

# 曲線直交異方性変厚扇形平板の曲げについて

——変厚の始点が座標の原点と一致しない場合——

芳 村 仁\*

**要 旨** 極方向に厚さが変化する扇形平板で変厚の始点が極座標の原点と一致しない、一般の場合を本論文で扱った。板厚が  $r$  の代数関数で表わされる場合を主としてとりあげ基本微分方程式をたて、その解をベキ級数で求めることができた。例として厚さが直線の変化をなすような扇形平板の数値計算を行ない、等厚のものおよび始点と原点の一致したもの、比較することができた。

## 1. 緒 言

筆者は先の変厚扇形平板に関する論文<sup>1)</sup>で  $r$  方向変厚板の基礎微分方程式をたて、変厚の始点\*\*と座標の原点が一致する場合の曲げの問題について検討した。その中でも述べたように変厚扇形平板では変厚の始点と極座標の原点が一致しないのがより一般的であるので、本論文ではその場合について述べることにする。厚さの変化は  $r$  の代数関数(有理整数関数)で表わされるのを中心に考え

$$\begin{aligned}
 p = & N_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \left[ \frac{2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r}{r} + 2 \frac{dN_r}{dr} \right] \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \left[ \frac{N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r}{r^2} + 2 \frac{C_2}{r^2} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} \\
 & + \frac{C_1 - 3C_2 - 2N_r \nu_\theta}{r^3} + \frac{2}{r^2} \left( \frac{dC_2}{dr} + \nu_\theta \frac{dN_r}{dr} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \left[ \frac{2N_r \nu_\theta + 2N_\theta + 3C_2 - C_1}{r^4} \right. \\
 & - \frac{1}{r^3} \left( 2 \frac{dC_2}{dr} + 2\nu_\theta \frac{dN_r}{dr} + \frac{dN_\theta}{dr} \right) + \frac{\nu_\theta}{r^2} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \left. \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \left[ \frac{N_\theta}{r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{dN_\theta}{dr} + \frac{\nu_\theta}{r} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \right] \frac{\partial w}{\partial r} \\
 & + \left[ -\frac{N_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} (2(1+\nu_\theta) \frac{dN_r}{dr} - \nu_r \frac{dN_\theta}{dr}) + \frac{d^2 N_r}{dr^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{N_\theta \partial^4 w}{r^4 \partial \theta^4} \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

扇形平板の中心角を  $\alpha$  とし  $0 < \theta < \alpha$  の領域で  $\theta$  に関する有限 Fourier Sine 変換を施すと放射方向の境界の条件をふくんだ式が得られるが、二直線辺が単純支持の条件を考慮すると式(1)は Sine 変換されたたわみ  $w_s$  に

$$\begin{aligned}
 N_r \frac{d^4 w_s}{d\rho^4} + \left[ \frac{2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r}{\rho} + 2 \frac{dN_r}{d\rho} \right] \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} + \left[ -\frac{N_\theta}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \left\{ 2(1+\nu_\theta) \frac{dN_r}{d\rho} - \nu_r \frac{dN_r}{d\rho} \right\} + \frac{d^2 N_r}{d\rho^2} \right. \\
 - \beta^2 \left. \left\{ \frac{N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r}{\rho^2} + 2 \frac{C_2}{\rho^2} \right\} \right] \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + \left[ \frac{N_\theta}{\rho^3} - \frac{1}{\rho^2} \frac{dN_\theta}{d\rho} + \frac{\nu_\theta}{\rho} \frac{d^2 N_r}{d\rho^2} - \beta^2 \left\{ \frac{C_1 - 3C_2 - 2N_r \nu_\theta}{\rho^3} \right. \right. \\
 + \left. \left. \frac{2}{\rho^2} \left( \frac{dC_2}{d\rho} + \nu_\theta \frac{dN_r}{d\rho} \right) \right\} \right] \frac{dw_s}{d\rho} + \beta^2 \left[ \left\{ \frac{C_1 - 3C_2 - 2N_r \nu_\theta - 2N_\theta}{\rho^4} + \frac{1}{\rho^3} \left( 2 \frac{dC_2}{d\rho} + 2\nu_\theta \frac{dN_r}{d\rho} + \frac{dN_\theta}{d\rho} \right) - \frac{\nu_\theta}{\rho^2} \frac{d^2 N_r}{d\rho^2} \right\} \right. \\
 \left. + \frac{\beta^2 N_\theta}{\rho^4} \right] w_s = S\{p(r, \theta)\} b^4 \dots \dots \dots (2)
 \end{aligned}$$

$N_\theta/N_r = c^2$  とおき、ねじり剛度を  $N_r, N_\theta$  および  $\nu_r, \nu_\theta$  で表現すると式(2)は

$$\begin{aligned}
 N_r \frac{d^4 w_s}{d\rho^4} + 2 \left[ \frac{N_r}{\rho} + \frac{dN_r}{d\rho} \right] \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} + \left[ \frac{-(2c\beta^2 + c^2)}{\rho^2} N_r + \frac{(2+c^2\nu_r)}{\rho} \frac{dN_r}{d\rho} + \frac{d^2 N_r}{d\rho^2} \right] \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} \\
 + \left[ \frac{(2c\beta^2 + c^2)}{\rho^3} N_r - \frac{(2c\beta^2 + c^2)}{\rho^2} \frac{dN_r}{d\rho} + \frac{c^2 \nu_r}{\rho} \frac{d^2 N_r}{d\rho^2} \right] \frac{dw_s}{d\rho} \\
 + \beta^2 \left[ \frac{(-2c^2 - 2c + c^2 \beta^2)}{\rho^4} N_r + \frac{(2c + c^2)}{\rho^3} \frac{dN_r}{d\rho} - \frac{c^2 \nu_r}{\rho^2} \frac{d^2 N_r}{d\rho^2} \right] w_s = S\{p(r, \theta)\} b^4 \dots \dots \dots (3)
 \end{aligned}$$

ることにし、曲げの微分方程式をたて、その解をベキ級数の形で求めることができた。この場合も単に厚さが変化する平板のみでなく、平板の剛度が  $r$  方向で変化する場合、すなわち  $N_r$  が  $r$  の関数で示されるようなときにも拡張して適用できることは前論文の場合と同じである。変厚を表わす式が代数関数以外の任意のものであっても(たとえば初等超越関数)、変厚板の基礎微分方程式からそのおのおのについての微分方程式をつくると、それらはここに扱う代数関数で表わされる場合に帰着されることが多い。

## 2. 基本微分方程式

$r$  方向変厚平板の基礎微分方程式は前論文<sup>1)</sup>で誘導したが、記号を前と同様に  $N_r, N_\theta, C_1, C_2$  を板の曲げ剛度およびねじり剛度、 $\nu_r, \nu_\theta$  をポアソン比として再記すると次の式(1)のごとくである。

関する常微分方程式となる。変数  $r$  を無次元表示するため平板の内側円弧辺までの距離を  $b$  とするとき、新たに  $\rho = r/b$  を導入し、 $\rho$  に関する方程式に変換したものを示すと式(2)のようになる。

\* 正員 工修 北海道大学助教授 工学部土木工学科  
 \*\* 変厚を表わす曲線が軸と交わる点を変厚の始点とし、この場合は  $h=h(\rho)$  が座標原点 0 をとらない場合である。

となる。式(2)または式(3)がr方向に厚さが変化し(あるいは板剛度がr方向に変化し)、二直線辺が単純支持された扇形平板の曲げの問題の基礎となる方程式であり与えられた変厚の形により式(2)または式(3)からそれぞれの場合の微分方程式がつくられる。なお上式で  $S\{p(r,\theta)\}$  は荷重  $p(r,\theta)$  の Fourier Sine 変換を表わす。求めるたわみ  $w(r,\theta)$  は  $w_s$  の逆変換公式

$$w(r,\theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} w_s \cdot \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \dots\dots\dots(4)$$

$$\left( \begin{array}{l} n=1,2,3,\dots \\ \alpha = \text{中心角} \end{array} \right)$$

から得られる。

(1) 厚さが  $h=h_0(\alpha_1\rho+\beta_1)$  なる直線の変化をなす場合(図-1)

$h_0$  は  $\rho=1(r=b)$  における板厚であり  $\alpha_1, \beta_1$  は与えられた変厚の形によって定まる定数である。この場合は

$$N_r = \frac{E_r h_0^3 (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3}{12(1-\nu_r \nu_\rho)} = N_{r0} (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3 \dots\dots\dots(5)$$

となる。ただし

$$N_{r0} = \frac{E_r h_0^3}{12(1-\nu_r \nu_\rho)} \dots\dots\dots(6)$$

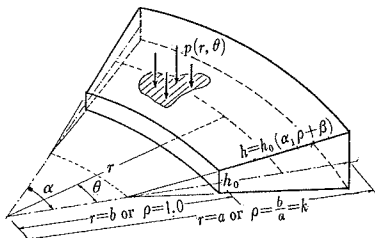
式(2)に代入すると、この場合の微分方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 w_s}{d\rho^4} + \frac{2(4\alpha_1\rho+\beta_1)}{(\alpha_1\rho+\beta_1)} \frac{1}{\rho} \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} \\ & + \frac{(\alpha_1^2 A_1 \rho^2 + \alpha_1 \beta_1 A_2 \rho + \beta_1^2 A_3)}{(\alpha_1\rho+\beta_1)^2} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} \\ & + \frac{(\alpha_1^2 B_1 \rho^2 + \alpha_1 \beta_1 B_2 \rho + \beta_1^2 B_3)}{(\alpha_1\rho+\beta_1)^2} \frac{1}{\rho^3} \frac{d w_s}{d\rho} \\ & + \frac{\beta^2 (\alpha_1^2 C_1 \rho^2 + \alpha_1 \beta_1 C_2 \rho + \beta_1^2 C_3)}{(\alpha_1\rho+\beta_1)^2} \frac{1}{\rho^4} w_s \\ & = \frac{S\{p(r,\theta)\} b^4}{N_{r0} (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3} \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 12 + 3c^2 \nu_r - (2c\beta^2 + c^2) \\ A_2 &= 3(2 + c^2 \nu_r) - 2(2c\beta^2 + c^2) \\ A_3 &= -(2c\beta^2 + c^2) \\ B_1 &= -(2c\beta^2 + c^2) + 6c^2 \nu_r \\ B_2 &= -(2c\beta^2 + c^2) \\ B_3 &= (2c\beta^2 + c^2) \\ C_1 &= c^2 + 4c + c^2 \beta^2 - 6c^2 \nu_r \\ C_2 &= -c^2 + 2c + 2c^2 \beta^2 \\ C_3 &= -2c^2 - 2c + c^2 \beta^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)$$

図-1 板厚が直線の変化 ( $h=h_0(\alpha_1\rho+\beta_1)$ ) する扇形平板



この微分方程式は  $\alpha_1\rho+\beta_1=0$  ならしめる  $\rho$  の値、すなわち  $\rho=-\beta_1/\alpha_1=a$ 、および  $\rho=0$  において方程式の各係数の分母が0となるが、(1)  $\rho=0$  の付近においては  $\frac{2(4\alpha_1\rho+\beta_1)}{(\alpha_1\rho+\beta_1)}$ ,  $\frac{(\alpha_1^2 A_1 \rho^2 + \alpha_1 \beta_1 A_2 \rho + \beta_1^2 A_3)}{(\alpha_1\rho+\beta_1)^2}$ , …… など が正則な関数であり、また、(2)  $\rho=a$  の付近においては  $\frac{2(4\alpha_1\rho+\beta_1)}{\rho}$ ,  $\frac{(\alpha_1^2 A_1 \rho^2 + \alpha_1 \beta_1 A_2 \rho + \beta_1^2 A_3)}{\rho^2}$ , …… などが正則関数であるので  $\rho=0$  と  $\rho=a$  はともに微分方程式(7)の正則特異点であることがわかる。したがって解は正則点付近のものほか、 $\rho=0$  の付近で成り立つものと  $\rho=a$  の付近で成り立つものとの二つが求まることになる。

