

一辺が拘束された三角形ならびに四角形板の熱応力と拘束度について

森 忠 次*

1. 緒 言

コンクリート構造物においては、温度変動、湿度変動あるいは硬化にともなう収縮などの各種の体積変化に起因する応力は等閑視することができず、ときには重大なひびわれを発生することがある。このような体積変化によって生ずる応力は体積変化の大きささえ明らかになれば、その原因のいかんを問わずに同様な方式によって解析することができる。そこで、本論文では熱応力の場合に限定する。

ダムや壁体などのコンクリートブロックに現われる熱応力は千差万別である。その中でも最も基本的な問題として、基礎の上に造られた壁体のみが一般的な温度変化をうけ、その下面が基礎によって拘束されている場合に生ずる熱応力を取り扱うことにした。被拘束体である壁体の形は三角形あるいは四角形とし、被拘束物と拘束物との形状・寸法、弾性係数などが異なった場合の応力状態の特徴を論じ、いわゆる拘束度も求めた。

このような問題はすでに理論的にも実験的にもある程度明らかにされているが、そのいずれもがかなり限られた条件のもとにおける例である。一辺が拘束された矩形板については、種々の条件における応力状態を明らかにするために、著者はすでに、近似的な応力解析を行なった^{1),2),3)}。このときに取り扱った問題は、被拘束物と拘束物との形状・寸法、弾性係数の差などによる影響のみならず、非直線的な温度変動をうける場合や Poisson 比の大きさが異なった場合にもおよんでいる。しかしながら、被拘束物がダムの横断面にみられるような三角形をなす場合については解析していなかったため、光弾性実験によってこのような形の物体に生ずる応力状態を求めるとともに、すでに実施した計算値と比較検照を行なった。本論文では、主として光弾性実験の結果を用い、不足する部分は計算値を示すことによって、各種の条件に対する熱応力状態と拘束度を明らかにした。

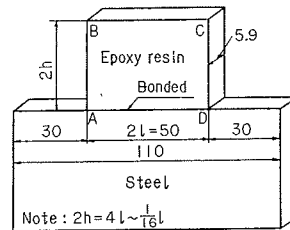
2. 光弾性実験による応力解析

実験すべき課題は、一様な温度変化をうける弾性体がほかの弾性体によって拘束されているために発生する応力を求めることである。まず、拘束物が剛体であるときを考えてみると、このときの応力状態は実験的に研究されていないようである。このときの応力を求めるには、

先に発表した光弾性実験法⁴⁾を適用するのが非常に有効である。

剛体に拘束された物体の熱応力解析にこの方法を採用した。図-1 には一辺固定矩形板の実験模型を示した。鋼と Epoxy 樹脂との接界面 AD を約 60°C において接着し、接着完了後室温 (15~20°C) まで温度を下げ、

図-1 剛体に接続した模型



等色線および等傾線を観測する。この場合に、図-1 に示した h/l (矩形の高さと幅の比) の異なった系統的な多数の模型に対する実験を便宜よく一連の実験ですませるためには、つぎのようにすればよい。まず、最も h/l の大きいものについて、接着後室温まで冷却して観測する。その後は、順次この模型を削って h を小さくし、そのまま室温において観測すればよい。あとに示す三角形板についても、同様な方法によって多数の実験を完了することができるので非常に便利である。

Epoxy 樹脂と鋼材の性質は表-1 に示す。両者の熱膨張係数 α の間には $50 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ 以上の差があるので、温度変動をうけると両者の間にかかなり大きいひずみの差を生ずる。鋼材の弾性係数は Epoxy 樹脂の 70 倍を越えるから、Epoxy 樹脂に比較して、鋼材が剛体であると仮定することができる。なお光弾性縞から応力を求め、得られた応力を材料の性質と関連させるのに必要な Fringe value および弾性係数はともに室温における値を用いればよいことは、すでに前の論文⁴⁾で示したとおりである。

表-1 材料の性質

Materials	Coeff. of thermal expansion, $^\circ\text{C}^{-1}$	Young's Modulus, kg/cm^2	Fringe value, kg/cm
Epoxy resin	62.3×10^{-6}	28.4×10^3 *	10.7*
Steel	10.7×10^{-6}	2100×10^3	—

* Measured at 17°C

弾性体同志の拘束を考えるとときには、コンクリートの材令が若くて軟い場合、拘束物である基礎が軟弱な場合などを考えると、被拘束物と拘束物との弾性係数 E の

* 正員 工博 京都大学助教授 工学部土木工学教室

比率が異なったものを広範囲にわたって実験しなければならない。弾性係数が望ましい値(Epoxy 樹脂の 1/20 ~20 倍, すなわち $1.5 \times 10^3 \sim 600 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ 程度)であり, 熱膨張係数が Epoxy 樹脂と大きく異なっているような適当な材料を数多く見出しにくかったので, ここでは, 被拘束物と拘束物が同一の弾性係数である場合に限定し, つぎのようにして実験を行なった。

図-2 同一弾性体に接続した模型

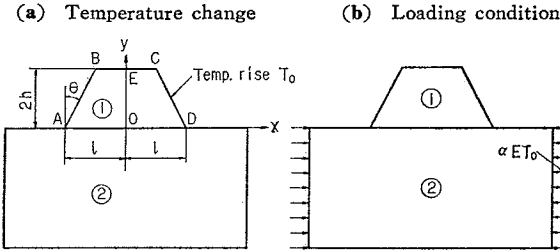


図-2 (a) に示すように, 同一性質の弾性体①と②が線 AD において接続しており, 弾性体①のみが一樣な温度上昇 T_0 をうけたときの熱応力を求めるためには, 図-2 (b) に示すように, 弾性体②に x 方向の一樣な圧縮荷重 αET_0 を加えた実験を行なう。そうすると, 弾性体①については, このときの応力が求める答であり, 弾性体②については, この状態における応力に一樣な引張応力 αET_0 を加えたものが 真の応力を示す。このようことから, 供試体全部を Epoxy 樹脂で作し, 図-2 (b) に示すような圧縮荷重によって通常の 2 次元光弾性実験を行なった。

このような実験法は古くに Smith⁵⁾ および Lévy⁶⁾ が採用し, 応力分布の一例を示している。近年では色部氏そのほか⁷⁾ が同種の実験を行ない, 川本氏⁸⁾ は Epoxy 樹脂の凍結-焼鈍しの過程における体積変化を利用して実験を行なっている。Oberti を Bonfioli⁹⁾ が用いたように, 基礎にすきまを設け, ピンをそろ入してひずみを生ぜしめるような方法は, この場合には採用困難である。

