)$$

さて、外力  $p(t, x)$  をうけるはりの基礎微分方程式は

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = p(t, x) \dots\dots\dots (12)$$

式 (12) に式 (8)、(9)、(10) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \sum_{m=1}^{\infty} \mathcal{D}_m(t) \psi_m \frac{d^2}{dx^2} \Phi_m(x) \right] \\ + \rho \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m \Phi_m(x) \frac{d^2}{dt^2} \mathcal{D}_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} f(t) \psi_m L_m(x) \end{aligned} \dots\dots\dots (13)$$

また、式 (12) の右辺を 0 とおいた自由振動の場合には

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EI \frac{d^2}{dx^2} \Phi_m(x) \right] = \rho \omega_m^2 \Phi_m(x)$$

なる関係があるので、これを式 (13) に代入すると次式が得られる。

$$\sum_{m=1}^{\infty} [ \{\ddot{\mathcal{D}}_m(t) + \omega_m^2 \mathcal{D}_m(t) - \omega_m^2 f(t)\} \rho \Phi_m(x) \psi_m ] = 0$$

両辺に  $\Phi_b(x)$  をかけて積分を行ない、式 (5) の関係を考慮すると次式となる。

$$\ddot{\mathcal{D}}_b(t) + \omega_b^2 \mathcal{D}_b(t) = \omega_b^2 f(t)$$

一般に、 $m$  次の場合には式 (14) となる。

$$\ddot{\mathcal{D}}_m(t) + \omega_m^2 \mathcal{D}_m(t) = \omega_m^2 f(t) \dots\dots\dots (14)$$

式 (8) を式 (14) に代入すると

$$\ddot{v}_m + \omega_m^2 v_m = \omega_m^2 \psi_m \Phi_m(x) f(t)$$

上式に式 (11) の関係を代入すると、式 (15) をうる。

$$\ddot{v}_m + \omega_m^2 v_m = \Phi_m(x) \left[ \int_0^l p(x) \Phi_m(x) dx \right] f(t) \dots\dots\dots (15)$$

いままで外力として分布荷重  $p(x)$  が作用するとして解析を行ってきたが、つぎに集中荷重  $p(t) = P_0 f(t)$  が  $x=j$  点に作用する場合について考えてみる。この集中荷重を式で示すと、

$$P(t, x) = P_0 \delta(x-j) f(t)$$

ここに  $\delta$  はディラックの衝撃関数と呼ばれるものである。このような集中荷重の場合には式 (15) の右辺の積

分は、

$$\int_0^l p(x)\phi_m(x)dx = P_0\phi_m(x=j)$$

となる。このとき式 (15) は式 (16) となる。

$$\ddot{v}_m + \omega_m^2 v_m = \phi_m(x)\phi_m(x=j)P(t) \dots\dots\dots(16)$$

ここに、 $x$  : 任意の測定点

$j$  : 荷重点

式 (16) は、 $x=j$  なる固定点に集中力  $P(t)$  が作用したとき、 $x$  の点における  $m$  次の振動モードに対応するたわみ  $v_m$  を求める運動方程式である。したがって移動荷重が作用する場合には、単に  $j$  を時間の関数として  $x=j(t)$  とおけばよい。このとき式 (16) は式 (17) となる。

$$\ddot{v}_m + \omega_m^2 v_m = \phi_m(x)\phi_m\{x=j(t)\}P(t) \dots\dots\dots(17)$$

単純ばりの場合には、上式に式 (7) を代入して次式をうる。

$$\ddot{v}_m + \omega_m^2 v_m = \frac{2}{M}P(t)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi j(t)}{l}\right) \dots\dots\dots(18)$$

上式は、 $m$  次の振動モードに対するレスポンスであるから、 $x$  なる点におけるたわみは式 (8) により求められる。また、式 (18) は常数を係数とする 2 階の微分方程式であるから、一般に比較的簡単に解くことができるわけで、式 (18) の解を求めると速度が変化する荷重に対して Lowan が解析した結果と一致する<sup>2)</sup>。なお、式 (18) において一定力  $P_0$  が移動する場合の解を求めると Timoshenko が Lagrange の運動方程式を使用して得た解<sup>3)</sup> と一致する。