(2) 厚さが  $h=h_0(\alpha_0\rho^m+\alpha_1\rho^{m-1}+\dots+\alpha_m)$ , ( $m>0$ ) のように変化する場合

これは板厚が  $\rho$  に関する  $m$  次の代数式で示される変化をなす場合であり  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  は考えている平板の変厚の形によって定まる定数である。このときの微分方程式は式(3)から次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 w_s}{d\rho^4} + \frac{P(\rho)}{(\alpha_0\rho^m+\alpha_1\rho^{m-1}+\dots+\alpha_m)\rho} \frac{1}{\rho} \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} \\ & + \frac{Q(\rho)}{(\alpha_0\rho^m+\dots+\alpha_m)^2 \rho} \frac{1}{\rho} \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} \\ & + \frac{R(\rho)}{(\alpha_0\rho^m+\dots+\alpha_m)^2 \rho^3} \frac{1}{\rho} \frac{d w_s}{d\rho} \\ & + \frac{S(\rho)}{(\alpha_0\rho^m+\dots+\alpha_m)^2 \rho^4} w_s \\ & = \frac{S\{p(r,\theta)\} \cdot b^4}{N_{r0} (\alpha_0 \rho^m + \dots + \alpha_m)^3} \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

$P(\rho)$  は  $\rho$  についての  $m$  次の多項式、 $Q(\rho), R(\rho), S(\rho)$  はいずれも  $\rho$  について  $2m$  次の多項式である。いま  $a_1, a_2, \dots, a_m$  を  $\alpha_0\rho^m+\alpha_1\rho^{m-1}+\dots+\alpha_m=0$  とする相異なる  $m$  個の根とすると、式(9)は

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 w_s}{d\rho^4} + \frac{P(\rho)}{\rho(\rho-a_1)(\rho-a_2)\dots(\rho-a_m)} \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} \\ & + \frac{Q(\rho)}{\rho^2[(\rho-a_1)(\rho-a_2)\dots(\rho-a_m)]^2} \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} \\ & + \frac{R(\rho)}{\rho^3[(\rho-a_1)(\rho-a_2)\dots(\rho-a_m)]^2} \frac{d w_s}{d\rho} \\ & + \frac{S(\rho)}{\rho^4[(\rho-a_1)(\rho-a_2)\dots(\rho-a_m)]^2} w_s \\ & = \frac{S\{P(r,\theta)\} b^4}{N_{r0} [(\rho-a_1)(\rho-a_2)\dots(\rho-a_m)]^3} \dots\dots(10) \end{aligned}$$

となる。この方程式の  $d^3 w_s/d\rho^3, d^2 w_s/d\rho^2, d w_s/d\rho$ 、および  $w_s$  の各係数は、 $\rho=a_1, \rho=a_2, \dots, \rho=a_m$  および  $\rho=0$  において極を有するが、ある一つの  $a_i$  について考えると  $(\rho-a_i)$  の項を係数の分母から除いた形の  $\frac{[\rho \text{ についての } 2m \text{ 次式}]}{[(\rho-a_1)\dots(\rho-a_{i+1})(\rho-a_{i-1})\dots(\rho-a_m)]^2 \rho^3}$  などは  $\rho=a_i$  で正則であるから  $a_i$  は正則特異点である。同様にほかの  $a_i$  および  $\rho=0$  についても正則特異点であるこ

とがわかる。したがって式(9)の解は正則点付近のものと正則特異点付近のものが得られることになる。なお、特異点付近の解を考えると、上のことから  $a$  を正則特異点とすれば式(7)は一般的に

$$\frac{d^4 w_s}{d\rho^4} + \frac{p(\rho-a)}{(\rho-a)} \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} + \frac{q(\rho-a)}{(\rho-a)^2} \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + \frac{r(\rho-a)}{(\rho-a)^3} \frac{dw_s}{d\rho} + \frac{s(\rho-a)}{(\rho-a)^4} w_s = F(\rho-a) \dots (11)$$

のような微分方程式に表わすことができる。上式中  $p(\rho-a)$ ,  $q(\rho-a)$ ,  $r(\rho-a)$ ,  $s(\rho-a)$  は  $\rho=a$  の付近で正則関数である。

次に微分方程式(9)の解を求めるのであるが上述のことから正則点付近を考えると式(9)の方程式につき、正則特異点付近の解を考えると式(10)を対象として論ずればよいことになる。なお式(9)または式(10)において  $m=1$ ,  $\alpha_2=\alpha_3=\dots=\alpha_m=0$  とすると当然板厚が直線変化する場合の式(7)になる。

### 3. 正則点付近の解

式(6)は4階の線形微分方程式であり、その解は右辺=0 なるときの同次方程式の解と右辺のある場合の特解とから成り立つので、この2つの場合をわけて解を求めよう。

#### (1) 同次微分方程式の正則点付近の解

式(9) (あるいは直線変化するときは式(7)) の  $w_s$  の導関数の各係数はいずれも正則関数であるのでそれらを  $p(\rho)$ ,  $q(\rho)$ ,  $r(\rho)$ ,  $s(\rho)$  とすると

$$\frac{d^4 w_s}{d\rho^4} + p(\rho) \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} + q(\rho) \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + r(\rho) \frac{dw_s}{d\rho} + s(\rho) w_s = 0 \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} (\rho-a_0)^0 & 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 A_4 + 3 \cdot 2 p_0 A_3 + 2 q_0 A_2 + r_0 A_1 + s_0 A_0 = 0 \\ (\rho-a_0)^1 & 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 A_5 + 4 \cdot 3 \cdot 2 p_0 A_4 + (3 \cdot 2 p_1 + 3 \cdot 2 q_0) A_3 + 2(q_1 + r_0) A_2 + (r_1 + s_0) A_1 + s_1 A_0 = 0 \\ (\rho-a_0)^2 & 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 A_6 + 5 \cdot 4 \cdot 3 p_0 A_5 + (4 \cdot 3 \cdot 2 p_1 + 4 \cdot 3 q_0) A_4 + (3 \cdot 2 p_2 + 3 \cdot 2 q_1 + 3 r_0) A_3 \\ & + (2 q_2 + 2 r_1 + s_0) A_2 + (r_2 + s_1) A_1 + s_2 A_0 = 0 \\ (\rho-a_0)^3 & 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 A_7 + 6 \cdot 5 \cdot 4 p_0 A_6 + (5 \cdot 4 \cdot 3 p_1 + 5 \cdot 4 q_0) A_5 + (4 \cdot 3 \cdot 2 p_2 + 4 \cdot 3 q_1 + 4 r_0) A_4 \\ & + (3 \cdot 2 p_3 + 3 \cdot 2 q_2 + 3 r_1 + s_0) A_3 + (2 q_3 + 2 r_2 + s_1) A_2 \\ & + (r_3 + s_2) A_1 + s_3 A_0 = 0 \\ (\rho-a_0)^4 & 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 A_8 + 7 \cdot 6 \cdot 5 p_0 A_7 + (6 \cdot 5 \cdot 4 p_1 + 6 \cdot 5 q_0) A_6 + (5 \cdot 4 \cdot 3 p_2 + 5 \cdot 4 q_1 + 5 r_0) A_5 \\ & + (4 \cdot 3 \cdot 2 p_3 + 4 \cdot 3 q_2 + 4 r_1 + s_0) A_4 + (3 \cdot 2 p_4 + 3 \cdot 2 q_3 + 3 r_2 + s_1) A_3 \\ & + (2 q_4 + 2 r_3 + s_2) A_2 + (r_4 + s_3) A_1 + s_4 A_0 = 0 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

$(\rho-a_0)$  の係数を0におく上式において  $A_0, A_1, A_2$  および  $A_3$  を任意に与えると式(16)の第一式から  $A_4$  がきまり、 $A_4$  がきまると第二の式から  $A_5$  が求められる。以下順次にこのようにしてすべての係数が決定される。こうして得られた解は未定係数  $A_0, A_1, A_2, A_3$  をふくむがこれらは任意定数の役割を果たすものである。こうして得られた級数の収束域は  $\rho=a_0$  を中心として描いた円の中で  $\rho=a_0$  に最も近い  $p(\rho)$ ,  $q(\rho)$ ,  $r(\rho)$ ,  $s(\rho)$  のいずれか一つの特異点を円周上にもつような円の内部

となる。いま正則点  $\rho=a_0$  の付近において解を求めるには、それが Taylor 展開により  $(\rho-a_0)$  のべき級数に次のように表わされるとする。

$$w_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\rho-a_0)^n \dots (13)$$

$p(\rho)$ ,  $q(\rho)$ ,  $r(\rho)$ ,  $s(\rho)$  も正則関数であるので Taylor の定理により  $(\rho-a_0)$  のべきに展開できる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} p(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n (\rho-a_0)^n \\ q(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_n (\rho-a_0)^n \\ r(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n (\rho-a_0)^n \\ s(\rho) &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n (\rho-a_0)^n \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

$a_0$  に最も近い特異点を  $a_s$  とすると式(13)および式(14)の級数は  $|\rho-a_0| < |a_s-a_0|$  で収束する。式(13)とその導関数を式(12)に代入し式(14)を考慮すると

$$\begin{aligned} & \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) A_n (\rho-a_0)^{n-4} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} p_n (\rho-a_0)^n \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) A_n (\rho-a_0)^{n-3} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} q_n (\rho-a_0)^n \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n (\rho-a_0)^{n-2} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} r_n (\rho-a_0)^n \sum_{n=1}^{\infty} n A_n (\rho-a_0)^{n-1} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} s_n (\rho-a_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\rho-a_0)^n = 0 \dots (15) \end{aligned}$$

が得られる。ここでべき級数の掛算を実行し、同類項をまとめ  $(\rho-a_0)$  の各べき項の係数をそれぞれ0に等しいとおけば次の連立方程式が得られる。

にわたっている。実際にこれらの解を求めるため  $w$  の第一の解に対しては  $A_0=1, A_1=A_2=A_3=0$ , 第二の解に対しては  $A_1=1, A_0=A_2=A_3=0$ , 第三に對し  $A_0=A_1=A_3=0, A_2=1$ , 第四のものには  $A_0=A_1=A_2=0, A_3=1$  とすればよい。これらの条件は

$$\left. \begin{aligned} w_1|_{\rho=0} &= 1, w_1'|_{\rho=0} = 0, w_1''|_{\rho=0} = 0, w_1'''|_{\rho=0} = 0 \\ w_2|_{\rho=0} &= 0, w_2'|_{\rho=0} = 1, w_2''|_{\rho=0} = 0, w_2'''|_{\rho=0} = 0 \\ w_3|_{\rho=0} &= 0, w_3'|_{\rho=0} = 0, w_3''|_{\rho=0} = 1, w_3'''|_{\rho=0} = 0 \\ w_4|_{\rho=0} &= 0, w_4'|_{\rho=0} = 0, w_4''|_{\rho=0} = 0, w_4'''|_{\rho=0} = 1 \end{aligned} \right\} (17)$$