以下に示す各種の実験に用いた模型の寸法を示すと, 接続辺の長さ $2l$ は 40~60 mm の範囲であり(図-1 参照), 模型の厚さは一辺完全固定の実験に際しては 5.9 mm, 一辺弾性固定の実験に際しては 10.2 mm である。得られた応力値は平面応力状態におけるものであり, Epoxy 樹脂の Poisson 比 ν は 0.37 である。温度ならびに応力の表示は, ことわりのないかぎり, つぎの規約にしたがうものとする。一樣な温度上昇を T_0 で表わし, 引張応力を正とする。座標軸は図-2 に示すように接続辺を x 軸とし, これに直角な対称軸を y 軸に選ぶ。寸法の基準としては, 固定辺の長さを $2l$ と定める。そして固定辺からこれに対する辺(四角形するとき)または頂点(三角形するとき)までの距離(高さ)を $2h$ で表わす。

3. ポテンシャル エネルギー最小の原理による解析法の概要

本論文に示した計算値はポテンシャル エネルギー最小の原理にもとづいて解析した近似値であり, その詳細な根拠は別の論文^{10)~12)}を参照していただくことにし, ここでは, 解析方針の概要のみを説明する。

図-3 において, 矩形 ABCD は辺 AD においてほかの物体に接続し, その厚さ d はほかの寸法にくらべて小さく, 平面応力状態にあるものとする。矩形板のみが温度 $T(x,y)$ だけ上昇したとする。このときの矩形板の応力を求めるには, 辺 AD において切り離された矩形板をもとの形にもどすために必要な応力

$${}^* \sigma_x = {}^* \sigma_y = -\alpha ET / (1-\nu) \dots\dots\dots(1)$$

と, 辺 AD において接続された矩形板に, 表面引張荷重:

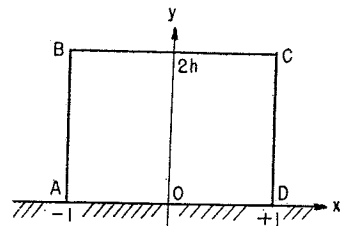
$$\begin{aligned} {}^* p_x &= \alpha ET / (1-\nu) \quad (x = \pm 1 \text{ にて}) \\ {}^* p_y &= \alpha ET / (1-\nu) \quad (y = 0 \text{ および } 2h \text{ にて}) \end{aligned}$$

物体力:

$$\begin{aligned} {}^* X &= -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha ET}{1-\nu} \right), \quad {}^* Y = -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\alpha ET}{1-\nu} \right) \\ &\dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

が作用したときの応力を加え合わせればよい。

図-3 矩形の寸法と座標



式(2)の荷重による矩形板の応力状態を表わすのに, 応力関数 $\phi(x,y)$ は,

$$\phi(x,y) = \phi(x,y) + \sum_n f_n(x) g_n(y) \dots\dots\dots(3)$$

なる形によって書き表わされるものとする。応力成分は次式によって求められる。

$${}^* \sigma_x = \phi_{yy} + \Omega, \quad {}^* \sigma_y = \phi_{xx} + \Omega, \quad {}^* \tau_{xy} = -\phi_{xy} \dots\dots(4)$$

ここに, 応力関数に付した下添字は偏微分を表わし, かつ, $\Omega(x,y) = \alpha ET / (1-\nu)$ である。

さて, ϕ は辺 AD 以外における境界条件を満足するように選ぶと, 式(3)右辺の最後の項は

$$f_n(\pm 1) = f_n'(\pm 1) = 0, \dots\dots\dots(5a)$$

$$g_n(2h) = g_n'(2h) = 0 \dots\dots\dots(5b)$$

を満足しなければならない。式(5a)を満足させるために f_n には Horvay^{10), 11)} の導いた ortho-normal self-equilibrating polynomial を用い, g_n はポテンシャル エネルギー最小の原理より決定する。

式(2)の荷重が加えられたとき、矩形板に貯えられるポテンシャルエネルギー Π は、

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{d}{2E} \int_0^{2h} \int_{-1}^1 \{ * \sigma_x + * \sigma_y - 2\nu * \sigma_x * \sigma_y \\ & + 2(1+\nu) * \tau_{xy} \} dx dy \\ & - d \int_{-1}^1 [* \sigma_y * v + * \tau_{xy} * u]_{y=0} dx \\ & - d \int_0^{2h} \int_{-1}^1 (* X * u + * Y * v) dx dy \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

ここに、 u, v はそれぞれ x, y 方向の変位成分である。

ポテンシャルエネルギー最小の原理によると、 Π の応力による第1変分は0にならなければならない。そこで式(6)の右辺を応力関数によって表わし、変分法を適用すると、つぎの結果が得られる。

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{ 4d\phi(x, y) + (1-\nu)4\varrho(x, y) \\ + \sum_n f_n^{(IV)}(x)g_n(y) + 2\sum_n f_n''(x)g_n''(y) \\ + \sum_n f_n(x)g_n^{(IV)}(y) \} \sum_i f_i(x) dx = 0 \dots\dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{ \phi_{yyy}(x, 0) + (2+\nu)\phi_{xxy}(x, 0) + (1-\nu)\varrho_y(x, 0) \\ + \sum_n f_n(x)g_n''(0) + (2+\nu)\sum_n f_n''(x)g_n'(0) \\ + w_1(x) \} \sum_i f_i(x) dx = 0 \dots\dots\dots (8a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \{ \phi_{yy}(x, 0) - \nu\phi_{xx}(x, 0) + (1-\nu)\varrho(x, 0) \\ + \sum_n f_n(x)g_n''(0) - \nu\sum_n f_n''(x)g_n(0) \\ + w_2(x) \} \sum_i f_i(x) dx = 0 \dots\dots\dots (8b) \end{aligned}$$

($i=2, 3, \dots, n$)

ここに、右肩のダッシュは常微分を表わし、 w_1 および w_2 は辺 AD の変位に関する項である。式(7)は Euler の微分方程式であり、式(8)は自然境界条件式である。これらの式において、 f_n は直交正規関数であることを考え、かつ、 (f_n', f_i') ならびに (f_n'', f_i'') は、 $n \neq i$ のときには $n=i$ のときにくらべて小さいので省略すると、

その結果はつぎのとおりになる。

$$\begin{aligned} g_n^{IV}(y) - 2(f_n', f_n')g_n''(y) + (f_n'', f_n'')g_n(y) \\ = - \int_{-1}^1 \{ 4d\phi(x, y) + (1-\nu)4\varrho(x, y) \} f_n(x) dx \\ \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_n'''(0) - (2+\nu)(f_n', f_n')g_n'(0) \\ = - \int_{-1}^1 \{ \phi_{yyy}(x, 0) + (2+\nu)\phi_{xxy}(x, 0) \\ + (1-\nu)\varrho_y(x, 0) + w_1(x) \} f_n(x) dx \dots\dots (10a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_n''(0) + \nu(f_n', f_n')g_n(0) \\ = - \int_{-1}^1 \{ \phi_{yy}(x, 0) - \nu\phi_{xx}(x, 0) \\ + (1-\nu)\varrho(x, 0) + w_2(x) \} f_n(x) dx \dots\dots (10b) \end{aligned}$$

($n=2, 3, \dots, n$)

