

薄肉曲線桁の基礎理論*

小 西 一 郎**

小 松 定 夫***

1. 緒 言

市街地における自動車交通の輻輳は日を追って激しさを加え、交通の立体化は近代都市にとって必至の状態となった。そして自動車専用高速高架道路の立案ならびに建設が急務の問題となっている。すでに東京都においては、それらの工事が着々と実施されつつある。これらの路線に沿っては、曲線桁橋の架設の機会が多く、曲線桁の正確な理論と、それにもとづく合理的設計計算法の確立が、特に重要になってきた。

曲線桁の解析についてはかなり多くの人々によって報告されているが、主として鉄筋コンクリートのような中実断面を有する細長い曲線棒状の桁に関するものが多い。この種の理論は桁軸曲線の曲率半径や桁軸方向の寸法に比して、桁断面の曲率半径方向の拡がり小さいような場合を取り扱ったものである。だから、もっぱら断面力や変形量が桁軸方向にどのように変化するかを調べれば、一応その静力学的挙動の特性が明らかにされるものと考えられていた。たとえば文献 1) では、鉛直荷重あるいは面内荷重を受ける細い円環について、断面力、変形量に対する Fourier 級数解を与えている。

ところで一般に曲線桁橋では、走行荷重のもとで必ずねじりモーメントが作用する。したがって桁橋全体を立体的に構成し、ねじり剛さの大きい薄肉閉断面を有するものがすぐれている。それで橋断面全体のねじり剛さおよび曲げねじり剛さを考慮した立体的解析法が重視される。

通常、曲率半径方向の断面寸法が大きくなればなるほど、横断面内の応力分布は直線桁について与えられた公式で算出されるものから次第に偏倚してゆく。このことから薄板部材で構成された曲線桁が、任意の外力を受けるときにも、これと類似したことが起こるのである。換言すれば、直線桁の工学的曲げ理論に対して、曲がりばり理論があるように、直線桁に関する薄肉構造理論に対応して、薄肉曲線桁あるいは桁橋についての工学的基礎理論を系統的に確立することが望まれる。

文献 3) では薄肉曲線桁のねじりについて若干論じて

いる。しかし、任意の荷重状態のもとでの一般的変形状態に対する考慮に欠けている。また文献 1), 2) では中実円環に等分布ねじりモーメントが作用する場合の反転 (Die Umstülpung) についても論じている。これは主としてねじりモーメントとねじり角に対し考察し、一方、湾曲率、曲げモーメント、垂直応力は円環曲率半径が大きい場合について付随的事項として述べているにすぎない。むしろ曲線桁としての曲げの問題に注目して、曲げの曲率と垂直応力、あるいは曲げモーメントと垂直応力の関係を明確にし、任意荷重のもとにこれらの量がどのように結ばれているかという違った観点から、その力学的特性を解明する方向に進まねばならない。

このような考え方から、本文では一般薄肉断面を有する曲線桁に関する薄肉構造理論について独自の見地から出発して論じている。特に変位、応力分布および応力間のつりあい、応力と断面力との関係、あるいはたわみとねじり変形との関係などのあらゆる量的関係について曲率の影響を考慮した。さらに固定された円環座標、桁断面にとった直交座標、薄板部材中央面にそってとった曲線座標を採用し、数個の基本的変形状態に注目し基礎的考察を行なった。さらにこれらの基本的変形状態から発展して、任意の外力荷重のもとに曲げ、引張り、ねじりが同時に発生した一般的変形状態にある曲線桁の応力と変形量に関する基礎式を与えることができた。それと同時に曲線桁特有の重要な断面諸量の公式とその意義を明確にしたものである。

そこで①薄肉閉断面構造を採用し、②それに本薄肉曲線構造理論を適用して立体解析を行なう。そのような方針で設計することによって力学的に優秀な構造形式のものを、その力学的特性を十分考慮したうえで、経済的に有利な桁橋として設計できると思う。