を意味している。微分方程式 (12) の解はこれらの一次結合となり  $C_1, C_2, C_3, C_4$  を未定係数とすると

$$w_0 = C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3 + C_4 w_4 \dots\dots\dots (18)$$

となり  $A_n$  を決定すると結局次のようになる。すなわち

$$\begin{aligned} w_0 = & C_1 \left\{ 1 - \left[ \frac{s_0}{4 \cdot 3 \cdot 2} \right] (\rho - a_0)^4 + \left[ \frac{p_0 s_0 - s_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \right] (\rho - a_0)^5 + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \left[ -s_2 + \frac{p_0}{2} s_1 + \left( \frac{q_0}{2} + p_1 + \frac{p_0^2}{2} \right) s_0 \right] (\rho - a_0)^6 + \dots \right\} \\ & + C_2 \left\{ (\rho - a_0) - \left[ \frac{r_0}{4 \cdot 3 \cdot 2} \right] (\rho - a_0)^4 + \left[ \frac{p_0 r_0 - r_1 - s_0}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} \right] (\rho - a_0)^5 + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} \left[ -r_2 + \frac{p_0 r_1}{2} + \left( \frac{q_0}{2} + p_1 - \frac{p_0^2}{2} \right) r_0 \right. \right. \\ & \left. \left. + s_1 + \frac{p_0 s_0}{2} \right] (\rho - a_0)^6 + \dots \right\} \\ & + C_3 \left\{ (\rho - a_0)^2 - \left[ \frac{q_0}{4 \cdot 3} \right] (\rho - a_0)^4 + \left[ \frac{p_0 q_0 - q_1 - r_0}{5 \cdot 4 \cdot 3} \right] (\rho - a_0)^5 + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} [p_0 q_1 - p_0^2 q_0 + p_0 r_0 + 2 q_0 p_1 \right. \\ & \left. + q_0^2 - 2 q_2 - 2 r_1 - s_0] (\rho - a_0)^6 + \dots \right\} \\ & + C_4 \left\{ (\rho - a_0)^3 - \frac{p_0}{4} (\rho - a_0)^4 + \left[ \frac{p_0^2 - p_1}{5 \cdot 4} \right] (\rho - a_0)^5 + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} [-p_0^3 + 3 p_0 p_1 + q_0 p_0 - 2 p_2 - 2 q_1 + r_0] \right. \\ & \left. \times (\rho - a_0)^6 + \dots \right\} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$C_1, C_2, C_3$  および  $C_4$  は 2 つの円弧辺の境界条件から決定される任意定数である。

(2) 微分方程式 (9) の特解

式 (6) の右辺を

$$\frac{S\{p(r, \theta)\} b^4}{N_{r_0}(\alpha_0 r^m + \alpha_1 r^{m-1} + \dots + \alpha_m)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (\rho - a_0)^n \dots\dots\dots (20)$$

とべき級数に展開すると特解  $w_p$  は式 (16) の関係式の右辺を 0 の代わりに  $B_n (\rho - a_0)^n$  の係数  $B_n$  を代入し  $A_0 = A_1 = A_2 = A_3 = 0$  とおくことによって  $w_p$  の係数  $A_n$  の関係式が得られる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} (\rho - a_0)^0 & \left\{ \begin{aligned} 4 \cdot 3 \cdot 2 A_4 &= B_0 \\ 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 A_5 + 4 \cdot 3 \cdot 2 p_0 A_4 &= B_1 \\ 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 A_6 + 5 \cdot 4 \cdot 3 A_5 + [4 \cdot 3 \cdot 2 p_1 + 4 \cdot 3 q_0] A_4 &= B_2 \\ 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 A_7 + 6 \cdot 5 \cdot 4 p_0 A_6 + [5 \cdot 4 \cdot 3 p_1 + 5 \cdot 4 q_0] A_5 + [4 \cdot 3 \cdot 2 p_2 + 4 \cdot 3 q_1 + 4 r_0] A_4 &= B_3 \\ 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 A_8 + 7 \cdot 6 \cdot 5 p_0 A_7 + [6 \cdot 5 \cdot 4 p_1 + 6 \cdot 5 q_0] A_6 + [5 \cdot 4 \cdot 3 p_2 + 5 \cdot 4 q_1 + 5 r_0] A_5 \\ &+ [4 \cdot 3 \cdot 2 p_3 + 4 \cdot 3 q_2 + 4 r_1 + s_0] A_4 = B_4 \end{aligned} \right. \dots\dots (21) \end{aligned} \right\}$$

この関係式より  $A_n$  を求めると特解  $w_p$  は次のようになる。

$$w_p = \frac{B_0}{4 \cdot 3 \cdot 2} (\rho - a_0)^4 + \frac{(B_1 - p_0 B_0)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} (\rho - a_0)^5 + \left[ B_2 - \frac{p_0}{2} B_1 + \left( \frac{p_0^2}{2} - p_1 - \frac{q_0}{2} \right) B_0 \right] \frac{(\rho - a_0)^6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3} + \dots\dots\dots (22)$$

したがって微分方程式の解は  $w_0 + w_p$  で得られ、この級数は  $|\rho - a_0| < |\rho - a_1|$  で収束する級数である。

4. 正則特異点  $a$  の付近の解

(1) 同次微分方程式の場合 (右辺=0)

微分方程式は

$$\frac{d^4 w_s}{d \rho^4} + \frac{p(\rho - a)}{(\rho - a)} \frac{d^3 w_s}{d \rho^3} + \frac{q(\rho - a)}{(\rho - a)^2} \frac{d^2 w_s}{d \rho^2} + \frac{r(\rho - a)}{(\rho - a)^3} \frac{d w_s}{d \rho} + \frac{s(\rho - a)}{(\rho - a)^4} w_s = 0 \dots\dots\dots (23)$$

となる。式中の  $w_s$  および  $w_s$  の導関数の係数の中の  $p(\rho - a)$ ,  $q(\rho - a)$ ,  $r(\rho - a)$  および  $s(\rho - a)$  は  $\rho = a$  の付近で正則関数であるから Taylor の定理により

$$\left. \begin{aligned} p(\rho - a) &= \frac{P(\rho)}{\rho[(\rho - a_1)(\rho - a_2) \dots (\rho - a_{i-1})(\rho - a_{i+1}) \dots (\rho - a_m)]} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (\rho - a)^n \\ q(\rho - a) &= \frac{Q(\rho)}{\rho^2(\rho - a_1)^2(\rho - a_2)^2 \dots (\rho - a_{i-1})^2(\rho - a_{i+1})^2 \dots (\rho - a_m)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (\rho - a)^n \\ r(\rho - a) &= \frac{(\rho - a_i) R(\rho)}{\rho^2(\rho - a_1)^2(\rho - a_2)^2 \dots (\rho - a_{i-1})^2(\rho - a_{i+1})^2 \dots (\rho - a_m)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r_n (\rho - a)^n \\ s(\rho - a) &= \frac{(\rho - a_i) S(\rho)}{\rho^2(\rho - a_1)^2 \dots (\rho - a_{i-1})^2(\rho - a_{i+1})^2 \dots (\rho - a_m)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} s_n (\rho - a)^n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

というある収束円を有する無限級数に展開することができ、 $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n, q_0, q_1, \dots, q_n, r_0, r_1, \dots, r_n, s_0, s_1, \dots, s_n$  は定数である。なお (24) 式中は  $a = a_i$  をとって考えた。

数を考える。

$$w_s = (\rho - a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\rho - a)^n \dots\dots\dots (25)$$

いま式 (23) の解として次のような Frobenius の級数  $\lambda$  および  $A_n$  なる定数を基本微分方程式 (23) (あるいは式 (10) の同次方程式) を満足するように決めれば

よい。すなわち、式 (25) を式 (23) に代入すると

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda+n)(\lambda+n-1)(\lambda+n-2)(\lambda+n-3)(\rho-a)^{n+\lambda-4} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho-a)^{n-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda+n)(\lambda+n-1)(\lambda+n-2)(\rho-a)^{\lambda+n-3} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} q_n(\rho-a)^{n-2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda+n)(\lambda+n-1)(\rho-a)^{\lambda+n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} r_n(\rho-a)^{n-3} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda+n)(\rho-a)^{\lambda+n-1} \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} s_n(\rho-a)^{n-4} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho-a)^{\lambda+n} = 0 \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

が得られる。ここでベキ級数の掛算を行ない、 $(\rho-a)$  の昇ベキの順にならべその各ベキの係数を 0 とおくと次の関係式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} A_0 \phi(\lambda) &= 0 \\ A_1 \phi(\lambda+1) + A_0 \phi_1(\lambda) &= 0 \\ A_2 \phi(\lambda+2) + A_1 \phi_1(\lambda+1) + A_0 \phi_2(\lambda) &= 0 \\ A_3 \phi(\lambda+3) + A_2 \phi_1(\lambda+2) + A_1 \phi_2(\lambda+1) \\ &+ A_0 \phi_3(\lambda) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ A_n \phi(\lambda+n) + A_{n-1} \phi_1(\lambda+n-1) + \dots\dots \\ &+ A_1 \phi_{n-1}(\lambda+1) + A_0 \phi_n(\lambda) = 0 \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{-\phi_1(\lambda)}{\phi(\lambda+1)} \\ A_2 &= \frac{\phi_1(\lambda)\phi_1(\lambda+1) - \phi_2(\lambda)\phi(\lambda+1)}{\phi(\lambda+1)\phi(\lambda+2)} = \frac{f_2(\lambda)}{\phi(\lambda+1)\phi(\lambda+2)} \\ A_3 &= \frac{-[\phi_1(\lambda)\phi_1(\lambda+1)\phi_1(\lambda+2) - \phi_2(\lambda)\phi(\lambda+1)\phi_1(\lambda+2) - \phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda+1)\phi(\lambda+2) + \phi_3(\lambda)\phi(\lambda+1)\phi(\lambda+2)]}{\phi(\lambda+1)\phi(\lambda+2)\phi(\lambda+3)} \\ &= \frac{-f_2(\lambda)\phi_1(\lambda+2) + \phi_1(\lambda)\phi_2(\lambda+1)\phi(\lambda+2) - \phi_3(\lambda)\phi(\lambda+1)\phi(\lambda+2)}{\phi(\lambda+1)\phi(\lambda+2)\phi(\lambda+3)} \\ A_4 &= \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

このようにして得られた  $A_n$  の値を一般に  $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}, A_n^{(3)}, A_n^{(4)}$  と表わす。ただし、いずれの根に対しても  $\phi(\lambda+n)$  が  $n=1, 2, \dots$  のときに 0 でない場合である。すなわち 4 つの指数のうちそれぞれの差が 0 または整数でないときは、係数  $A_1, A_2 \dots$  が一義的に求まり式 (23) の解として

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= (\rho-a)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)}(\rho-a)^n \\ w_2 &= (\rho-a)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)}(\rho-a)^n \\ w_3 &= (\rho-a)^{\lambda_3} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(3)}(\rho-a)^n \\ w_4 &= (\rho-a)^{\lambda_4} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(4)}(\rho-a)^n \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

をうる。これらの級数は  $a$  に最も近い他の正則特異点を  $a_1$  とすると  $|\rho-a| < |\rho-a_1|$  で収束するとともに原微分方程式を満足する。一般解はこれにそれぞれ 4 個の任意定数をかけて加え合せて得ることができる。