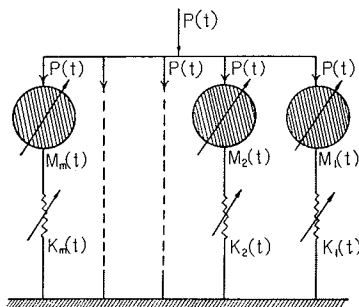
さらに式 (17) における固有角速度  $\omega_m$ 、振動モード  $\phi_m(x)$  は、式 (1) にて与えられるはりの基礎式をもととして境界条件を満足するようにして決定したものであるから、これらの値が得られることができたならば式 (17) は、単純ばりにかぎらず連続ばり・ゲルバーばり・格子桁など、すべてのはり構造物に対しても適用できるわけである。これらの構造物に対して現在解析を行なっているので、つぎの機会に発表したい。

(2) 移動荷重をうける構造物の等価モデルについて

一般に、2 階の微分方程式は、バネと質量からなる簡単な自由度 1 の振動系に外力  $P(t)$  が作用したときの運動方程式である。しかるに、はり上の点  $x=j(t)$  に  $P(t)$  なる外力が作用する場合でも、任意の点  $x$  における  $m$  次の振動モードに対するたわみ  $v_m$  を求める式は、やはり式 (17) にて与えられる 2 階の微分方程式となるから、図-1 で示すはりの振動系は図-2 のようなバネと質量からなる簡単な力学モデルにおきかえることができる。

このときの等価質量  $M_m$ 、等価バネ常数  $K_m$  は時間の関数として式 (19) によって求めることができる。

Fig. 2 Equivalent system of bridge under moving force  $P(t)$ .



$$\left. \begin{aligned} M_m(t) &= \frac{1}{\phi_m(t)\phi_m\{x=j(t)\}} \\ K_m(t) &= \frac{\omega_m^2}{\phi_m(x)\phi_m\{x=j(t)\}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

なお、図-2 における外力  $P(t)$  は各モデル全部に作用していることを表わしている。

(3) 複雑な振動系が移動する場合

はり上を移動する荷重の問題が図-2 のような簡単な力学モデルで表わすことができるならば、自動車のように複雑な振動系をもつ荷重が移動する場合も簡単なモデルで表わすことができ、基礎方程式も単に連成振動の問題として容易に誘導することができる。

いま、一例として、自動車がバネ下質量  $m_1$ 、バネ上質量  $m_2$ 、バネ常数  $k$  なる振動系からできている場合について考えてみる。この場合の等価モデルは図-3 で表わされる。このとき運動方程式は式 (20) で与えることができる。

$$\left. \begin{aligned} m_2\ddot{V}_2 &= -k(V_2 - V_1) + m_2g \\ m_1\ddot{V}_1 &= k(V_2 - V_1) + m_1g - X \\ V_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} [v_i\phi_i\{x=j(t)\}/\phi_i(x)] \\ M_1(t)\ddot{v}_1 &= -K_1(t)v_1 + X \\ M_2(t)\ddot{v}_2 &= -K_2(t)v_2 + X \\ \dots\dots\dots \\ M_m(t)\ddot{v}_m &= -K_m(t)v_m + X \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

ここに  $X$  は一種の不静定力である。

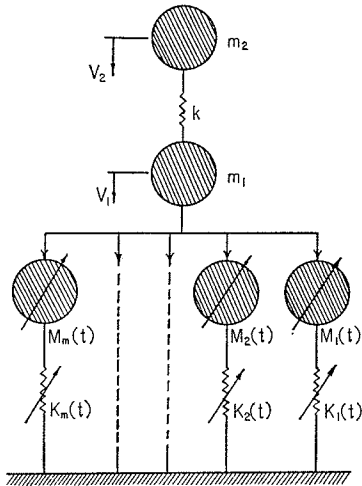
式 (20) は多元連立微分方程式であるから、通常の方法によっては簡単に解くことができないが、特別な場合として、機関車(質量  $m_1$ )が単純ばり上を一定速度( $V$ )で移動する場合について考えてみる。この場合には式 (20) において

$$m_2 = k = V_2 = 0$$

$$M_m(t) = \frac{M}{2\sin\left(\frac{m\pi Vt}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)}$$

$$K_m(t) = \frac{M\omega_m^2}{2\sin\left(\frac{m\pi Vt}{l}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)}$$

Fig. 3 Equivalent system of bridge under moving vehicle.