ただし、 (f_n', f_n') などは $\int_{-1}^1 f_n' f_n' dx$ を表わすものとする。

式(9)は $g_n(y)$ に関する常数係数の4階微分方程式であり、その特解を $G_n(y)$ によって表わすと、一般解はつぎの形に書き表わすことができる。

$$\begin{aligned} g_n(y) = & e^{-\alpha_n y} (A_n \cos \beta_n y + B_n \sin \beta_n y) \\ & + e^{\alpha_n y} (C_n \cos \beta_n y + D_n \sin \beta_n y) \\ & + G_n(y) \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

式(10)は辺 AD における連続条件を示すものであり、これらの式と式(5)を用いて式(11)にふくまれる常数 A_n, B_n, C_n および D_n を決定することができる。

辺 AD において固定されているときには、式(6)右辺の第2項と第3項、ならびに式(8)および式(10)中の w_1 と w_2 は消滅する。一方、辺 AD において弾性体に接続しているときには、原理上 w_1 および w_2 を0 (g_n をふくむ) によって表わすことができるが、実際上計算不可能である。そこで、この場合にかぎり式(10)を用いなくて、辺 AD 上の9点のみにおいて連続条件を満足させることにした。数値計算に際し f_n および g_n に対して採用した項数は、辺 AD において固定されている場合には3項、弾性接続している場合に対しては4項である。式(9)および式(10)はごく近似的なものであるから、数値計算にあたってはこの程度の項数を採用するにとどめた。

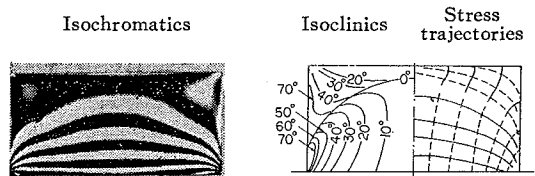
4. 一辺が完全に固定されたときの応力状態

まず、四角形ならびに三角形板の一辺が剛体に接着されている、この板の部分のみが一様温度上昇をしたときの応力状態を明らかにする。

(1) 矩形板

等色線、等傾線ならびに主応力線の例を図-4に示しておく。応力解析を行なった結果の数例を示すと図-5

図-4 一辺完全固定矩形板 ($h/l=1/2$) の光弾性実験



のとおりである。この図は矩形板の右半分のみについて、境界線と対称軸 (y 軸) における応力分布を描いたものであり、実験値と計算値とを比較して示した。

σ_x が最大になるのは y 軸上であり、固定辺から離れるにつれて減少する。そして $h/l=1/2$ のときでは $y=0.9l$ より上部においては引張応力が現われる。 h/l がこれより大きい矩形では、必ずこのような部分において引張応力が生ずる。上面の中央(点E)における σ_x の値は h/l が小さくなるにしたがって増加し、固定辺における値に近づく。 y 軸上の σ_x は、固定辺から同じ距離の点においては、 h/l の小さい矩形ほど大きい圧縮応力を示している。固定辺における σ_x の値は、 h/l にかかわら

図-5 一边完全固定矩形板の応力状態

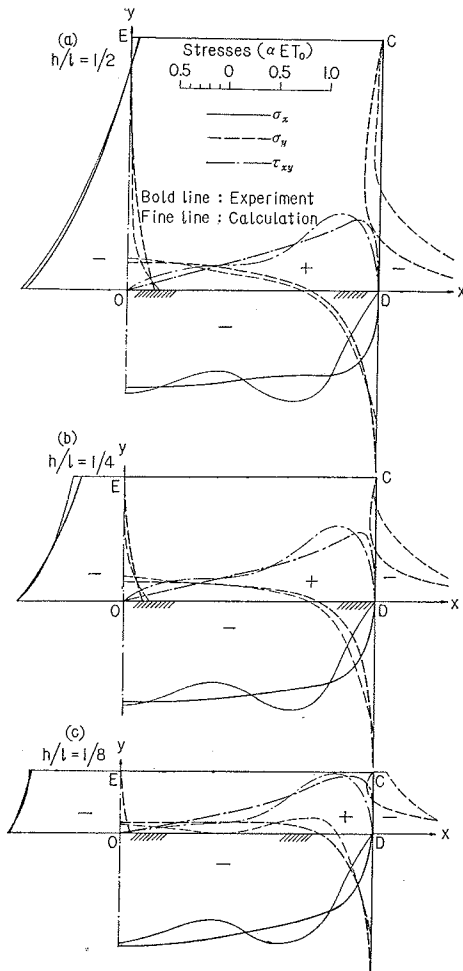
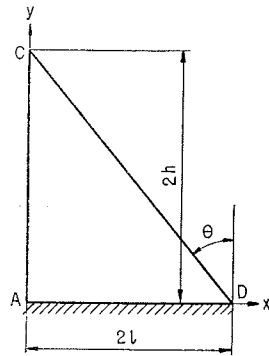


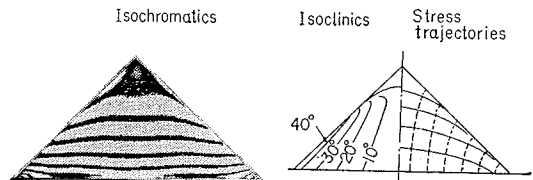
図-6 直角三角形板



(2) 三角形板

図-2 に示した対称軸を持つ形と、図-6 に示すような直角三角形板（直立辺を y 軸とする）について実験を行なった。図-2 において、二等辺三角形にしようとするとき、 θ が小さいときに h がきわめて大きくなるので、模型寸法を $h=l$ を限度としたため、 $\theta < 45^\circ$ のときには台形板、 $\theta \geq 45^\circ$ のときには二等辺三角形板となった。同様なことから、図-6 においても、 $h/l > 1.25$ のときは台形、 $h/l \leq 1.25$ のときは直角三角形板である。以後

図-7 一边完全固定二等辺三角形板 ($\theta = 45^\circ$) の光弾性実験



には、このような形の差にかかわらず、三角形板と称することにする。図-7 は $\theta = 45^\circ$ の二等辺三角形板に関する資料を示したものである。

二等辺三角形板の右側半分における応力状態は 図-8 に示すとおりである。傾斜側辺ならびに隅角 D の近傍を除けば、この応力状態は 図-5 に示した矩形板のものと非常によく似ている。応力状態に関しては、側辺の傾き θ が大きくなることは、矩形板において h/l が小さくなることに対応する。したがって、固定辺においては、 θ が大きくなっても σ_x はほとんど変わらないが、 σ_y および τ_{xy} は減る。隅角 D においては、 θ が大きくなると応力集中が急激に減じ、 $\theta > 60^\circ$ においては点 D において応力集中を生じない。 θ がこの程度に大きくなると応力集中は解消されるが、側辺全体にわたって大きい縁応力がひき起こされることになる。