上の場合、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  および  $\lambda_4$  が全部互いの差が 0 または整数差でないときに限り成り立つものである。4 つの

$$\left. \begin{aligned} \phi(\lambda) &= \lambda^4 + (p_0+6)\lambda^3 + (11-3p_0+q_0)\lambda^2 \\ &+ (2p_0-q_0+r_0-6)\lambda + s_0 \\ \phi_m(\lambda) &= \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)p_m + \lambda(\lambda-1)q_m \\ &+ r_m\lambda + s_m \quad (m=1, 2, \dots) \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

$$\left. \begin{aligned} A_0 \neq 0 \text{ とすると式 (27) の第一の式から} \\ \phi(\lambda) &= \lambda^4 + (p_0+6)\lambda^3 + (11-3p_0+q_0)\lambda^2 \\ &+ (2p_0-q_0+r_0-6)\lambda + s_0 = 0 \dots\dots\dots (29) \end{aligned} \right\}$$

が得られ、これが微分方程式(23)の指数を決定する式でありその根が  $\rho=a$  における式 (23) の指数となる。その 4 個の指数を  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  とすると式 (27) の第二項以下の式によって 4 個の  $\lambda$  のおのおのに対し  $A_1 A_2 \dots A_n$  がべつべつに求まる。いまある指数  $\lambda$  に対して  $A_1, A_2, \dots$  を式 (27) から求めてみると次のようになる。

$\lambda$  の中に複根、重根がふくまれている場合、あるいは互に整数値だけの差を有するものがいく組か存在するとき、またはそれらの組合わされた場合には一つの解は上の式 (25) のような形で求めることができる。第二、第三、第四の解を求めるためにはさらに吟味しなければならない。

もし等根、重根の場合、たとえば  $\lambda_1 = \lambda_2$  であれば解は  $w = (\rho-a)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho-a)^n$  の形に通じしか求まらない。また  $\lambda_1, \lambda_2$  の差が整数であるような場合もやはり求められない。なぜならば式 (27) において  $A_n$  の係数は

$$\begin{aligned} & (\lambda+n)(\lambda+n-1)(\lambda+n-2)(\lambda+n-3) \\ & + (\lambda+n)(\lambda+n-1)(\lambda+n-2)p_0 \\ & + (\lambda+n)(\lambda+n-1)q_0 + (\lambda+n)r_0 + s_0 \end{aligned}$$

であるから  $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$  とおいたとき  $n=1, 2, 3, 4$  のいずれに対してもこれが 0 になることがなければ  $A_1, A_2 \dots$  が順次求められるわけであるが、もし 0 になれば求められなくなる。 $\lambda_1 = \lambda_2 + m (m=1, 2, \dots)$  の場合には  $\lambda = \lambda_2$  を代入すると  $n=m$  のときは上式は

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_2+m)(\lambda_2+m-1)(\lambda_2+m-2)(\lambda_2+m-3) \\
 & + (\lambda_2+m)(\lambda_2+m-1)(\lambda_2+m-2)p_0 \\
 & + (\lambda_2+m)(\lambda_2+m-1)q_0 + (\lambda_2+m)r_0 + s_0 \\
 & = \lambda_1(\lambda_1-1)(\lambda_1-2)(\lambda_1-3) + p_0\lambda_1(\lambda_1-1)(\lambda_1-2) \\
 & + q_0\lambda_1(\lambda_1-1) + r_0\lambda_1 + s_0 = 0
 \end{aligned}$$

となって消える。したがってこの場合には一般に解が得られない。しかし  $\lambda = \lambda_1$  に対しては上式は 0 になることはないから解が得られるのである。この2つの場合について第二、第三の解を求めたのであるが、いまこの組み合わせの例として

**a)**  $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 \neq \lambda_4, \lambda_3 \neq \lambda_4 + m$  ( $m$  は正または負の整数)

**b)**  $\lambda_1 = \lambda_2 + m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ),  $\lambda_3 \neq \lambda_4, \lambda_3 \neq \lambda_4 + m$   
 の2つの場合をとりあげて考えてみよう。そのほかにも組み合わせは種々できるが、いずれの場合もこの **a)**, **b)** の場合の考え方を進めれば4つの解を求めることができる。

**a)**  $\lambda_1 = \lambda_2, \lambda_3 \neq \lambda_4, \lambda_3 \neq \lambda_4 + m$  の場合  $\lambda_3, \lambda_4$  に対しては前述のように  $w = (\rho - a)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho - a)^n$  の形のものが2つ得られる。また  $\lambda_1, \lambda_2$  の中の1つに対しても同様の形で得られる。そこでもう1つの第二の解を求めるには式 (27) において第一のもの、すなわち指数決定方程式は除外し第二式以下の方程式を満足させるように

$$\begin{aligned}
 \left[ \frac{\partial w(\lambda, \rho)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_1} &= \left[ \frac{\partial (\rho - a)^{\lambda}}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda_1)(\rho - a)^n + (\rho - a)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial A_n(\lambda)}{\partial \lambda} (\rho - a)^n \\
 &= (\rho - a)^{\lambda_1} \log(\rho - a) \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda_1)(\rho - a)^n + (\rho - a)^{\lambda_1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n'(\lambda_1)(\rho - a)^n \dots \dots \dots (37)
 \end{aligned}$$

となる。したがって第二の解  $w_2$  は

$$\begin{aligned}
 w_2 &= \log(\rho - a) \{ (\rho - a)^{\lambda_1} + A_1(\lambda_1)(\rho - a)^{\lambda_1+1} + A_2(\lambda_1)(\rho - a)^{\lambda_1+2} + A_3(\lambda_1)(\rho - a)^{\lambda_1+3} + \dots \} \\
 &+ \left\{ (\rho - a)^{\lambda_1} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (A_0) \right]_{\lambda=\lambda_1} + (\rho - a)^{\lambda_1+1} \left[ \frac{\partial A_1}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_1} + (\rho - a)^{\lambda_1+2} \left[ \frac{\partial A_2}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_1} + \dots \right\} \\
 &= \log(\rho - a) \left\{ (\rho - a)^{\lambda_1} + \frac{-\phi_1(\lambda_1)}{\phi(\lambda_1+1)} (\rho - a)^{\lambda_1+1} + \frac{\phi_1(\lambda_1)\phi_1(\lambda_1+1) - \phi_2(\lambda_1)\phi(\lambda_1+1)}{\phi(\lambda_1+1)\phi(\lambda_1+2)} (\rho - a)^{\lambda_1+2} + \dots \right\} \\
 &+ \left\{ (\rho - a)^{\lambda_1+1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{-\phi_1(\lambda)}{\phi(\lambda+1)} \right]_{\lambda=\lambda_1} + (\rho - a)^{\lambda_1+2} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{\phi_1(\lambda)\phi_1(\lambda+1) - \phi_2(\lambda)\phi(\lambda+1)}{\phi(\lambda+1)\phi(\lambda+2)} \right]_{\lambda=\lambda_1} + \dots \right\} \dots (38)
 \end{aligned}$$

となる。結局一般解  $w$  は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 w &= C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3 + C_4 w_4 \\
 &= C_1 \left\{ (\rho - a)^{\lambda_1} + \frac{-\phi_1(\lambda_1)}{\lambda(\lambda_1+1)} (\rho - a)^{\lambda_1+1} + \frac{\phi_1(\lambda_1)\phi_1(\lambda_1+1) - \phi_2(\lambda_1)\phi(\lambda_1+1)}{\phi(\lambda_1+1)\phi(\lambda_1+2)} (\rho - a)^{\lambda_1+2} + \dots \right\} \\
 &+ C_2 \left\{ w_1 \log(\rho - a) + (\rho - a)^{\lambda_1+1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{-\phi_1(\lambda)}{\phi(\lambda+1)} \right]_{\lambda=\lambda_1} \right. \\
 &\left. + (\rho - a)^{\lambda_1+1} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{\phi_1(\lambda)\phi_1(\lambda+1) - \phi_2(\lambda)\phi(\lambda+1)}{\phi(\lambda+1)\phi(\lambda+2)} \right]_{\lambda=\lambda_1} + \dots + C_3 w_3 + C_4 w_4 \dots \dots \dots (39)
 \end{aligned}$$

この  $w$  は  $|\rho - a| < |a_1 - a|$  にて収束する正則関数である。

**b)**  $\lambda_1 = \lambda_2 + m, \lambda_3 \neq \lambda_4, \lambda_3 \neq \lambda_4 + m$  の場合  $\lambda_2 < \lambda_1$  であるとする。この場合に指数  $\lambda_1$  に対する解  $w_1$  は  $w_1 = (\rho - a)^{\lambda_1} \sum A_n(\rho - a)^n$  の形で求められることは **a)** のときと同じである。第二の解  $w_2$  を求めるため、 $\lambda$  を未定

$A_1, A_2, \dots$  を決める。この場合には式 (27) の右辺は全部 0 とならず  $n=0$  の項のみが残ることになる。いま

$$\begin{aligned}
 L[w] &= \frac{d^4 w_s}{d \rho^4} + \frac{p(\rho - a)}{(\rho - a)} \frac{d^3 w_s}{d \rho^3} + \frac{q(\rho - a)}{(\rho - a)^2} \frac{d^2 w_s}{d \rho^2} \\
 &+ \frac{r(\rho - a)}{(\rho - a)^3} \frac{d w_s}{d \rho} + \frac{s(\rho - a)}{(\rho - a)^4} w_s \dots \dots \dots (32)
 \end{aligned}$$

と記すと、これに

$$w_s = (\rho - a)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda)(\rho - a)^n \dots \dots \dots (33)$$

を代入すると

$$\begin{aligned}
 L[w(\lambda, \rho)] &= (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda^2 + b_1\lambda + b_2) A_0(\rho - a)^{\lambda-4} \\
 &= (\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda^2 + b_1\lambda + b_2) A_0(\rho - a)^{\lambda-4} \dots (34)
 \end{aligned}$$

となる。 $b_1, b_2$  は定数である。次にこの式を  $\lambda$  に関して微分して  $d/d\rho$  と  $\partial/\partial\lambda$  とを交換すると

$$\begin{aligned}
 L \left[ \frac{\partial w(\lambda, \rho)}{\partial \lambda} \right] &= \frac{\partial}{\partial \lambda} [(\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda^2 + b_1\lambda + b_2) \\
 &\times A_0(\rho - a)^{\lambda-4}] + [(\lambda - \lambda_1)^2 (\lambda^2 + b_1\lambda + b_2) \\
 &\times A_0 \frac{\partial}{\partial \lambda} (\rho - a)^{\lambda-4} \dots \dots \dots (35)
 \end{aligned}$$

となり  $\lambda = \lambda_1$  とおくと右辺は 0 となる。したがって

$$L \left[ \left( \frac{\partial w(\lambda, \rho)}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_1} \right] = 0 \dots \dots \dots (36)$$

となり、これは  $(\partial w(\lambda, \rho) / \partial \lambda)_{\lambda=\lambda_1}$  が解であることを示すものである。したがってこれを第二の解とし、さらに式 (33) から計算すると

としたまま

$$A_0 = C(\lambda) \cdot \phi(\lambda+1)\phi(\lambda+2) \dots \phi(\lambda+n) \dots (40)$$

とおく。ここに  $C(\lambda)$  は任意にきめた関数である。このようにきめた  $A_0$  から出発し式 (27) の第2式から  $A_1$  を、第2式から  $A_2$  を……と順次に決定していく。そうすると  $A_1, A_2, \dots$  には  $\phi(\lambda+1), \phi(\lambda+2), \dots$