強固な横桁で連結され、橋断面全体が剛体的に変位するような通常の曲線桁橋においては、橋幅の拡がりの影響が全面的に無視できなくなるので、曲率の項が効いてくる。なお本理論の諸公式において、曲率半径の項を無限大とすると、極限值として既報の薄肉直線桁の公式にすべて一致する。

また本文は任意断面形状を有する薄肉曲線桁および桁橋に適用できる一般理論であって、鋼床板並列箱桁橋、合成並列箱桁橋 (梯形箱桁をふくむ) などに有用であることはいうまでもない。

* 第 15 回土木学会年次学術講演会に発表、講演概要昭和 35 年 5 月 第 II 部 p. 7~8

** 正員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

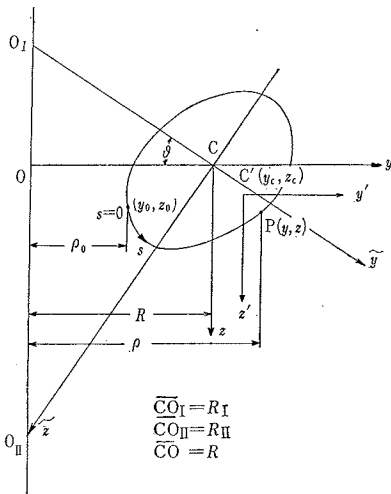
*** 正員 工博 大阪市立大学助教授 工学部土木工学教室

2. 断面の幾何学的性質

曲線桁の静力学的考察に先だって、その横断面の形状、寸法によって決る重要な性質について明らかにしておかねばならない。

図-1 に示すように横断面上にある点C を選ぶ。C を桁軸方向に結ぶ軸線がなす曲率の中心をO とする。そして桁は薄板材からなり、断面上の諸点は中心をO とする軸線の円弧と同心円上に並ぶように製作されるのが普通である。

図-1 座標系
Fig. 1 Systems of coordinates.



いまC を原点とし、断面内で曲率半径の方向に座標y を、鉛直下方に座標z をとり、断面上の点P を表わす。また薄板中心線にそって曲線座標s をも考える。そこで、薄肉断面全体にわたるつぎのような線積分を曲線桁の断面1次モーメントと定義する。

$$G_y = R \int_F \frac{z}{n\rho} t ds \dots\dots\dots(1)_1$$

$$G_z = R \int_F \frac{y}{n\rho} t ds \dots\dots\dots(1)_2$$

ここに R: 断面図心を結ぶ軸線(以下桁軸線という)が持つ曲率半径で、これについては後述する。t: 薄板の板厚、n: 鋼材とその材料のヤング率の比、rho: 点P と曲率中心 O の曲率半径方向に測った距離。

つぎに座標 (y_c, z_c) を有する点C' を原点とし、もとの直交座標 (y, z) に平行な直交座標 (y', z') をとる。そうすれば新しい座標に関する断面1次モーメント G_{y'}, G_{z'} は次式で与えられる。

$$G_{y'} = G_y - z_c F_s$$

$$G_{z'} = G_z - y_c F_s$$

ここに $F_s = R \int_F \frac{t}{n\rho} ds$ 鋼換算断面積(式(35)参照)

後述のように特にC が図心に一致すれば、 $F_s = \int_F \frac{t}{n} ds$

さらに、ある1点 O_n をとおる任意の直交軸に関して、断面1次モーメントがそれぞれ0 となる時、その点 O_n を曲線桁断面の図心と定義する。

図心 O_n の (y, z) 座標を (y_n, z_n) とする。そうすれば図心の位置は次式によって決定される。

$$y_n = \frac{G_z}{F_s}, \quad z_n = -\frac{G_y}{F_s} \dots\dots\dots(2)$$

再び 図-1 に示す薄肉断面において、次式で表わされる量をそれぞれy 軸、n 軸に関する断面2次モーメントと定義する。

$$\left. \begin{aligned} I_y &= R \int_F \frac{z^2 t}{n\rho} ds \\ I_z &= R \int_F \frac{y^2 t}{n\rho} ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