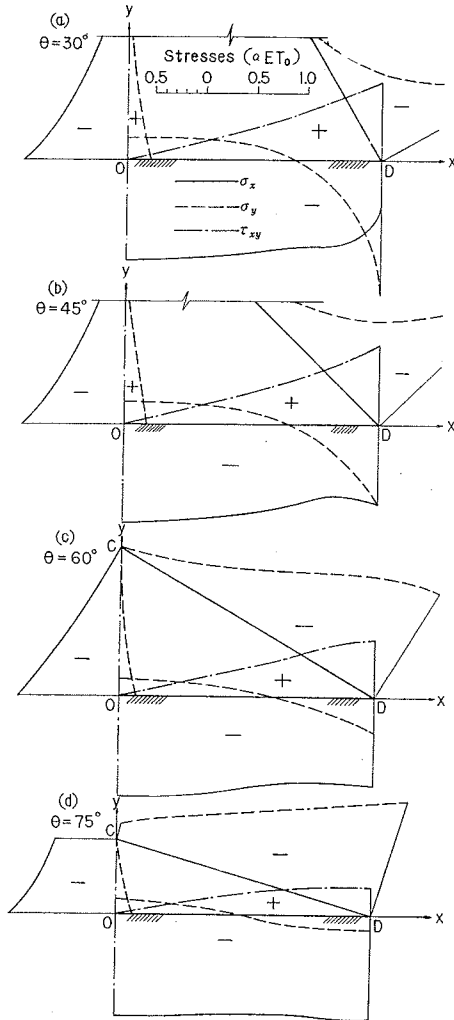
図-9 には直角三角形板の応力状態を示した。自由辺の縁応力をみると、直立辺の応力は矩形板の側辺のものに、傾斜辺の応力は対応する傾斜 θ をもった二等辺三角形板のものに近い。同様にして、固定辺の両端 A および D の近傍においても、点 A では矩形板、点 D では二等

ず、ほとんど一定で $-\alpha ET_0$ に近い。

σ_y の固定辺における様子を見ると、隅角の点 D において大きい圧縮応力の集中を示している、内部においては引張応力を生じている。辺 AD の端部と内部において σ_y の符号が異なるのは、この辺における σ_y の合力が消滅しなければならないわけだから当然のことである。 h/l が小さくなるほど、点 D の圧縮応力が減ずるとともに、内部の引張応力も小さくなる。自由な側辺 CD においては、 σ_y の値は固定辺から離れるにしたがって圧縮応力が激減し、引張応力に変ずる。

固定辺における τ_{xy} は、図-5 で示した場合には三角形に近い分布を示している、 h/l が小さくなくても、わずかに減ずるにすぎない。しかしながら、 h/l がきわめて小さくなると τ_{xy} はいちじるしく減ずる。この場合の τ_{xy} の分布状況は、著者²⁾ならびに Aleck¹²⁾ の計算に示されるように、内部においてはきわめて小さくなり、点 D 付近の端近くのみ集中する傾向を示す。以上に述べたように、固定辺における応力は σ_x を除けば h/l が小さくなって低い矩形板になるほど減ずる。

図-8 一辺完全固定二等辺三角形板の応力状態

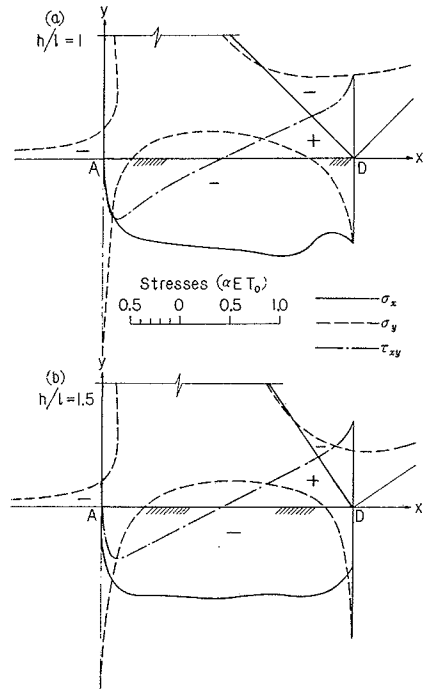


辺三角形板の応力状態に類似している。要するに、ここに示したような形では、それぞれの側辺の応力を独立して考えてよいわけである。ただし、詳細に調べると、傾斜側辺の縁応力は二等辺三角形板におけるものとの差がいくぶん大きい。固定辺における応力分布曲線の左側半分は矩形板のものに、右側半分は二等辺三角形板のものに類似した形となる。

5. 一辺が弾性拘束されたときの応力状態

多角形の一辺がほかの弾性体に接続されているときには、2つの物体の弾性係数の差と寸法関係によって、同一の温度変動条件によっても熱応力状態が異なる。図-2において、壁体の突起物(弾性体①)が矩形あるいは三角形であり、基礎(弾性体②)が壁体と同じ材料であって半無限体と考えられるほど大きい場合について、壁体のみが一樣な温度変動をうけたときの熱応力状態を考える。

図-9 一辺完全固定直角三角形板の応力状態



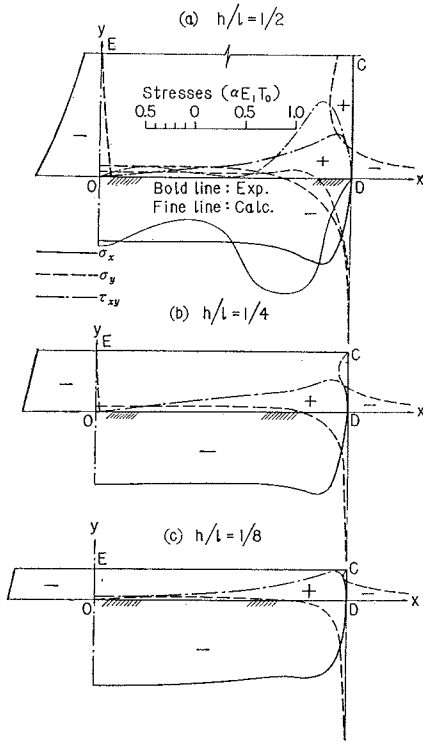
このような条件のときには、すでに述べたことより、突起部のある部材が軸力をうけたときの応力状態が明らかになればよいわけである。したがって、この問題については、かなり以前から理論解析ならびに光弾性実験が行なわれていた。熱応力問題として採り上げたものには、Smith⁹⁾、色部氏その他⁹⁾、Zanger と Brahtz¹³⁾、Zienkiewicz¹⁴⁾、川本氏⁸⁾、Schleeh¹⁵⁾ などの研究があるが、壁体の形、基礎の寸法、両者の弾性係数の相違などによってうける影響について不明の点が多い。本節では、基礎が壁体と同一弾性体である場合の応力状態のみを示し、前節で示した剛体基礎の場合の応力状態と比較する。

(1) 矩形板

前節と同様な表わし方によって、同じ材料でできた半無限弾性体に接続され、それ自身のみが一樣な温度上昇をうけた矩形板の熱応力状態を示すと 図-10 のような結果となる。この図に示した計算値⁹⁾ に用いられた条件は $h/l = \infty$, $\nu = 0$ であるから、実験条件と一致していないことに注意する必要がある。