$\phi(\lambda+n)$  のどれも分母とならないから、ここで **a)** と同様に

$$L[w(\lambda, \rho)] = A_0 \phi(\lambda) (\rho - a)^{\lambda-4} = C(\lambda) \phi(\lambda) \phi(\lambda+1) \phi(\lambda+2) \dots \phi(\lambda+n) (\rho - a)^{\lambda-4} \dots \dots \dots (41)$$

なる関係が成り立つ。 $\lambda_2$  と  $\lambda_2+m$  が方程式

$$\phi(\lambda) = 0$$

の根であるからには

$$\phi(\lambda) = (\lambda - \lambda_2) [\lambda - (\lambda_2 + m)] (\lambda - \lambda_3) (\lambda - \lambda_4)$$

であるにちがいない。したがって

$$\phi(\lambda + m) = (\lambda + m - \lambda_2)$$

$$\cdot (\lambda - \lambda_2) (\lambda + m - \lambda_3) (\lambda + m - \lambda_4)$$

である。ゆえに関係式 (27) の右辺には  $(\lambda - \lambda_2)^2$  なる係

$$w_2 = \left[ \frac{\partial(\lambda - \lambda_2)w}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ (\rho - a)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_2) \cdot A_n(\lambda) (\rho - a)^n \right]_{\lambda=\lambda_2} \\ = \left[ \frac{\partial(\rho - a)^{\lambda}}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_2) A_n(\lambda)]_{\lambda=\lambda_2} (\rho - a)^n + (\rho - a)^{\lambda_2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial(\lambda - \lambda_2) A_n(\lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_2} (\rho - a)^n \\ = (\rho - a)^{\lambda_2} \log(\rho - a) \sum_{n=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_2) A_n(\lambda)]_{\lambda=\lambda_2} (\rho - a)^n + (\rho - a)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial(\lambda - \lambda_2) A_n(\lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_2} (\rho - a)^n \quad (42)^*$$

したがって  $w_s$  は

$$w_s = C_1 w_1 + C_2 w_2 + C_3 w_3 + C_4 w_4 \\ = C_1 \left\{ (\rho - a)^{\lambda_1} + \frac{-\phi_1(\lambda_1)}{\phi(\lambda_1+1)} (\rho - a)^{\lambda_1+1} + \frac{\phi_1(\lambda_1)\phi_1(\lambda_1+1) - \phi_2(\lambda_1)\phi(\lambda_1+1)}{\phi(\lambda_1+1)\phi(\lambda_1+2)} (\rho - a)^{\lambda_1+2} + \dots \right\} \\ + C_2 (\rho - a)^{\lambda_2} \cdot \log(\rho - a) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} [(\lambda - \lambda_2) A_n(\lambda)]_{\lambda=\lambda_2} (\rho - a)^n + (\rho - a)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\partial(\lambda - \lambda_2) A_n(\lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_2} (\rho - a)^n + \dots \left\} \\ + C_3 (\rho - a)^{\lambda_3} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(3)} (\rho - a)^n + C_4 (\rho - a)^{\lambda_4} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(4)} (\rho - a)^n \dots \dots \dots (43)$$

となる。

以上 **a)**, **b)** の二つの場合を考えてきたが、もし根  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  の中に多重根がふくまれていたり、または整数値だけの差を有するものが2個以上存在するときには一般に  $\log(\rho - a)$  の多項式の形の解、すなわち  $[\log(\rho - a)]^2$  とか  $[\log(\rho - a)]^3$  などをふくんだ解が得られる。これは上の2つの場合の考え方を進めていけばよいのでここでは省略する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda+n)(\lambda+n-1)(\lambda+n-2)(\lambda+n-3) A_n (\rho - a)^{n-4} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n (\rho - a)^{n-1} \sum A_n (\lambda+n)(\lambda+n-1)(\lambda+n-2) (\rho - a)^{n-3} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} q_n (\rho - a)^{n-2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\lambda+n)(\lambda+n-1) (\rho - a)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} r_n (\rho - a)^{n-3} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\lambda+n) (\rho - a)^{n-1} \\ + \sum_{n=0}^{\infty} s_n (\rho - a)^{n-4} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\rho - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (\rho - a)^{n-4} \dots \dots \dots (45)$$

両辺の  $(\rho - a)$  の指数を比較すると  $\lambda=0$  であり、係数を比較すると次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} (\rho - a)^{-4} \\ (\rho - a)^{-3} \\ (\rho - a)^{-2} \\ (\rho - a)^{-1} \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} A_0 \phi(0) = B_0 \\ A_1 \phi(1) + A_0 \phi_1(0) = B_1 \\ A_2 \phi(2) + A_1 \phi_1(1) + A_0 \phi_2(0) = B_2 \\ A_3 \phi(3) + A_2 \phi_1(2) + A_1 \phi_2(1) + A_0 \phi_3(0) = B_3 \\ \vdots \end{array} \quad (46)$$

これらの式から  $A_n$  を順次求めてゆくと、結局、特解  $w_p$  は

数がふくまれている。

第二の解を求めるため **a)** の式(33)と同様に  $w(\lambda, \rho)$  を考えると

$$L[w(\lambda, \rho)] = A_0 (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2) (\lambda^2 + b_1 \lambda + b_2) (\rho - a)^{\lambda-4}$$

となる。この両辺に  $(\lambda - \lambda_2)$  をかけると

$$L[(\lambda - \lambda_2)w(\lambda, \rho)] = A_0 (\lambda - \lambda_1) (\lambda - \lambda_2)^2 (\lambda^2 + b_1 \lambda + b_2) (\rho - a)^{\lambda-4}$$

となり、これを  $\lambda$  で微分して  $\lambda = \lambda_2$  とおけば

$$L \left[ \left( \frac{\partial(\lambda - \lambda_2)w}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_2} \right] = 0$$

が得られる。すなわち  $(\partial(\lambda - \lambda_2)w/\partial \lambda)_{\lambda=\lambda_2}$  は解である。

実際に計算を行なって求めてみると

(2) 微分方程式の特解

次に式 (10) の特解を求めるために、右辺の  $1/(\rho - a)^3$  の係数を  $\rho = a$  で Taylor 展開すると

$$\frac{S\{p(r, \theta)\} b^4}{N r_0 (\rho - a_1)^3 \dots (\rho - a_{i-1})^3 (\rho - a_{i+1})^3 \dots (\rho - a_m)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n (\rho - a)^n \dots \dots \dots (44)$$

となる。特解  $w_p = (\rho - a)^{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\rho - a)^n$  として式 (12) に代入すると次の式が得られる。

\* この式の第二項は  $\phi(\lambda+n)$  が  $\lambda = \lambda_2$  のとき  $n=m$  において0になり  $A_n$  の分母が0となって有限の  $A_n$  は求まらず、したがって  $A_n$  以下  $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$  も求まらない。しかし、いまは  $(\lambda - \lambda_2)w$  を考えているのであるから  $(\lambda - \lambda_2)A_n(\lambda)$  については  $n \geq m$  のとき  $\lambda \rightarrow \lambda_2$  で確定した値をとり  $n < m$  に対しては0となる。

$$w_p = \frac{B_0}{\phi(0)} + \frac{B_1 \phi(0) - B_0 \phi_1(0)}{\phi(0)\phi(1)}(\rho - a) + \frac{B_0 \phi_1(0)\phi_1(1) - B_0 \phi_2(0)\phi(1) - B_1 \phi(0)\phi_1(1) + B_2 \phi(0)\phi(1)}{\phi(0)\phi(1)\phi(2)}(\rho - a)^2 + \dots \dots \dots (47)$$

となり  $|\rho - a| < |a_1 - a|$  で収束する級数である。非同次方程式の解  $w$  は  $w = w_0 + w_p$  で得ることができる。

5.  $\rho = \infty$  の付近における吟味

3. および 4. において正則特異点が有限の場所にある場合について述べたが、 $\rho$  が大きな値(無限大)をとる場所について調べるためには

$$\frac{d^4 w_s}{d\rho^4} + p(\rho) \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} + q(\rho) \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + r(\rho) \frac{d w_s}{d\rho} + s(\rho) w_s = \xi^{\nu} \left\{ \frac{d^4 w_s}{d\xi^4} + \left[ \frac{12}{\xi} - \frac{1}{\xi^2} p\left(\frac{1}{\xi}\right) \right] \frac{d^3 w_s}{d\xi^3} + \left[ \frac{36}{\xi^2} - \frac{1}{\xi^3} p\left(\frac{1}{\xi}\right) + \frac{1}{\xi^4} q\left(\frac{1}{\xi}\right) \right] \frac{d^2 w_s}{d\xi^2} + \left[ -\frac{24}{\xi^3} - \frac{6}{\xi^4} p\left(\frac{1}{\xi}\right) + \frac{2}{\xi^5} q\left(\frac{1}{\xi}\right) - \frac{1}{\xi^6} r\left(\frac{1}{\xi}\right) \right] \frac{d w_s}{d\xi} + \frac{1}{\xi^6} s\left(\frac{1}{\xi}\right) w_s \right\} = 0 \dots \dots \dots (48)$$

この式より  $\rho = \infty$  が正則点であるためには  $12\rho - \rho^2 p(\rho)$ ,  $36\rho^2 - \rho^3 p(\rho) + \rho^4 q(\rho)$ ,  $-24\rho^3 - 6\rho^4 p(\rho) + 2\rho^5 q(\rho) - \rho^6 r(\rho)$ , および  $s(\rho)$  が  $\rho = \infty$  において正則な関係であることを要し、また  $\rho = \infty$  が正則特異点であるためには  $\rho p(\rho)$ ,  $\rho p(\rho) + \rho^2 q(\rho)$ ,  $6\rho p(\rho) + 2\rho^2 q(\rho)$

$\rho = 1/\xi$  の変換を行ない  $\rho \rightarrow \infty$  すなわち  $\xi \rightarrow 0$  における性質を調べればよい。式(10)の左辺の各係数はこの場合、いずれも  $\rho$  の正則関数であり、それらは式(12)式における  $p(\rho)$ ,  $q(\rho)$ ,  $r(\rho)$ ,  $s(\rho)$  であり  $\rho = 1/\xi$  に変換した方程式は次のようになる。

$-\rho^3 r(\rho)$ , および  $\rho^4 s(\rho)$  が  $\rho = \infty$  において正則な関数でなければならない。