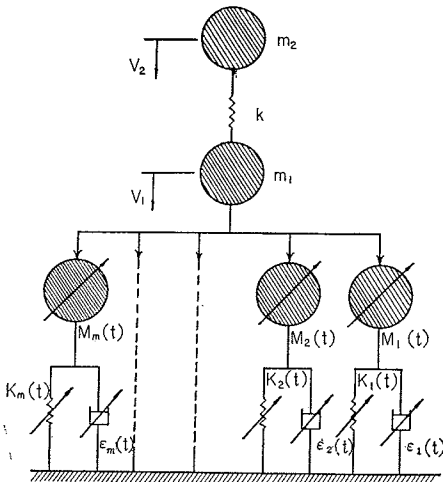


とおけばよい。この式は国井博士が Lagrange の運動方程式を用いて誘導した基礎式<sup>4)</sup>において、機関車のハンマー力を無視した場合と一致する。

また、式 (20) は、自動車を図-3のごとき簡単なモデルで示される場合について立てた基礎式であるが、自動車がクーロン摩擦などの非線形要素をもつ場合についても、同様な方法によって運動方程式を簡単に立てることができる。

いままでは、橋梁の減衰の影響を無視して考察してきたけれども、図-2のモデルをもととして減衰の影響をも考慮することができる。橋梁の減衰は、鋼・コンクリート構造内部のエネルギーの損失・桁支点部の固体摩擦などいろいろ複雑な要素に起因するものと考えられているが、橋梁の自由振動の実測の結果では、その減衰の状態はほぼ対数減衰する。このような事実から、減衰はたわみの速度に比例するという簡便化した方法をとれば、

Fig. 4 Equivalent system of damped bridge under moving vehicle.



この減衰の影響は図-4に示す位置にダッシュポットとして等価的に入れることができる。この場合、減衰係数  $\epsilon_m$  は対数減衰率より定められる。

(4) 荷重の速度が変化する場合の解

荷重が単純ばり上を移動するとき、任意の点  $x$  のたわみは式 (18) の解の和として求めることができる。

特別な場合として、一定力  $P_0$  が任意の速度で移動する場合について考えてみる。このとき、式 (18) の右辺によって解が変化するので、いま、簡単のために

$$2 P_0 \left\{ \sin \left( \frac{m \pi x}{l} \right) \right\} / M = 1$$

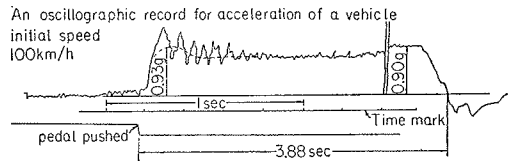
$$A_{jmx} = \sin \left( \frac{m \pi j(t)}{l} \right)$$

とおくことにする。このとき式 (18) は (21) となる。

$$\ddot{v}_m + \omega_m^2 v_m = A_{jmx} \dots \dots \dots (21)$$

自動車の速度変化については種々の場合が考えられるが、ここでは特別な場合として、自動車の加速度が一定の場合について考えてみる。名神高速道路山科地区において高速度で乗用車を走行させ、その急停車時におけるタイヤのスリップ破損の試験を行なっているが、その際、自動車の加速度の変化をも記録している (図-5)。この測定記録によると、自動車の加速度はほとんど一定と考えられるから、自動車がこのような急停車、または増速を橋梁上で行なうことを想定してみた。

Fig. 5



荷重が  $a$  の地点より、初速度  $v_0$ 、加速度  $\pm u$  で移動を開始したとすると、 $A_{jmx}$  は次式となる。

$$A_{jmx} = \sin(\alpha a + \alpha v_0 t + 0.5 \alpha u t^2)$$

ここに、 $\alpha = m \pi / l$

$A_{jmx}$  が上式のような関数で表わされる場合には、式 (21) は簡単に解くことができないので、 $A_{jmx}$  をつぎに示すようにフーリエ級数に展開する。

$$t^2 \approx \frac{\pi^2}{4} - \frac{8}{\pi} \left( \cos t - \frac{\cos 3t}{3^3} \right)$$