辺 AD において固定された場合(図-5)と比較すると、辺 AD を始めほとんどすべての位置において、図-10 の方が小さい応力となっている。辺 AD における σ_x の値は後者の方が約3割小さい。唯一の例外は、自由な側辺の点 D から少し離れた位置において現われる引張応力であって、後者の方がむしろ大きい値となっている。また、側辺上で応力の符号の変ずる点は本節の場合の方が点 D に近い。このような傾向は計算値にも認められることである。矩形の寸法 h/l が異なったときの

図-10 一辺弾性固定矩形板の応力状態



応力変化の様子をみると、 h/l が小さくなると σ_x が漸増することが剛体基礎のときと異なる点であって、そのほかの状況は類似している。

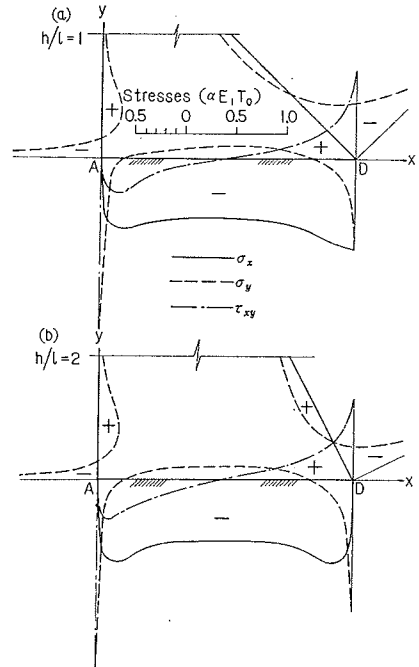
(2) 三角形板

直角三角形板の一辺が弾性拘束された場合の応力状態を 図-11 に例示する。図-9 と 図-11 とを比較すると、一辺が完全に固定されたときと弾性固定のときとの応力状態の差は、矩形板の場合と全く同様である。拘束条件と応力状態との関係については、突出している壁体の形にかかわらず、すでに述べたような事がらが成立するものと考えてよい。図-10 と 図-11 を検討すれば、壁体自身の形による応力変化の状況についても、前節で述べた関係の成立することがわかる。

6. 応力の変動傾向と拘束度

図-5 および 図-10 で示したように、計算値と実験値はかなりよい一致を示している。ただ自由な側辺における縁応力は差がやや大きい。計算値の曲線に波打ちの大きいのは、無限級数の初めの3項または4項までしか採用しなかったことによるものである。図-5 において隅角 D における σ_y に比較的好い一致が見られるけれども、これには重大な意義がない。元来、この点は特異点であり、計算においては項数を多く採るほど応力は増加するものであり、一方、この点における光弾性縞の次数は正確に数えられるものではない。実験値は判読しう

図-11 一辺弾性固定直角三角形板の応力状態



る最大次数より応力を求めたものである。

いままで示した数多くの図によって、それぞれの形における応力分布の特徴が明らかになったので、以下にはコンクリート構造物の場合に注意すべき点をあげ、つぎに、物体の形ならびに拘束条件の相違によって、熱応力状態にどのような変化が現われるかを示すことにする。このときには、実験値と計算値がかなりよく合っているから、両方の数値を示すことにする。

(1) 一様な収縮をうけたときの応力の検討

コンクリート構造物では、温度低下、乾燥などの原因によって収縮をうけたとき、拘束をうけているために引張応力が生じ、ときにはひびわれの発生を見ることがある。このような問題を考えるときに、特に注意しなければならない点を示してみよう。突出物が一様な収縮をうけたときには、その原因のいかににかかわらず、収縮ひずみ $= \alpha T_0 (<0)$ とすれば、これまでの図が全部利用できる。そうすると、突起物のほとんど全体にわたって引張応力を生ずることになる。

引張応力が大きくなると考える必要のあるのは、接続面付近における σ_x 、隅角 D の近傍における σ_y である。それ以外に、 h/l が小さいときには、自由な上面中央部において接続面と同程度の大きさの引張応力が現われる。上面 BC では激しい温度変動や湿度変動をうけることが多いから、この面からひびわれの発生をさけようとするとき、点 E (図-2 参照) における引張応力の低下をはからなければならない。ひびわれが鉛直方向に進行しないためには、断面 EO における引張応力 σ_x の平均値を小さくすることが考えられるであろう。ひびわれが

鉛直方向に進行することの危険性を判定する目安として、しばしばこのような平均応力の大きさがとりあげられる。

接続面におけるせん断応力 τ_{xy} は端部に近づくほど大きくなるとともに、その位置で大きい引張直応力をもっている。したがって接続面端部では接着の離れる危険性が大きい。内部では τ_{xy} が小さく、しかも σ_y は圧縮応力である。面 AD においてコンクリートが打ち継がれているときに、接着面の安全性を大雑把に判定するための資料としては、この面に働く τ_{xy} の平均値と点 D における σ_y の大きさをとりあげればよいであろう。

壁体の形、壁体と基礎の弾性係数比、あるいは両者の寸法の差などによって、上に述べた諸点を検討するのに必要な応力成分および平均応力の値がどのような変動をうけるかという点を明らかにしよう。

(2) 弾性係数の影響

以下においては、壁体と基礎との区別が必要なきに、前者に対して 1、後者に対して 2 の添字をつけることにする。なお、壁体突起物の弾性係数と基礎のそれとの比を κ で表わす。すなわち、

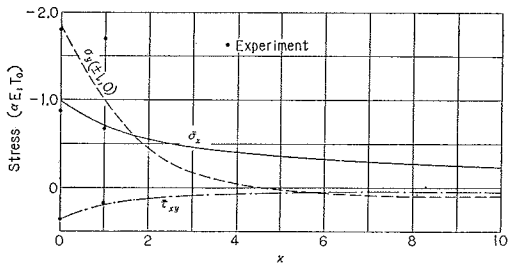
$$\kappa = E_1/E_2 \dots\dots\dots(12)$$

矩形板の寸法が $h/l \gg 1$ のときについて、これが半無限体に接続しているとき、応力と κ との関係を 図-12 に示した。この図における記号はつぎのとおりである。

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{l} \int_0^l \sigma_x(x,0) dx \quad \bar{\tau}_{xy} = \frac{1}{l} \int_0^l \tau_{xy}(x,0) dx \dots(13)$$

ただし、計算値は $\nu=0$ 、実験値は $\nu=0.37$ である。一般的には、 ν が小さいほど 1 次応力は大きくなるものである²⁾。

図-12 半無限基礎上の矩形板における κ と応力との関係 ($h/l = \infty, \nu = 0$)