いま一例として板厚が  $h = h_0(\alpha_1 \rho^2 + \beta_1 \rho + r_1)$  のように放物線的に変化する場合を考えてみると、まずその基本微分方程式は式(3)あるいは式(9)から

$$\frac{d^4 w_s}{d\rho^4} + \frac{2}{\rho} \left[ 1 + \frac{3(2\alpha_1 \rho + \beta_1)\rho}{(\alpha_1 \rho^2 + \beta_1 \rho + r_1)} + \frac{6(5\alpha_1 \rho^2 + 5\alpha_1 \beta_1 \rho + \beta_1^2 + \alpha_1 r_1)\rho^2}{(\alpha_1 \rho^2 + \beta_1 \rho + r_1)^2} \right] \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho^2} \left[ -(2c\beta + c^2) + \frac{3(2 + c^2 \nu_r)(2\alpha_1 \rho + \beta_1)\rho}{(\alpha_1 \rho^2 + \beta_1 \rho + r_1)} + \frac{6(5\alpha_1^2 \rho^2 + 5\alpha_1 \beta_1 \rho + \beta_1^2 + \alpha_1 r_1)\rho^2}{(\alpha_1 \rho^2 + \beta_1 \rho + r_1)^2} \right] \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho^3} \left[ (2c\beta + c^2) - \frac{3(2 + c^2 \nu_r)(2\alpha_1 \rho + \beta_1)\rho}{(\alpha_1 \rho^2 + \beta_1 \rho + r_1)} + \frac{6c^2 \nu_r (5\alpha_1 \rho^2 + 5\alpha_1 \beta_1 \rho + \beta_1^2 + \alpha_1 r_1)\rho^2}{(\alpha_1 \rho^2 + \beta_1 \rho + r_1)} \right] \frac{d w_s}{d\rho} + \frac{\beta^2}{\rho^4} \left[ (c^2 \beta^2 - 2c^2 - 2c) + \frac{3(2c + c^2)(2\alpha_1 \rho + \beta_1)\rho}{(\alpha_1 \rho^2 + \beta_1 \rho + r_1)} - \frac{6c^2 \nu_r (5\alpha_1^2 \rho + 5\alpha_1 \beta_1 \rho + \beta_1^2 + \alpha_1 r_1)\rho^2}{(\alpha_1 \rho^2 + \beta_1 \rho + r_1)^2} \right] w_s = \frac{S\{p(r, \theta)\} b^4}{N_{r0}(\alpha_1 \rho^2 + \beta_1 \rho + r_1)^3} \dots \dots \dots (49)$$

となる。 $\rho = 1/\xi$  と変換すると、結局

$$\frac{d^4 w_s}{d\xi^4} + \frac{1}{\xi} \left[ 10 - \frac{6(2\alpha_1 + \beta_1 \xi)}{\alpha_1 + \beta_1 \xi + r_1 \xi^2} \right] \frac{d^3 w_s}{d\xi^3} + \frac{1}{\xi^2} \left[ 24 - (2c\beta^2 + c^2) + \frac{(6 + 3c^2 \nu_r - 36)(2\alpha_1 + \beta_1 \xi)}{\alpha_1 + \beta_1 \xi + r_1 \xi^2} + \frac{6\{5\alpha_1^2 + 5\alpha_1 \beta_1 \xi + (\beta_1^2 + \alpha_1 r_1)\xi^2\}}{(\alpha_1 + \beta_1 \xi + r_1 \xi^2)^2} \right] \frac{d^2 w_s}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi^3} \left[ 12 - 3(2c\beta^2 + c^2) + \frac{(18 + 9c^2 \nu_r - 36)(2\alpha_1 + \beta_1 \xi)}{\alpha_1 + \beta_1 \xi + r_1 \xi^2} + \frac{(12 - 6c^2 \nu_r)\{5\alpha_1^2 + 5\alpha_1 \beta_1 \xi + (\beta_1^2 + \alpha_1 r_1)\xi^2\}}{(\alpha_1 + \beta_1 \xi + r_1 \xi^2)^2} \right] \frac{d w_s}{d\xi} + \frac{\beta^2}{\xi^4} \left[ (c^2 \beta^2 - 2c^2 - 2c) + \frac{3(2c + c^2)(2\alpha_1 + \beta_1 \xi)}{\alpha_1 + \beta_1 \xi + r_1 \xi^2} - \frac{6c^2 \nu_r \{5\alpha_1^2 + 5\alpha_1 \beta_1 \xi + (\beta_1^2 + \alpha_1 r_1)\xi^2\}}{(\alpha_1 + \beta_1 \xi + r_1 \xi^2)^2} \right] w_s = \frac{S\{p(r, \theta)\} \xi^6}{N_{r0}(\alpha_1 + \beta_1 \xi + r_1 \xi^2)^3} \dots \dots \dots (50)$$

となり前と同様にして式(50)は  $\xi = 0$  すなわち  $\rho = \infty$  において正則点を有することになり、Fuchs型の線形微分方程式となる。3. および 4. と同様にして  $\rho = \infty$  付近の解を求めることができる。

$\theta$ , およびモーメント  $M_{r0}(\rho, \theta)$ , せん断力  $Q_r(\rho, \theta)$ ,  $Q_0(\rho, \theta)$  および反力  $V_r(\rho, \theta)$ ,  $V_0(\rho, \theta)$  はそれぞれ次のように求まる。

6. たわみ、断面力および反力

微分方程式の解として  $w_s$  が以上のようにして得られると、たわみ  $w(\rho, \theta)$ , 曲げモーメント  $M_r(\rho, \theta)$ ,  $M_0(\rho,$

$$w(\rho, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} w_s \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta,$$



$$\left. \begin{aligned} M_r(\rho, \theta) &= -\frac{2}{\alpha b^2} N_r \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + \frac{c^2 \nu_r}{\rho} \left( \frac{d w_s}{d\rho} - \beta^2 \frac{1}{\rho} w_s \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta, \\ M_\theta(\rho, \theta) &= -\frac{2c^2}{\alpha b^2} N_r \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{d w_s}{d\rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2} w_s + \nu_r \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta, \\ M_{r\theta}(\rho, \theta) &= -\frac{2(c-c^2 \nu_r) N_r}{\alpha b^2} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{\beta}{\rho} \frac{d w_s}{d\rho} - \frac{\beta}{\rho^2} w_s \right\} \cos \frac{n\pi}{\alpha} \theta. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_r(\rho, \theta) &= -\frac{2}{\alpha b^3} N_r \sum_{n=1,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} - \frac{[c^2 + \beta^2 c]}{\rho^2} \frac{d w_s}{d\rho} + \frac{\beta^2 (c^2 + c)}{\rho^3} w_s \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \\ &\quad - \frac{2}{\alpha b^2} \frac{d N_r}{d\rho} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + c^2 \nu_r \left( \frac{1}{\rho} \frac{d w_s}{d\rho} - \beta^2 \frac{w_s}{\rho^2} \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \\ Q_\theta(\rho, \theta) &= -\frac{2}{\alpha b^3} N_r \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{c\beta}{\rho} \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + \frac{c^2 \beta^2}{\rho^2} \frac{d w_s}{d\rho} - \frac{\beta^3 c^2}{\rho^3} w_s \right\} \cos \frac{n\pi}{\alpha} \theta \\ &\quad - \frac{(c-c^2 \nu_r) N_r}{\alpha b^3} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{\beta}{\rho} \frac{d w_s}{d\rho} - \frac{\beta}{\rho^2} w_s \right\} \cos \frac{n\pi}{\alpha} \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

$$\left. \begin{aligned} V_r(\rho, \theta) &= -\frac{2 N_r}{\alpha b^3} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} - \frac{[(2c-c^2 \nu_r)\beta^2 + c^2]}{\rho^2} \frac{d w_s}{d\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + \frac{[c^2 + 2c-c^2 \nu_r]\beta^2}{\rho^3} w_s \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \\ &\quad - \frac{2}{\alpha b^2} \frac{d N_r}{d\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} + c^2 \nu_r \left( \frac{1}{\rho} \frac{d w_s}{d\rho} - \beta^2 \frac{w_s}{\rho^2} \right) \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \\ V_\theta(\rho, \theta) &= -\frac{2}{\alpha b^3} N_r \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[2c-c^2 \nu_r]\beta}{\rho} \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + \frac{[c^2 - 2c + 2c^2 \nu_r]\beta}{\rho^2} \frac{d w_s}{d\rho} + \frac{[2(c-c^2 \nu_r)\beta - \beta^3 c^2]}{\rho^3} w_s \right\} \\ &\quad \times \cos \frac{n\pi}{\alpha} \theta - \frac{2(c-c^2 \nu_r) d N_r}{\alpha b^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\beta}{\rho} \frac{d w_s}{d\rho} - \frac{\beta}{\rho^2} w_s \right\} \cos \frac{n\pi}{\alpha} \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

以上の諸式の中には前項までに述べたように  $C_1, C_2, C_3, C_4$  の4個の任意定数をふくむが、それらは2つの円弧辺の境界条件により決定される。

図-2  $\alpha, \beta, \gamma$  の値 (点線は  $h=h_0\rho$  の場合)

7. 境界条件 (図-1 参照)

(1) 円弧辺が固定の場合

$\rho=1$  または  $\rho=k$  において

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial r}=0 \dots\dots\dots (54)$$

(2) 円弧辺が完全自由辺の場合

$\rho=1$  または  $\rho=k$  において

$$\left. \begin{aligned} M_r=0; \quad \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + c^2 \nu_r \left( \frac{1}{\rho} \frac{d w_s}{d\rho} - \beta^2 \frac{w_s}{\rho^2} \right) &= 0 \\ \text{および} \\ V_r=0; \quad \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} + \frac{1}{\rho} \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} - \frac{[2c-c^2 \nu_r]\beta^2 + c^2}{\rho^2} \\ \times \frac{d w_s}{d\rho} + \frac{[c^2 + 2c-c^2 \nu_r]\beta^2}{\rho^3} w_s &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (55)$$

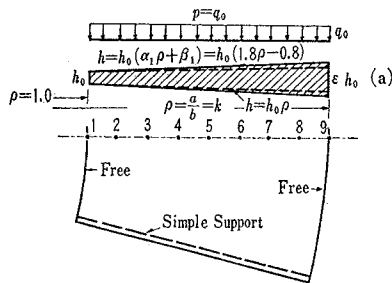
(3) 円弧辺が単純支持辺の場合

$\rho=1$  または  $\rho=k$  において

$$\left. \begin{aligned} w=0 \\ M_r=0; \quad \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + c^2 \nu_r \left( \frac{1}{\rho} \frac{d w_s}{d\rho} - \beta^2 \frac{w_s}{\rho^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

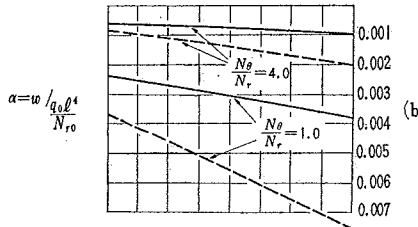
8. 数値計算例

図-2 (a) のように厚さが  $h=h_0(\alpha_1\rho+\beta_1)$  のように直線的に変化する扇形平板を計算例として考える。 $h_0$  は  $\rho=1.0$ , すなわち内側円弧辺における板厚であり、これを基準として  $\rho=(a/b)=k$ , すなわち外側円弧辺にお

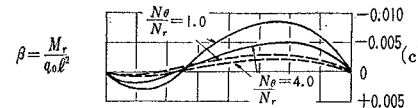


る板厚を  $\epsilon \cdot h_0$  とすると  $\alpha_1$  および  $\beta_1$  は次式で決定される定数となる。

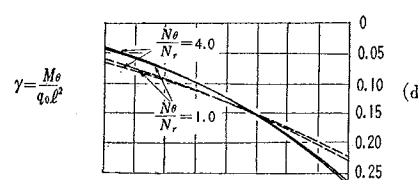
$$\alpha_1 = \frac{\epsilon - 1}{k - 1}, \quad \beta_1 = \frac{k - \epsilon}{k - 1}$$



平面的な形は前論文の計算例の結果と比較を行なう関係から同じものを用いる。



すなわち中心角を  $\alpha=\pi/6$ , 辺比  $l/d=1.0$



( $l$ =中心円弧長,  $d$ =幅員  $=a-b$ ), ポアソン比は0と仮定する。したがって

$k=(a/b)=1.709291$  となり  $\epsilon=2.2767$  とすると  $\alpha_1=1.8, \beta_1=-0.8$  となり  $h=h_0(1.8\rho-0.8)$  なる変厚板となる。