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(x) \cos 2k \theta$$

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k+1}(x) \sin(2k+1)\theta$$

$$\cos(x \cos \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k J_{2k}(x) \cos 2k \theta$$

$$\sin(x \cos \theta) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(x) \cos(2k+1)\theta$$

ここに、 $J_n(x)$  は Bessel 関数である。

ゆえに、 $A_{jmx}$  は次式となる。

$$A_{jmx} = a_0 \sin(\alpha' + N_0 t) + \sum_{n=1}^6 a_{2n} \{ \sin(\alpha' + N_{2n} t) + \sin(\alpha' + N_{2n}' t) \} + \sum_{n=1}^6 a_{2n-1} \{ \cos(\alpha' + N_{2n-1} t) + \cos(\alpha' + N_{2n-1}' t) \} \dots (22)$$

ここに,

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + \alpha u t_0^2 / 8, & N_n &= \alpha v_0 + n \pi / t_0 \\ b_1 &= 4 \alpha u t_0^2 / \pi^3, & N_n' &= \alpha v_0 - n \pi / t_0 \\ c_1 &= b_1 / 27, & t/t_0 &\leq 1/2 \end{aligned}$$

$t_0$  は  $t$  が  $t/t_0 \leq 1/2$  を満足するようにきめる規準時間であり, ここでは停車までの時間の2倍をとっている。

$$\begin{aligned} a_0 &= J_0(c_1)J_0(b_1) - 2J_1(c_1)J_0(b_1) \\ a_2 &= -J_0(c_1)J_2(b_1) + J_1(c_1)J_1(b_1) + J_1(c_1)J_5(b_1) \\ a_4 &= J_0(c_1)J_4(b_1) + J_1(c_1)J_1(b_1) - J_1(c_1)J_7(b_1) \\ a_6 &= -J_0(c_1)J_6(b_1) - J_1(c_1)J_3(b_1) + J_1(c_1)J_9(b_1) \\ a_8 &= J_0(c_1)J_8(b_1) + J_1(c_1)J_5(b_1) \\ a_{10} &= -J_1(c_1)J_7(b_1) \\ a_{12} &= J_1(c_1)J_9(b_1) \\ a_{14} &= -J_0(c_1)J_4(b_1) - J_1(c_1)J_2(b_1) + J_1(c_1)J_4(b_1) \\ a_{16} &= J_0(b_1)J_1(c_1) + J_0(c_1)J_3(b_1) - J_1(c_1)J_6(b_1) \\ a_{18} &= -J_0(c_1)J_5(b_1) - J_1(c_1)J_2(b_1) + J_1(c_1)J_8(b_1) \\ a_{20} &= J_0(c_1)J_7(b_1) + J_1(c_1)J_4(b_1) \\ a_{22} &= -J_0(c_1)J_9(b_1) - J_1(c_1)J_6(b_1) \\ a_{24} &= J_1(c_1)J_8(b_1) \end{aligned}$$

式(21)の右辺が式(22)にて与えられ, 初期条件が  $t=0$  において,  $v_m=0, \dot{v}_m=0$  である場合には, 式(21)の解  $v_m$  は式(23)にて与えられる。