κ の増加につれて、 $\bar{\sigma}_x$ の減少はゆるやかであるが、 $\bar{\tau}_{xy}$ ならびに点 D における σ_y の減少はいちじるしい。特に、 σ_y は $\kappa=4.5$ を境にして応力の符号が変わる。換言すれば、突起した壁体にくらべて基礎が非常に軟かければ、一様な温度低下を生じて、点 D において引張応力が生じない。いま、

$$\bar{\sigma}_x = -R \alpha E_1 T_0 \dots\dots\dots(14)$$

なる形に表わすと、R はいわゆる拘束度である。図-12 によれば、R の値は Zanger と Brahtz が示した式

$$R = 1/(1+0.4\kappa) \dots\dots\dots(15)$$

を適用できることがわかる。

つぎに、壁体が前と同様に $h/l \gg 1$ であり、これに接続している基礎も壁体と同じ幅で非常に長いときを考える。すなわち、図-13 において $h/l = \infty$ となった長い帯状の物体が、 $y \geq 0$ において一様な温度上昇をうけた場合である。この場合に、 $\nu=0$ としたときの計算値を

図-13 同幅の基礎に接続した矩形板

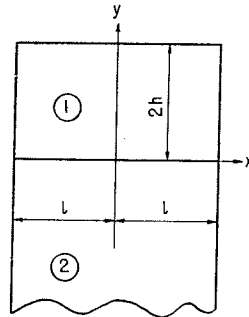


図-14 同幅の基礎上の矩形板における κ と応力との関係 ($h/l = \infty, \nu = 0$)

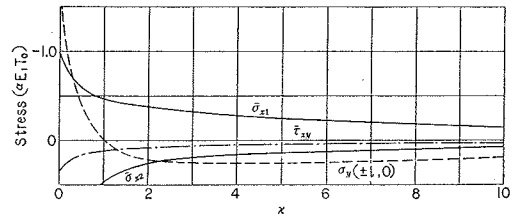


図-14 に示す。この場合の応力を 図-12 と比較すると、応力の値は小さく (σ_y は例外) κ にもなる応力変動がいちじるしい。点 D における σ_y は $\kappa=1$ において符号が変わる。もし、壁体にくらべて基礎が軟かければ、前者が一様収縮しても点 D において引張応力が生じない。 $\kappa=1$ のときには、 $\bar{\sigma}_{x1}$ の正解は $0.5 \alpha E_1 T_0$ であるから、計算値はいくぶん小さくなっている。

この場合には、基礎の大きさが半無限体にくらべてかなり小さいので、壁体が基礎からうける拘束も小さくなる。たとえば $\kappa=1$ のときの拘束度を比較すると、半無限体基礎に対して約 0.7、同幅の基礎に対して 0.5 である。同幅の基礎からうける拘束度を式 (15) に類似した形で示すと 図-14 を参照してつぎの近似式が得られる。

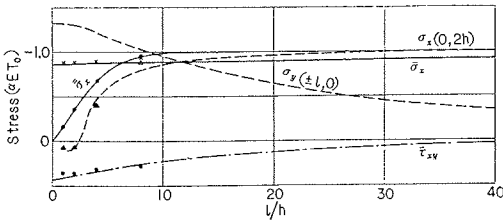
$$R = 1/(1+\kappa^{0.7}) \dots\dots\dots(16)$$

式 (15)、(16) は壁体の形が矩形でない場合に適用しても大きい誤差をとまなわない。色部氏その他³⁾ の導いた拘束度の近似式は、 $\sigma_{x1} = \sigma_{x2}$ と仮定しているので、式 (16) に近いものとなっている。

(3) 形状ならびに寸法の影響

壁体と基礎の寸法差と応力との関係は 図-12 と 図-

図-15 剛体基礎上の矩形板における l/h と応力との関係 ($\kappa=0, \nu=0.3$)



14 とを比較すればその一端を知ることができる。これらの場合には、壁体の形状・寸法を一定としていたので、つぎには被拘束物の形状や寸法の変化した場合について、応力変動の状況を示すことにする。

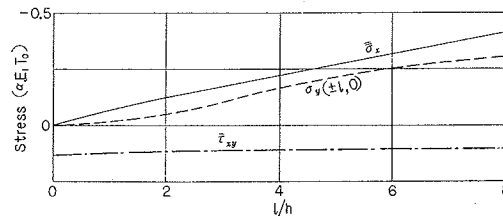
剛体に接続した矩形板について、 l/h と応力との関係を示したのが 図-15 である。計算値は $\nu=0.3$ と仮定したときのものであるから、図-12 にくらべて応力がいくぶん小さくなっている。 $\bar{\sigma}_x$ は中央鉛直断面における平均応力を示す。すなわち

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{2h} \int_0^{2h} \sigma_x(0, y) dy \dots\dots\dots (17)$$

$\bar{\sigma}_x$ をほかの研究と比較してみると、Carlson と Reading¹⁹⁾ の求めたものより $l/h > 2$ において大きく、川本氏の実験値⁷⁾ および Biélov の計算値¹⁰⁾ とよく合っている。いずれにしても $l/h > 10$ 程度になれば、 $\bar{\sigma}_x$ 、点 E における σ_x などは $-\alpha E T_0$ に近いものと考えらる必要がある。

つぎに、矩形板が同じ幅の長い物体に接続しているときについて、 $\kappa=1, \nu=0$ のときの l/h と応力との関係を計算値によって示すと 図-16 のようになる。この状態は既設ブロックにリフトを打ち継いでいく場合に現われるものである。図-15 の場合とくらべると、一般に

図-16 同幅の基礎上の矩形板における l/h と応力との関係 ($\kappa=1, \nu=0$)

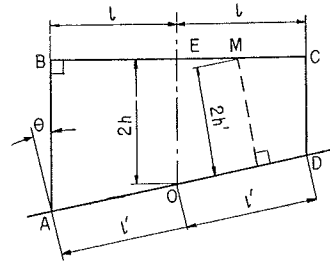


は $1/2$ 程度の応力となっていて、点 D における応力は小さい。

ダムにおいては、傾斜した岩盤上にコンクリートブロックを打設することが多い。この場合の形を 図-17 に示すような寸法によって表わすことにする。壁体が矩形以外の形であるとき、矩形の場合とくらべて $\bar{\sigma}_x$ 、 $\bar{\sigma}_{xy}$ などにはほとんど差がなく、点 A および D 付近における応力はかなり異なることを前に示した。

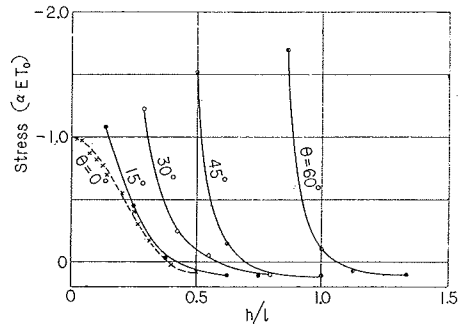
図-17 の基礎が剛体である場合について、自由な上面 BC に現われる最大応力と h/l との関係を、 θ を

図-17 傾斜した基礎上の壁体



parameter として描くと 図-18 のようになる。 h/l が小さくなると壁体が直角三角形になるので、この場合には点 D における近似値を示した。 $\theta=0$ のときには、上面における最大応力点 M が中央より短い鉛直辺の側にずれる。同一の h/l のときにおいても、 θ が大きいほど接続面の長さ $2l'$ が大きくなり、かつ M 点から接続面に至る距離 $2h'$ が短くなるので、上面の最大応力は増加する。この最大応力値は、もし点 M の位置がわかれば、 h/l の代りに h'/l' (図-17 参照) を用いると、