(a) 荷重  $p(r, \theta) = q_0 = \text{const.}$ ; 等分布満載荷重

$$\therefore S\{p(r, \theta)\} = S\{q_0\} = \frac{q_0 [1 - (-1)^n]}{\beta},$$

$$\beta = \frac{n\pi}{\alpha}, \quad n=1, 2, 3, \dots$$

(b) 微分方程式は式(7)であり、右辺の  $S\{p(r, \theta)\}$  に(a)を考慮すればよい。

$$M_r(\rho, \theta) = -\frac{2 N_{r0} (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3}{\alpha b^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\partial^2 w_s}{\partial \rho^2} \cdot \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

$$M_\theta(\rho, \theta) = -\frac{2 c^2 N_{r0} (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3}{\alpha b^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{\partial w_s}{\partial \rho} - \frac{\beta^2}{\rho^2} w_s \right\} \cdot \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

$$M_{r\theta}(\rho, \theta) = -\frac{2 c N_{r0} (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3}{\alpha b^2} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{\beta}{\rho} \frac{d w_s}{d \rho} - \frac{\beta}{\rho^2} w_s \right\} \cdot \cos \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

$$Q_r(\rho, \theta) = -\frac{2 N_{r0} (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3}{\alpha b^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{d^3 w_s}{d \rho^3} + \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{3 \alpha_1}{(\alpha_1 \rho + \beta_1)} \right] \frac{d^2 w_s}{d \rho^2} - \frac{(c^2 + \beta^2 c)}{\rho^2} \frac{d w_s}{d \rho} + \left[ \frac{\beta^2 (c^2 + c)}{\rho^3} \right] w_s \right\} \cdot \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

$$Q_\theta(\rho, \theta) = -\frac{2 N_{r0} (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3}{\alpha b^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{c \beta}{\rho} \frac{d^2 w_s}{d \rho^2} + \left[ \frac{\beta c^2}{\rho^2} + \frac{3 c \beta \alpha_1}{\rho (\alpha_1 \rho + \beta_1)} \right] \frac{d w_s}{d \rho} - \left[ \frac{\beta^3 c^2}{\rho^3} + \frac{3 \beta c \alpha_1}{\rho^2 (\alpha_1 \rho + \beta_1)} \right] w_s \right\} \cos \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

$$V_r(\rho, \theta) = -\frac{2 N_{r0} (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3}{\alpha b^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{d^3 w_s}{d \rho^3} + \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{3 \alpha_1}{(\alpha_1 \rho + \beta_1)} \right] \frac{d^2 w_s}{d \rho^2} - \left[ \frac{2 c \beta^2 + c^2}{\rho^2} \right] \frac{d w_s}{d \rho} + \left[ \frac{\beta^2 (c^2 + 2 c)}{\rho^3} \right] w_s \right\} \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

$$V_\theta(\rho, \theta) = -\frac{2 N_{r0} (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3}{\alpha b^3} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ \frac{2 c \beta}{\rho} \frac{d^2 w_s}{d \rho^2} + \left[ \frac{(c^2 - 2 c) \beta}{\rho^2} + \frac{6 \beta c \alpha_1}{\rho (\alpha_1 \rho + \beta_1)} \right] \frac{d w_s}{d \rho} + \left[ \frac{(2 c \beta - c^2 \beta^3)}{\rho^3} - \frac{6 c \beta \alpha_1}{\rho^2 (\alpha_1 \rho + \beta_1)} \right] w_s \right\} \cos \frac{n\pi}{\alpha} \theta$$

(d) 境界条件式(55)から

- i)  $\rho=1.0$  において  $d^2 w_s / d \rho^2 = 0$
- ii)  $\rho=1.0$  " "

$$\frac{d^3 w_s}{d \rho^3} - (c^2 + 2 c \beta^2) \frac{d w_s}{d \rho} + \beta^2 (c^2 + 2 c) w_s = 0$$

- iii)  $\rho=k=1.709291$  にて  $d^2 w_s / d \rho^2 = 0$

- iv)  $\rho=k=1.709291$  にて

$$\frac{d^3 w_s}{d \rho^3} - \left[ \frac{(c^2 + 2 c \beta^2)}{\rho^2} \right] \frac{d w_s}{d \rho} + \frac{\beta^2 (c^2 + 2 c)}{\rho^3} w_s = 0$$

となる。

(e) 剛度比  $N_\theta / N_r = c^2 = 1.0$  のときと  $N_\theta / N_r = 4.0$  の2つの場合について計算する。

(c) の諸式からわかるように求める断面力その他は級数の形になるがここでは  $n=1$  の第1項のみを計算する。 $n=2$  は消失するので第3次 ( $n=3$ ) 以下を無視することになるが扇形平板の弾性変形および断面モーメントの特性を知るためには十分である。

以上のようにして求めた、たわみ  $w$ , 曲げモーメント  $M_r, M_\theta$  を

$$w(\rho, \theta) = \alpha \frac{q_0 l^4}{N_{r0}},$$

$$M_r(\rho, \theta) = \beta q_0 l^2, \quad M_\theta(\rho, \theta) = \tau q_0 l^2$$

(c) 曲げモーメント, ねじりモーメント, せん断力反力の式

$$N_r = \frac{E_r h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)} = \frac{E_r h_0^3 (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3}{12(1 - \nu_r \nu_\theta)}$$

$$= N_{r0} (\alpha_1 \rho + \beta_1)^3$$

を考慮すると式(51), (52), (53)からこの場合の諸式が次のように得られる。

の形で示し、その  $\alpha, \beta, \tau$  の値を図示すると図-2 (b) (c)(d) のようである。図中点線で示したのは  $h=h_0$  なる板厚の場合のそれである。なお等厚板のものと比較するときは著者の先の論文<sup>2)</sup>の計算例を参照されたい。

### 9. 結 語

本文では  $h$  が代数関数で示される場合を扱ったが  $h = h(\rho)$  (または  $N_r = N_r(\rho)$ ) が任意の関数であっても式(2)または式(3)からおのおのについての微分方程式をつくったとき、前にも述べたようにその多くの場合は結局本文中で述べた代数関数変化の場合に帰着され、指数関数、または対数関数で示される変化をする場合がその例である。前論文<sup>1)</sup>と本論文で  $r$  方向変厚の扇形平板の曲げの問題を扱ったが、これの基礎となる微分方程式(文献1)の式(5)および式(16)の誘導にあたり曲げモーメントおよびねじりモーメントの式に等厚板のきのそれと同じ式を使用し、また具体的な計算を進める上で、ねじりモーメントの表現に文献1)の(14)の関係を仮定したが、いまは平板が  $r$  方向で急激に変化しない場合を取扱っているので、これらの仮定は従来から研究されて変厚の矩形板、および円板などと同じ程度の精度を有するものである。

10. 扇形平板の曲げについてのまとめ

文献 2), 1) および本論文で扇形平板の曲げに関して考察を加えてきた。基礎の微分方程式は一般のものを誘導したが、実際の計算として二直線辺が単純支持されたものを扱った。とりあげた数値計算例の諸条件—辺比, 中心角, 剛度比, 荷重, 境界条件など—をずれの場合も同一のものを使用したので, それらの結果からこの扇形平板の弾性変形および応力状態の特性を述べまとめしたい。

まず等厚の扇形平板では, 自由辺をもった場合, たわみについて内側円弧辺中央と外側円弧辺中央で値を比較すると,  $\frac{N_\theta}{N_r}=0.25$  では  $\frac{w_{外}}{w_{内}}=2.4411$ ,  $\frac{N_\theta}{N_r}=1.0$  で 3.1332,  $\frac{N_\theta}{N_r}=4.0$  では 4.4069 となり, 外側と内側の円弧長の比が 1.70921 であることを考えると内側円弧辺が外側円弧辺にくらべ負担が相当大きいことがわかる。また  $\frac{N_\theta}{N_r}$  が大になるにつれ  $\frac{w_{外}}{w_{内}}$  の値も大きくなっている。

また曲げモーメントについて考えると  $\frac{(M_\theta)_{外}}{(M_\theta)_{内}}$  の値は,  $\frac{N_\theta}{N_r}=0.25$  で 0.7876, 1.0 で 1.0790, 4.0 で 1.5249 であり大体 1.0 前後の値を示している。応力状態に直接関係する曲げモーメントについても内側の負担が大きいこととははっきりわかる。これは扇形平板の弾性変形および応力状態の一つの特性といえよう。次に  $M_\theta$  について四辺が単純支持されたものと自由辺をもつものと比較すると, 前者は  $\frac{N_\theta}{N_r}$  の比が大きき影響しているが後者の場合は  $\frac{N_\theta}{N_r}$  のいかんによらずほぼ一定の値を示している。このことは変厚板の場合についてもいえることである。次に自由辺をもった場合の  $M_r$  についてみると一つの放射方向の断面について符号の逆のものがあらわれているがその大きさは  $M_\theta$  に比較するとずっと小さい値を示している。剛度比の影響は四辺単純支持されたものにおいては, たわみ, 曲げモーメントともに影響が顕著にあらわれているが, 自由辺をもつものでは, たわみと  $M_r$  にはその影響がみられるが,  $M_\theta$  には前にも述べたようにそれ程影響はない。

次に辺比の等しい矩形板 (この場合は正方形板) との比較においては,  $\frac{N_\theta}{N_r}=1.0$  の場合を例にとると四辺単純支持のとき, 扇形平板の中央点のたわみが  $0.00404 \frac{q_0 l^4}{N_r}$  に対し正方形板の中央点のたわみは  $0.00406 \frac{q_0 l^4}{N}$  でありほぼ同じ値である。自由辺をもつ場合でも前者が  $0.01473 \frac{q_0 l^4}{N_r}$  に対し後者は  $0.01302 \frac{q_0 l^4}{N}$  とこれも近い値を示している。

$r$  方向変厚の扇形平板のおもな特性は, まずたわみについては (変厚板のたわみは, 内側円弧辺における  $N_r$  すなわち  $N_{r_0}$  を基準として計算した),  $\frac{w_{外}}{w_{内}}$  の値を

みると  $h=h_0\rho$  のとき,  $\frac{N_\theta}{N_r}=1.0$  で 2.0514,  $\frac{N_\theta}{N_r}=4.0$  で 2.2741,  $h=h_0(1.8\rho-0.8)$  の変厚の場合, それぞれ 1.5845 および 1.5513 となり, 等厚板に比し放射方向に板厚が大きくなるため当然のことではあるが  $\frac{w_{外}}{w_{内}}$  の値は小さくなっている。

曲げモーメント  $M_\theta$  についてみると,  $h=h_0\rho$  の場合  $\frac{(M_\theta)_{外}}{(M_\theta)_{内}}$  の値は,  $\frac{N_\theta}{N_r}=1.0$  で 3.5147,  $\frac{N_\theta}{N_r}=4.0$  では 6.1805 でありまた  $h=h_0(1.8\rho-0.8)$  の場合は  $\frac{N_\theta}{N_r}=1.0$  のとき 6.3470, 4.0 のとき 6.1805 であり等厚板のとき 1.0 前後の値であったのが, 変厚板 (この場合は外側の方向に厚さが増している) では外側の方の負担が大であるが, これは外側の板厚が大きいためモーメントの分担が大きくなるのは当然で, 応力状態を考えると等厚のものと比較して妥当な結果といえよう。  $M_r$  の値はやはり  $M_\theta$  に比し小さい値を示している。以上は荷重が等分布満載の場合であるが, 荷重が梯形状に分布して載荷されたとき (これは  $h=h_0\rho$  の変厚板の自重によるたわみ, および曲げモーメントを知るために行なった) について,  $\frac{w_{外}}{w_{内}}$  は  $\frac{N_\theta}{N_r}=1.0$  で 2.3920, 4.0 では 2.9727 でありまた  $\frac{(M_\theta)_{外}}{(M_\theta)_{内}}$  の値は, 剛比が 1.0 のとき 4.1191, 4.0 のとき 4.9448 である。