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{a_0 \sin(\alpha' + N_0 t)}{\omega_m^2 - N_0^2} + \sum_{n=1}^6 a_{2n} \left[ \frac{\sin(\alpha' + N_{2n} t)}{\omega_m^2 - N_{2n}^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\sin(\alpha' + N_{2n}' t)}{\omega_m^2 - N_{2n}'^2} \right] + \sum_{n=1}^6 a_{2n-1} \left[ \frac{\cos(\alpha' + N_{2n-1} t)}{\omega_m^2 - N_{2n-1}^2} \right. \\ &+ \left. \frac{\cos(\alpha' + N_{2n-1}' t)}{\omega_m^2 - N_{2n-1}'^2} \right] - \cos \omega_m t \left\{ \frac{a_0}{\omega_m^2 - N_0^2} \right. \\ &+ \left. \sum_{n=1}^6 a_{2n} \left( \frac{1}{\omega_m^2 - N_{2n}^2} + \frac{1}{\omega_m^2 - N_{2n}'^2} \right) \right\} \\ &+ \cos \alpha' \sum_{n=1}^6 a_{2n-1} \left( \frac{1}{\omega_m^2 - N_{2n-1}^2} + \frac{1}{\omega_m^2 - N_{2n-1}'^2} \right) \\ &- \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m} \left[ \cos \alpha' \left\{ \frac{a_0 N_0}{\omega_m^2 - N_0^2} + \sum_{n=1}^6 a_{2n} \left( \frac{N_{2n}'}{\omega_m^2 - N_{2n}^2} \right. \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{N_{2n}'}{\omega_m^2 - N_{2n}'^2} \right) \right\} - \sin \alpha' \sum_{n=1}^6 a_{2n-1} \left( \frac{N_{2n-1}'}{\omega_m^2 - N_{2n-1}^2} \right. \\ &+ \left. \left. \frac{N_{2n-1}'}{\omega_m^2 - N_{2n-1}'^2} \right) \right] \dots (23) \end{aligned}$$

### 3. 数値計算

2.に述べたように, 荷重が速度を変化させながら橋梁上を移動するとき, 任意の点に生じるたわみ  $v_m$  は式(23)にて求めることができるわけであるが, 実在橋に対して荷重の加速度の大きさがどの程度衝撃率に影響を与えるかを調べるために, 数値計算を行なってみた。計算例として取り扱った橋梁は, 昭和32年に大阪市に架

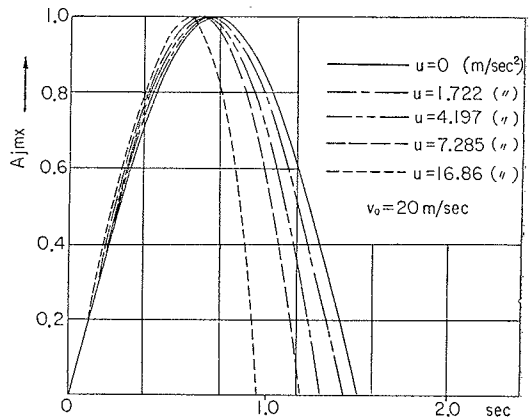
設された長堀川新橋である。この橋は, 桁高を極端に小さくすることを要求されているために, 中空板構造の方式をとっている。この橋の諸定数は下記に示すとおり。

スパン  $l=30.6$ (m), 固有角速度  $\omega_m=17.93$  m<sup>2</sup>(rad/sec), 全重量  $W=321.9$ (t), 曲げ剛性  $EI=3.107 \times 10^{13}$  (kg-cm<sup>2</sup>)

荷重の速度変化としては, 増速, 減速の2つの場合が考えられるが, 実際の問題として自動車が増速する場合の加速度の値は比較的小さい。これに反して減速の場合には, 急停止・衝突の場合などが考えられるから, 加速度がかなり大きい値をとることが予想されるので数値計算は主として後者について行なった。また, 自動車の減速は任意の点から開始してよいのであるが, ここでは荷重が橋梁に入った瞬間から減速をはじめると仮定して計算を行なった。

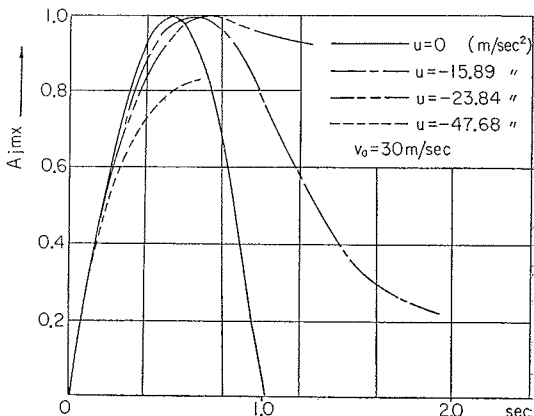
たわみの測定点は  $l/2$  点とし,  $P_0=164.2$  kg の一定荷重が移動する場合について計算を行なった。式(23)の計算を行なうにはかなりの労力を要するので, 計算はすべて Digital Computer の力を借りた。また, 式(22)による  $A_{jmx}$  の展開の際には, 誤差が2%以内となる項数までとった。