図-18 傾斜した剛体基礎上の壁体の上表面最大応力



矩形板に対する値から近似的に推測することができる。

7. 結 論

コンクリートダムのブロックや壁体などにしばしば現われる一つの基本的な熱応力(一般的には、体積変化による固有応力)状態を明らかにするために、光弾性実験を行なうとともに近似計算値も参照した。この場合の条件はつぎのとおりである。壁体は三角形または矩形であり、これらの一辺がほかの物体に接続していて、壁体のみに一様な温度変動を生じ、平面応力状態にある弾性体と仮定した。この研究の結果得られた熱応力ならびに拘束度に関する主要な結論を以下に示す。

- ① 拘束辺の長さの 0.45 倍以上では、基礎拘束がおよばないと考えてよい。
- ② 基礎が硬いときには、接続面の端に大きい応力集中を生ずるので、壁体が温度低下を起こすと、この点で離れる危険が多い。しかし、側面の傾斜 θ (図-2 参照) が 60° 以上になると、ほとんど応力集中が現われない。基礎が軟かくなるほどこの点の応力は減ずる(図-12 お

よび 図-14 参照)。

③ 接統面における σ_y および τ_{xy} は壁体の高さが小さくなると減ずる。壁体が軟かい基礎にあるときには高さの減少とともに σ_x が増加するが、剛体基礎にあるときはほとんど変化がない。換言すれば、基礎が剛体のときには壁体の形状・寸法が異なっても拘束度はほとんど不変である。

④ 壁体の寸法に差がなければ、形が異なっても接統面内部の応力はほとんど変わらない。しかし、接統面の端近くでは、その近傍の形によって応力が支配される。

⑤ Poisson 比が大きくなると、一般に一次応力がわずかに減少する。

⑥ 剛体基礎上の矩形壁体の高さと同面中央の応力との関係は 図-15 に示されている。基礎が傾斜すれば、上面の最大応力は増加する (図-18 参照)。

⑦ 半無限体基礎上の壁体のうける拘束度は式(15)で示されることが確かめられた。基礎が壁体と同じ幅のときには、式(16)によって拘束度を求めることができる。これらの式は壁体の高さが基礎幅にくらべてそれほど小さくないときには用いることができる。ただし、Poisson 比が小さいときに適用できるものである。

⑧ 中央鉛直断面の平均直応力 $\bar{\sigma}_x$ (式(17)参照) は Carlson と Reading の計算値より大きく、Biélov のそれに類似していた。

参 考 文 献

- 1) Mori, C. : Analysis of Thermal Stresses in Rectangular Plates Restrained at an Edge, Proc. 9th Japan Nat. Congr. for Appl. Mech. (1959), p. 61, 1960.
- 2) Mori, C. : Approximate Solution of Thermal Stresses in Rectangular Plates Fixed at an Edge, 京大工研研究報告, Vol. 11, No. 8, (Report No. 85), 1961.
- 3) Mori, C. and Kobayashi, S. : Approximate Solution of Thermal Stresses in Rectangular Plates Restrained at an Edge, 京大工研研究報告, Vol. 12, No. 9 (Report No. 99), 1962.
- 4) 森 忠次 : 熱応力の光弾性実験法に関する研究, 土木学会論文集, 第 66 号, p. 21, 1960.
- 5) Smith, H.G. : Photo-Elastic Determination of Shrinkage Stresses, Trans. ASCE, Vol. 101, p. 927, 1936.
- 6) Lévy, G. : Étude photoélastométrique, dans le contrefort d'un barrage, des contraintes produites par l'opposition de l'encastrement de la base à l'effet du retrait, Second Congress on Large Dams, C. 12 (Vol. 5), p. 3, 1936.
- 7) 色部 誠・林 正夫・若本 清・山田 桂一 : 重力ダムの新しい打設方式に関する基礎的研究, 電力技術研究所報, Vol. 5, No. 3/4, p. 23, 1955.
- 8) 川本 脛万 : マッシブな構造物の収縮応力に関する光弾性学的基礎研究, 土木学会論文集, 第 61 号, p. 29, 1959.
- 9) Oberti, G. and Bonfioli, B. : Research on the Stresses of Arch Dam Rings, Second Congress on Large Dams, C. 20 (Vol. 5), p. 17, 1936.
- 10) Horvay, G. : The End Problem of Rectangular Strip, Jour. Applied Mechanics, Vol. 20, p. 87, 1953.
- 11) Horvay, G. and Born, J.S. : Tables of Self-Equilibrating Functions, Jour. Mathematics and Physics, Vol. 33, p. 360, 1954.
- 12) Aleck, B.J. : Thermal Stresses in a Rectangular Plate Clamped Along an Edge, Trans. ASME, Vol. 71, p. A-118, 1949.
- 13) Zanger, C.N. and Brahtz, J.H.A. : Thermal Stresses in Concrete Blocks Subjected to Foundation Restraint, U. S. Bureau of Reclamation Tech. Memorandum, No. 600, 1940.
- 14) Zienkiewicz, O.C. : The Computation of Shrinkage and Thermal Stresses in Massive Structures, Proc. Institution of Civil Engineers, Part I, Vol. 4, p. 88, 1955.
- 15) Schlee, W. : Die Zwängspannungen in einseitig festgehaltenen Wandscheiben, Beton-und Stahlbetonbau, Bd. 57, S. 64, 1962.
- 16) Copeland, R.E. : Shrinkage and Temperature Stresses in Masonry, Jour. ACI, Vol. 28, p. 769, 1957.
- 17) Biélov, A.V. : Détermination des contraintes thermiques dans les massifs en béton, compte tenu de la plasticité de celui-ci, Cinquième Congrès des grands Barrages, C. 38 (Vol. 4, p. 1367), 1955.

(原稿受付 : 1962.5.10)

THERMAL STRESSES AND THE FACTOR OF RESTRAINT IN TRIANGULAR AND QUADRILATERAL PLATES RESTRAINED AT AN EDGE

By Dr. Eng., Chuji Mori, C.E. Member

We must not disregard the stresses which are developed in concrete structures by the volume changes due to temperature change, moisture change and so on. We find sometimes severe cracking in concrete structures such as dams and walls. If only the magnitude of volume change in structures is known, no matter whatever the cause of the volume change may be, we can analyse the stresses developed in them. Therefore, we consider the stress condition due to temperature change or the thermal stress problem.

The thermal stress conditions in concrete walls and blocks constructed on foundation are very complex and vary with the surrounding conditions. In this paper, we investigate one of the most fundamental problems. We assume that a uniform temperature change takes place in concrete walls bonded to the foundation at their base and the foundation temperature remains unchanged. The walls, the restrained bodies, are assumed as triangular or quadrilateral plates. The principal items discussed here are the features of the stress condition and factor of foundation restraint, which are affected by shape, dimension and elastic properties of the walls and foundation.