以上で取り扱った数値計算例で得られた結果から扇形平板のたわみ, および曲げモーメントの特性のおもなものを述べた。  $r$  方向の変厚扇形平板の曲げの問題は, 結局 (2) の方程式を解くことになりこの式からわかるように板厚が変化するときのみでなく, 板剛度が  $r$  方向に変化する場合 (たとえ厚さが一定であっても) にも拡張して用いることができる。このことは, このような実際の構造物の解析にこの理論を応用するとき, 例えば曲線格子桁構造の解析に応用する場合きわめて有用なことといえよう。終りに本論文をかくにあたり酒井忠明教授の御指導をうけた。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 芳村 仁: 「曲線直交異方性変厚扇形平板の曲げについて」 土木学会論文第 86 号, 37.10
- 2) 芳村 仁: 「集曲線直交異方性扇形平板の曲げについて」 土木学会論文第 82 号, 37.6
- 3) (本論文の微分方程式の解法に関する参考文献として例えば)

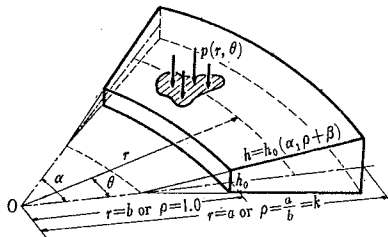
寺沢寛一: 自然科学者のための数学概論  
永宮健夫: 微分方程式論  
フォーサイス: 微分方程式

- 註 1) 変厚を委ねる曲線が軸と交わる点を変厚の始点とし, この場合は  $h=h(\rho)$  が座標原点 0 を通らない場合である。  
註 2) この式の第二項は  $\phi(\lambda+n)$  が  $\lambda=\lambda_2$  のとき  $n=m$  において 0 にあり  $A_n$  の分母が 0 となって有限の  $A_n$  は求まらずしたがって  $A_n$  以下  $A_{n+1}, A_{n+2}, \dots$  も求まらない。しかしいまは  $(\lambda-\lambda_2)w$  を考えているのであるから  $(\lambda-\lambda_2)w A_n(\lambda)$  については  $n \geq m$  のとき  $\lambda \rightarrow \lambda_2$  で確定した値をとり  $m < m_2$  に対しては 0 となる。

## THE BENDING OF CURVILINEAR ORTHOTROPIC CERCULAR RING SECTOR PLATE WITH VARYING THICKNESS

By Jin Yoshimura, C.E. Member

In the previous paper, the author described a study on the bending of circular ring sector plate with varying thickness whose beginning point coincides with the origin of the coordinate. The present paper deals with the problem in case the beginning point of variable thickness does not coincide with the origin of the coordinate, as shown in Fig. 1.



**Fig. 1** In case the beginning point of variable thickness does not coincide with the origin of the coordinate. (Example of linearly varying thickness)

From the previous study, differential equation of the plate in which two straight edges are simply supported is :

$$\begin{aligned}
 & N_r \frac{d^4 w_s}{d \rho^4} + 2 \left[ \frac{N_r}{\rho} + \frac{d N_r}{d \rho} \right] \frac{d^3 w_s}{d \rho^3} \\
 & + \left[ \frac{-(2c\beta^2 + c^2)}{\rho^2} N_r + \frac{(2 + c^2 \nu_r) d N_r}{\rho} + \frac{d^2 N_r}{d \rho^2} \right] \frac{d^2 w_s}{d \rho^2} \\
 & + \left[ \frac{(2c\beta^2 + c^2)}{\rho^3} N_r - \frac{(2c\beta^2 + c^2) d N_r}{\rho^2} + \frac{c^2 \nu_r d^2 N_r}{\rho} \right] \frac{d w_s}{d \rho} \\
 & + \beta^2 \left[ \frac{(-2c^2 - 2c + c^2 \beta^2)}{\rho^4} N_r + \frac{(2c + c^2) d N_r}{\rho^3} \right. \\
 & \left. - \frac{c^2 \nu_r d^2 N_r}{\rho^2} \right] w_s = S\{p(r, \theta)\} \cdot b^4 \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

in which,

$$c^2 = \frac{N_\theta}{N_r}$$

$$\rho = \frac{r}{b}$$

$S\{p(r, \theta)\}$  = Finite sine transform of a load  $p(r, \theta)$

As a mode of varying thickness  $h$ , we take a following expression of polynomial

$$h = h_0(\alpha_0 \rho^m + \alpha_1 \rho^{m-1} + \dots + \alpha_m)$$

where,  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m$  may be determined by a given plate. Then Eq. 1 becomes :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^4 w_s}{d \rho^4} + \frac{P(\rho)}{(\alpha_0 \rho^m + \alpha_1 \rho^{m-1} + \dots + \alpha_m)} \frac{1}{\rho} \frac{d^3 w_s}{d \rho^3} \\
 & + \frac{Q(\rho)}{(\alpha_0 \rho^m + \dots + \alpha_m)^2} \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 w_s}{d \rho^2} \\
 & + \frac{R(\rho)}{(\alpha_0 \rho^m + \dots + \alpha_m)^2} \frac{1}{\rho^3} \frac{d w_s}{d \rho} \\
 & + \frac{S(\rho)}{(\alpha_0 \rho^m + \dots + \alpha_m)^2} \frac{1}{\rho^4} w_s \\
 & = \frac{S\{p(r, \theta)\} \cdot b^4}{N_{r0}(\alpha_0 \rho^m + \alpha_1 \rho^{m-1} + \dots + \alpha_m)^3} \dots (2)
 \end{aligned}$$

in which  $P(\rho)$  = Polynomial of  $m$  th degree.

$Q(\rho), R(\rho), S(\rho)$  = Polynominal of  $2m$  th degree.

Let  $a_1, a_2, \dots, a_m$  be roots of  $\alpha_0 \rho^m + \alpha_1 \rho^{m-1} + \dots + \alpha_m = 0$  then Eq. 2 becomes :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^4 w_s}{d \rho^4} + \frac{P(\rho)}{\rho(\rho - a_1)(\rho - a_2) \dots (\rho - a_m)} \frac{d^3 w_s}{d \rho^3} \\
 & + \frac{Q(\rho)}{\rho^2 [(\rho - a_1)(\rho - a_2) \dots (\rho - a_m)]^2} \frac{d^2 w_s}{d \rho^2} \\
 & + \frac{R(\rho)}{\rho^3 [(\rho - a_1)(\rho - a_2) \dots (\rho - a_m)]^2} \frac{d w_s}{d \rho} \\
 & + \frac{S(\rho)}{\rho^4 [(\rho - a_1)(\rho - a_2) \dots (\rho - a_m)]^2} w_s \\
 & = \frac{S\{p(r, \theta)\} \cdot b^4}{N_{r0} [(\rho - a_1)(\rho - a_2) \dots (\rho - a_m)]^3} \dots (3)
 \end{aligned}$$

$\rho = 0, \rho = a_1, \dots, \rho = a_m$  are regular singular points of Eq. 3 So a solution of Eq. 3 is obtained at an ordinary point and near a regular singular point. One is able to get these solutions in the form of a power series.

### (1) Solution at an Ordinary Point.

Let each coefficient of Eq. 3 be  $P(\rho), Q(\rho), R(\rho)$  and  $S(\rho)$ , applying Taylor's Theorem, one can express  $w_s = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (\rho - a_0)^n$ . And  $p, q, r, s$  are also written in the form of power series. Substituting these expressions into Eq. 2, the following equation is obtained :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1)(n-2)(n-3) A_n (\rho - a_0)^{n-4} \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} p_n (\rho - a_0)^n \cdot \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) A_n (\rho - a_0)^{n-3} \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} q_n (\rho - a_0)^n \cdot \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) A_n (\rho - a_0)^{n-2} \\
 & + \sum_{n=0}^{\infty} r_n (\rho - a_0)^n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n A_n (\rho - a_0)^{n-1}
 \end{aligned}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty} s_n(\rho-a_0)^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho-a_0)^n = 0 \dots\dots\dots (4)$$

Form this, coefficients  $A_1, A_2, \dots, A_n$  are determined successively. If the right hand side of Eq. 3 can be expressed as a power series, one gets a particular solution of Eq. 3.

**(2) Solution near a Regular Singular Point.**

Eq. 4 is rewritten as

$$\frac{d^4 w_s}{d\rho^4} + \frac{p(\rho-a)}{(\rho-a)} \frac{d^3 w_s}{d\rho^3} + \frac{q(\rho-a)}{(\rho-a)^2} \frac{d^2 w_s}{d\rho^2} + \frac{r(\rho-a)}{(\rho-a)^3} \frac{d w_s}{d\rho} + \frac{S(\rho-a)}{(\rho-a)^4} = 0 \dots\dots\dots (5)$$

For the solution of homogenous equation, let

$$w_s = (\rho-a)^\lambda \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\rho-a)^n,$$

$$p(\rho-a) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(\rho-a)^n, \dots\dots$$

and substituting these expressions into Eq. 5, one can find the following indicial equation :

$$\lambda^4 + (p_0+6)\lambda^3 + (11-3p_0+q_0)\lambda^2 + (2p_0-q_0+r_0-6)\lambda + s_0 = 0 \dots\dots (6)$$

Let roots of Eq. 6 be  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  and  $\lambda_4$ , when four solutions are obtained according to each  $\lambda$ . Particular solution is found by the same method.

As a numerical example, we take a ring sector plate in which the angle of sector =  $\pi/6$ , poisson's ratio = 0 and subjected to a uniform load. The mode of varying thickness is assumed as  $h = h_0(1.8\rho - 0.8)$  Fig. 2 shows values of  $\alpha, \beta$

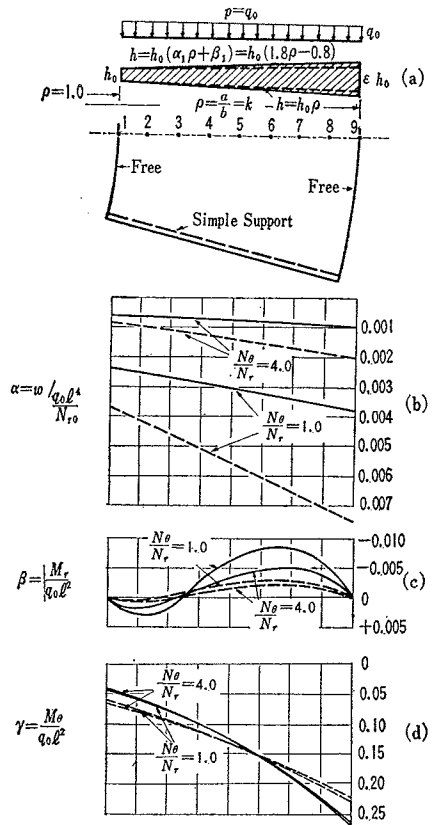


Fig. 2 Values of  $\alpha, \beta$  and  $\gamma$ .

and  $\gamma$  respectively.

[Received (by the Society) May 10, 1962]