Fig. 6



Variation of Ajmx

Fig. 7



Variation of Ajmx

式(21)の右辺  $A_{jmx}$  の関数によつてたわみの振動状態が決定するので、自動車が減速、増速する場合、加速度の大きさに対して、この  $A_{jmx}$  がどのように変化するかの一例を図-6, 7 に示す。荷重が、初速度 20 m/sec, 30 m/sec で橋梁内に入ってきて一様加速度で減速するとき、 $l/2$  点に生じるたわみの状態を図-8, 9 に示した。

4. 結 論

以上、移動荷重がはりを上を走行するとき、はりに生じる動的たわみを理論的に求める新しい解析方法と、これを単純ばり上に一定加速度で荷重が移動する問題に適用した場合について述べたが、つぎのことが結論づけられると思う。

(1) 理論式について

すでに述べたように、移動荷重の問題を解析する基礎方程式は、図-3 の等価モデルをもととして、単に連成振動の問題として式(20)を誘導することができた。式(20)は、構造物の固有角速度、振動モード、荷重の振動モデルさえ与えられるならば容易に立てることができる式である。この固有角速度、振動モードは、構造物が非線形要素をふくまないかぎり比較的簡単に求めることができる場合が多いので、このような解析法は便利と考えられる。

なお、式(20)は多元連立微分方程式であるから、通常の方法によっては簡単に求めることができないわけであるが、この種の問題はアナログ計算機を使用すれば非常に簡単に解けるので、現在、これら複雑な荷重が移動する問題について解析することを計画している次第である。また、この解析法は式(12)で与えられるはりの基礎式をもととして出発しているが、さらに同様な解析は直交異方性板の場合にも拡張できる。このとき式(12)のかわりに、直交異方性板の微分方程式を使用して同様な過程により解析できる。このことについては、つぎの機会にくわしく述べる。

(2) 一定力  $P_0$  が一様加速度で移動する場合

荷重が一定加速度で移動する場合、式(21)は簡単に解くことができないので、 $A_{jmx}$  を Fourier 級数に展開して式(23)によつてたわみを求めた。しかし、数値計算の結果を等速度で荷重が移動する場合と比較するとき、図-8, 9 からわかるように最大たわみは荷重が初速度 20 m/sec (72 km/h) にて橋梁に入る場合 10~12% 程度増加し、初速度 30 m/sec (108 km/h) の場合には10~15

Fig. 8

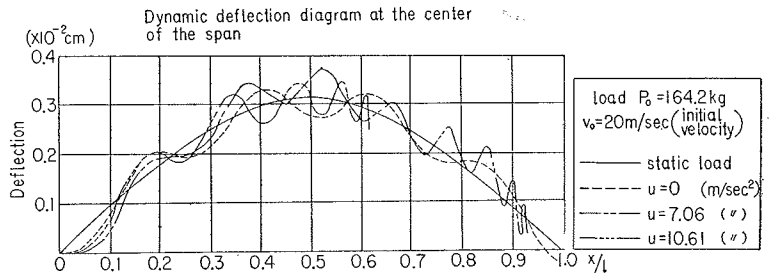
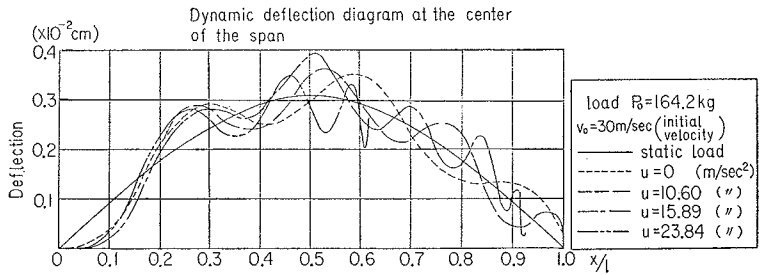