The thermal stresses and factor of restraint mentioned above have been studied by some investigators, but more detail and extensive investigations are desirable. Some time ago the author also obtained an approximate solution of the thermal stresses in rectangular walls restrained at an edge, and discussed the relations between the stress conditions and various factors such as shape of the wall, type of temperature change, difference of the elastic constants of the wall and foundation.

He has desired to verify experimentally the previously calculated results and moreover to obtain the stress conditions in triangular walls as seen in the cross section of gravity dams.

Therefore, he carried out some photoelastic experiments. The thermal stresses in the walls bonded to rigid foundation were obtained from the Epoxy models, which were bonded to a steel plate and to which the specified temperature change was applied. But in other cases a boundary pressure was applied to the models instead of the temperature change. Not only experimental results, but also some of the calculated values are shown in this paper.

Main features of the thermal stress conditions and the factor of restraint are as follows:

1) Foundation restraint does not reach to the part of a wall over a distance of $0.45 \times 2l$ from the base. When there occurs a uniform temperature drop in a wall, considerably large horizontal tensile stress is produced at the lower part of the wall, but compressive stress, on the contrary, appears in the upper part.

2) If the foundation is very hard, that is, κ is very small, remarkably severe stress concentration is produced at the end of the base of a wall. Considering the case of a temperature drop, there is great danger that the wall is separated at this location from the foundation. If the inclination θ (refer to Fig. 2) of the side surface is larger than about 60° , the stress concentration disappears. The vertical stress at the end of the base decreases with the increase in κ , and for a considerably large κ no tensile stress is produced at this location, even if there occurs a uniform temperature drop in a wall.

3) σ_y and τ_{xy} (refer to Fig. 2) at the base decrease with the decrease in the height of walls. However, if the walls are constructed on the yielding foundation, σ_x at the base increases with the decrease in their heights, and then it varies little with the height, if the walls are bonded to the rigid foundation. Denoting the factor of foundation restraint by the average of σ_x at the base, it scarcely varies with the shape of walls.

4) The stress conditions at the inner portion of the base are mainly determined by h/l , the ratio of the height and the base length of a wall (refer to Figs. 1, 2, 6 and 17), scarcely depends on the its shape. On the other hand, the stress conditions near the end of the base are greatly influenced by the shape at this location, for example, by the inclination θ of the side surface (refer to Fig. 2).

5) The relation between the stress at the middle point E of the upper surface of the rectangular walls bonded on the rigid foundation and l/h is shown in Fig. 15. For the case where the base of the wall is inclined (refer to Fig. 17), the stress at that location is also shown in Fig. 18. For the inclined foundation the normal stress at the point E of the wall is greater than the one for the horizontal foundation.

6) It is confirmed that the factor of restraint R for the wall with a considerably large height constructed on the semi-infinite foundation is given by

$$R=1/(1+0.4\kappa)$$

In general, the less Poisson's ratio of the material is, the greater primary stress is produced. Hence, the less Poisson's ratio is, the greater the factor of restraint. The above expression is valid only for the material of which Poisson's

ratio is not so large.

7) In the case where the foundation is the semi-infinite strip with the same width as the one of the rectangular wall, the factor of restraint is given by

$$R=1/(1+\kappa^{0.7})$$

Large restraint to a wall is given by massive foundation. In the case $\kappa=1$, for example, $R=0.7$ for semi-infinite foundation and $R=0.5$ for the foundation of semi-infinite strip. When the wall is considerably high large height, the above two expressions for the factor of restraint are to be used in spite of the shape and dimension of the wall.

8) The average horizontal stress $\bar{\sigma}_x$ (refer to Eq. (17)) at the middle vertical section of a wall is shown in Figs. 15 and 16. This average stress as well as the stress at the point E , is one of the guides which represent the danger to vertical cracking.

Notations

T_0 : Uniform temperature rise of a wall

E : Young's modulus

ν : Poisson's ratio

α : Coefficient of thermal expansion of a wall

κ : E_1/E_2

Suffixes 1 and 2 are referred to the wall and foundation, respectively.

[Received (by the Society) May 10, 1962]

土木学会論文集別冊在庫一覽

論文集	第26号 (高野博士)	実費	180円	千	30	論文集	第65号・別冊・3 (永井博士)	実費	160円	千	20
"	第27号 (仁杉博士)	"	160円		30	"	第68号・別冊・1 (国分博士・外2名)	"	100円		20
"	第37号 (伊丹博士)	"	120円		30	"	第69号・別冊・1 (林 正夫)	"	150円		30
"	第42号 (木下良作)	"	80円		20	"	第69号・別冊・2 (井田至春)	"	100円		20
"	第48号 (猪股博士)	"	200円		30	"	第70号・別冊・1 (室田 明)	"	200円		20
"	第59号・別冊・1 (岩佐義朗)	"	150円		20	"	第71号・別冊・1 (嶋・荻原) (英文)	"	70円		20
"	第59号・判冊・2 (奥田博士)	"	250円		30	"	第71号・別冊・3 (国分博士・外13名)	"	230円		30
"	第61号・別冊・1 (大久保博士・外2名)	"	150円		20	"	第71号・別冊・4 (森 博士)	"	130円		20
"	第61号・別冊・2 (林 博士) (英文)	"	100円		20	"	第72号・別冊・1 (島田博士)	"	100円		20
"	第61号・別冊・3 (太田誠一郎)	"	200円		30	"	第72号・別冊・2 (後藤博士)	"	120円		20
"	第65号・別冊・2 (三村・外3名)	"	80円		20	"	第72号・別冊・3 (山本 稔)	"	150円		20

土木学会論文集編集委員

委員長	丸安隆和	副委員長	山川尚典	委員	高瀬信忠	委員	増田重臣
委員	安芸周一	委員	倉田進	"	立松俊彦	"	松尾新一郎
"	浅川美利	"	倉西茂力	"	玉野治光	"	村田二郎
"	飯田隆一	"	小池司	"	土屋昭彦	"	室町忠彦
"	石橋金一郎	"	後藤圭司	"	西尾元充	"	八木田功
"	色部誠一郎	"	佐川嘉胤	"	西片守道	"	山根孟
"	内田功	"	佐武正雄	"	林正道	"	箭内寛治
"	岡島賢一	"	佐藤昭吉	"	久武啓祐	"	山本稔
"	北川英夫	"	杉木昭典	"	堀井健一郎	"	吉田巖
"	吉川秀夫	"	多田宏行	"	堀川清司	幹事	西脇威夫

昭和38年1月15日印刷
昭和38年1月20日発行

土木学会論文集 第89号

定価 150円 (千20円)

編集兼発行者 東京都新宿区四谷一丁目 社団法人 土木学会 末森 猛 雄
印刷者 東京都港区赤坂溜池5 株式会社 技報堂 大沼 正 吉

発行所 社団法人 土木学会 振替東京 16828 番
東京都新宿郵便局区内 新宿区四谷一丁目 電話 (351) 代表 5138 番