同じように、

$$I_{yz} = R \int_F \frac{yz t}{n\rho} ds \dots\dots\dots(4)$$

を断面相乗モーメントと定義する。

ある1つの直交座標 (y, z) に平行な直交座標 (y', z') に関する2次の断面モーメント I_{y'}, I_{z'}, I_{y'z'} は次式で与えられる。

$$I_{y'} = I_y - 2z_c G_y + z_c^2 F_s$$

$$I_{z'} = I_z - 2y_c G_z + y_c^2 F_s$$

$$I_{y'z'} = I_{yz} - y_c G_y - z_c G_z + y_c z_c F_s$$

特に座標の原点C が図心に一致すれば、 $G_y = G_z = 0$ だから

$$I_{y'} = I_y + z_c^2 F_s$$

$$I_{z'} = I_z + y_c^2 F_s$$

$$I_{y'z'} = I_{yz} + y_c z_c F_s$$

いま直交座標 (y, z) と原点C を共有し、時計方向に角 phi だけ傾いた直交座標を (y-bar, z-bar) とする。そうすれば、これら2のつの座標系に関する2次の断面量の間には、つぎの関係式が成立する。

$$I_{y\bar{y}} = I_z \sin^2 \varphi + I_y \cos^2 \varphi - I_{yz} \sin 2\varphi$$

$$I_{z\bar{z}} = I_z \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi + I_{yz} \sin 2\varphi$$

$$I_{y\bar{z}} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi$$

さらに

$$I_{y\bar{y}} + I_{z\bar{z}} = I_y + I_z$$

$$I_{y\bar{y}} I_{z\bar{z}} - I_{y\bar{z}}^2 = I_y I_z - I_{yz}^2$$

上式から明らかのように I_{y\bar{y}}, I_{z\bar{z}} および I_{y\bar{z}} は phi の関数である。すなわち、座標軸の回転角 phi の大きさによって、新しい座標軸に関する2次の断面モーメントが変化する。このとき、断面2次モーメントが最大あるいは最小になるような直交軸を断面の主軸と定義する。そして主軸に関する断面2次モーメントを主断面2次モーメントと名づける。

いま任意の直交2軸 y, z に関する2次の断面モーメント I_y, I_z, I_{yz} を知って、主軸の方向および最大、最

小断面2次モーメントを与える公式を求める。すなわち条件

$$\frac{dI_{\bar{y}}}{d\vartheta} = 0$$

によって、主軸の方向を与える角 ϑ が求まる。

$$\vartheta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$$

このとき $I_{\bar{y}\bar{z}} = 0$ となるのが容易に知れる。したがって、座標軸 y, z が主軸の場合には、

$$I_{\bar{y}}I_{\bar{z}} = I_yI_z - I_{yz}^2$$

$$I_{\bar{y}} + I_{\bar{z}} = I_y + I_z$$

そして $I_{\bar{y}}, I_{\bar{z}}$ がそれぞれ、最大あるいは最小の断面2次モーメントとなる。その値は次式で与えられる。

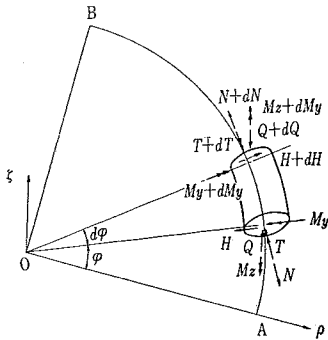
$$I_{\bar{y}} \text{ または } I_{\bar{z}} = \frac{1}{2} \{ I_y + I_z \pm \sqrt{(I_y - I_z)^2 + 4I_{yz}^2} \}$$

3. 座標系と断面力

図-2 に示すように桁軸線の曲率中心 O を原点とし、桁軸線をふくむ平面に垂直上方へ z 座標を、曲率半径方向に ρ 座標をとる。そして ρ 軸は図心をとるように

図-2 曲線桁の座標系と断面力

Fig. 2 The system of coordinates and the internal forces produced at any cross section of a curved girder.