Fig. 9



％程度増加している。しかし、加速度の大きさが大きいときに最大たわみが生じるわけではなく、20 m/sec の初速度をもつ場合には  $u=7.064 \text{ m/sec}^2$ 、初速度 30 m/sec の場合には  $u=15.89 \text{ m/sec}^2$  のときに生じており、これより加速度が大きくなるとたわみはむしろ減少する傾向にある。図-5 に示す乗用車の加速度の測定記録は急停止する場合のものであるが、この測定記録では、加速度はほぼ 1~0.9 g の範囲にあると考えられるから、このような急停止を橋梁上で行なった場合にはほぼ最大のたわみが生じると考えてよい。この計算では、すべて荷重がスパンに入った瞬間から減速すると仮定して計算を行っているから、荷重がスパン内の任意の点で減速を開始した場合には、さらに大きい衝撃率が得られるかもしれないが、あまり大きい値になることは期待できないと思う。この研究を行なうにあたり、ご支援いただいた名古屋大学 成岡教授、熊本大学 吉村教授に深く感謝するとともに、電子計算機の計算にご協力いただいた、三菱重工神戸造船所 山口富夫氏、および多数の学生諸氏に謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) Norris, Hansen: Structural design for dynamic loads, Mc. Graw, 1959.
- 2) Lowan: On transverse oscillations of beams under the action of moving variable loads, Phil. Mag., 19 (1935), p. 708.
- 3) Timoshenko: Vibration problems in engineering, Mc. Graw, 1951, p. 353.
- 4) Mise, Kunii: A theory for the forced vibrations of a railway bridge under the action of moving loads, Quar. J. Mech. and Appl. Math., Vol. 9, 1956, p. 195.
- 5) Hillerborg: Dynamic influences of smoothly running loads on simply supported girders, Institution of Structural Engineering and Bridge Building of the Royal Institute of Technology, Stockholm, 1951.
- 6) Tung, Goodman, Newmark: Highway bridge impact problems, Highway Research Board Bulletin, No. 124, 1955. Washington D.C., p. 111~133.

(原稿受付: 1962.6.26)

# FUNDAMENTAL EQUATIONS OF BEAM STRUCTURES UNDER THE MOVING LOADS AND ITS APPLICATION

By Itio Hirai, C.E. Member

## 1. Introduction

The immediate purposes of the present study are to describe the method to derive the fundamental equations of motion of beam structures loaded with a moving load and to apply this method to a certain the specific problem.

Since the dynamic responses of bridge loaded with a moving vehicle is of great importance to the bridge design, the studies to evaluate the magnitude of the dynamic amplification factors have been carried out by many people during the past ten decades. The analytical methods treated in their papers seem to be based on either the direct solution of the fundamental differential equation of transverse vibration of beam or energy procedure by means of Lagrangian equation. Though these analytical methods are available for the case where the moving load is idealized as a constant force or as a single mass upon an idealized simple beam, it seems almost impossible to derive the equations of motion for the case where the structures of bridge are a continuous beam, a cantilever bridge or a grillage girder bridge and a moving load is composed of several masses connected by a spring with non-linear elements.

## 2. The derivation of the fundamental equations

The analytical procedure proposed in this paper is divided into two stages, instead of taking into account all of the factors of bridge and vehicle at a time. At the first stage, the equation of motion at an arbitrary point  $x$  of the beam structure subjected to a concentrated force  $P(t)$  applied to the structure at a point defined by the coordinate  $x=j$  was obtained. This equation is given by the differential equation of second order as follows :

$$\ddot{v}_m + \omega_m^2 v_m = \Phi_m(x) \Phi_m\{x=j\} P(t) \dots\dots (1)$$

where  $v_m$  : the deflection of the structure for the  $m$ -th mode of vibration

$\Phi_m(x)$  : the  $m$ -th normalized natural mode

of vibration

When the load is a moving load, the applied point  $j$  may be treated as a function of time  $j(t)$ .

## 3. The equivalent system of the vibrating structure

In general, the equation of motion of a vibrating system composed of a mass and a spring is given by the differential equation of the second order. Thus, the transverse vibration system of beam structures, referring to eq. (1), can be represented by an equivalent system as given by Fig. 1. The equivalent mass  $M_m(t)$  and the equivalent spring constant  $K_m(t)$  in Fig. 1 are expressed as follows :

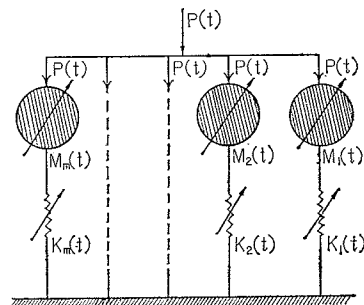


Fig. 1 Equivalent system of bridge under moving force  $P(t)$

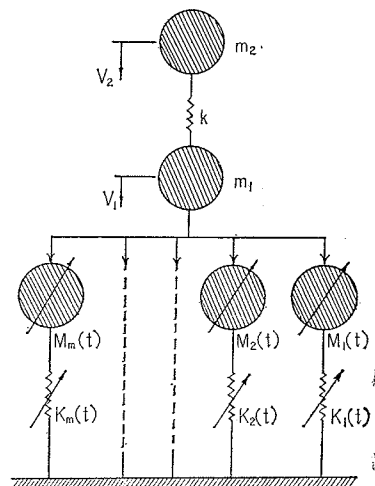


Fig. 2 Equivalent system of bridge under moving Vehicle.

$$M_m(t) = 1/\phi_m(x)\phi_m\{x=j(t)\}$$

$$K_m(t) = \omega_m^2/\phi_m(x)\phi_m\{x=j(t)\}$$

At the second stage, the vibrating system composed of bridge and vehicle was replaced by an equivalent system. As an illustration, consider the case where the load has a sprung mass  $m_2$  and an unsprung mass  $m_1$  connected by a linear spring.

The equivalent system of this system is represented by Fig. 2 and the equations of motion, as a multi-degree-of-freedom system, are easily derived as follows :

$$\left. \begin{aligned} M_1(t)\ddot{v}_1 &= -K_1(t)v_1 + X \\ M_2(t)\ddot{v}_2 &= -K_2(t)v_2 + X \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ M_m(t)\ddot{v}_m &= -K_m(t)v_m + X \\ V_1 &= \sum_{i=1}^{\infty} [v_i\phi_i\{x=j(t)\}/\phi_i(x)] \\ m_2\ddot{V}_2 &= -k(V_2 - V_1) + m_2g \\ m_1\ddot{V}_1 &= k(V_2 - V_1) + m_1g - X \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

**4. Response of a bridge to a load with constant acceleration**

When a constant force  $P_0$  traverses a bridge with a constant acceleration, the equation of motion is expressed as follows :

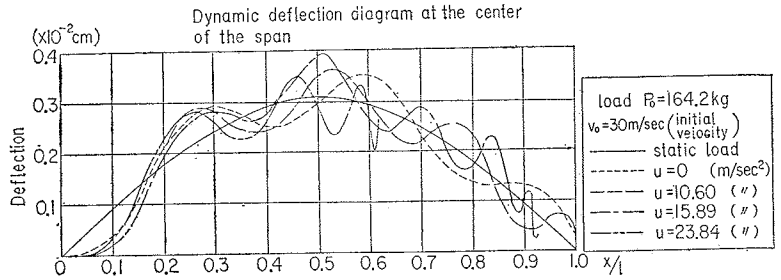


Fig. 3

$$\ddot{v}_m + \omega_m^2 v_m = \frac{2P_0}{M} \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \sin\left\{\frac{m\pi}{l}\left(a + v_0 t + \frac{1}{2}ut^2\right)\right\}$$

where  $a$  : distance from one end of the beam to a starting point of load  
 $v_0$  : initial velocity of load  
 $u$  : acceleration of load

The solution of the above equation may be obtained by expanding its right hand side in the Fourier's series.

Numerical computations were carried out for the Nagahori bridge, a simple span highway bridge (span :  $l=30.6$  m, total weight :  $W=321.9$  ton, stiffness :  $EI=3.107 \times 10^{13}$  kg-cm<sup>2</sup>). Typical results for dynamic deflection at a center of span are shown in Fig. 3.

(Received June 26, 1962)