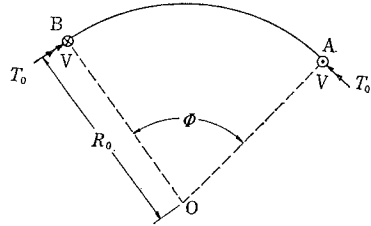
する。さらに原線 OA から桁の他端 B の方へ桁軸方向に角 φ 座標をとる。すなわち、曲率中心 O を原点とする円筒座標 (ρ, φ, z) をとる。つぎに改めて横断面において、図心 O_n をとおき、 ρ 軸に平行に y 座標、 z 軸に平行逆向きに z 座標をとる。この直交座標 (y, z) は断面に固定するものである。同じく原点 O_n を共有して、断面の主軸の方向に座標 (\bar{y}, \bar{z}) を選ぶ。このとき座標軸 \bar{y} は座標軸 y より時計方向に ϑ だけ傾いているものとする。

曲線桁に生ずる断面力はつぎのようである。① y 軸および z 軸方向のせん断力をそれぞれ H, Q 、② 桁軸方向に、図心に作用する軸力を N 、③ 直交2軸 y, z まわりの曲げモーメントをそれぞれ M_y, M_z 、④ せん断中心(後述)まわりのねじりモーメントを T と記す。

4. 単純ねじり

図-3 に示すように、自由な曲線桁の両端 A および B に、それぞれ大きき相等しく、逆向きのねじりモーメント $T_A = T_0$ および $T_B = T_0$ を作用させた場合を単純ね

図-3 単純ねじり
Fig. 3 Pure torsion.



じりと定義する。このとき直線桁とは異なり T_0 だけでは外的に平衡を保ちえない。それで支点 A, B に大きき相等しく方向相反する反力 V を作用すればよい。そして V の大ききは、

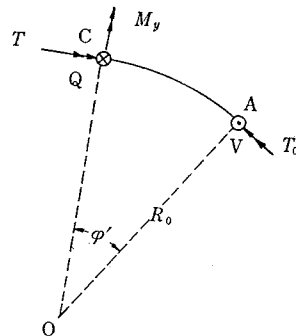
$$V = T_0/R_0 \dots\dots\dots(a)$$

ここに R_0 : せん断中心と曲率中心 O との水平距離である。せん断中心については、12. で後述する。記号 \leftarrow は矢印の方向に進むように右ねじを回転させるようなモーメントの方向を示す。また、 \odot は紙面に垂直に、裏から表の方向に作用する力を示し、 \otimes はその逆向きの力を示すものとする。

単純ねじりの場合に任意断面 C における断面力について考えよう。今、横断面 C が端断面 A と曲率中心 O を結ぶ原線 OA から、 φ' なる角をなすものとする。図-4 のように断面 C で切り取られた自由片 \widehat{AC} について、断面力と外力とのつりあいを考えると、ねじりモーメント T 、曲げモーメント M_y 、せん断力 Q は、

図-4 単純ねじりにおける断面力

Fig. 4 Internal forces at any cross section under pure torsion.



$$T = T_0 \cos \varphi' + VR_0(1 - \cos \varphi')$$

$$M_y = -T_0 \sin \varphi' + VR_0 \sin \varphi'$$

$$Q = V$$

関係式 (a) を利用して、

$$T = T_0, \quad M_y = 0$$

桁内には一様なねじりモーメント T_0 とせん断力 V を生じ、曲げモーメントは存在しない。

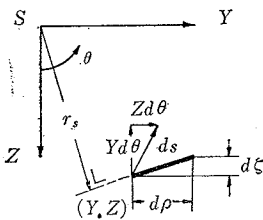
さて、一般に円筒座標における、ひずみ成分と変位の関係は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\rho &= \frac{\partial u}{\partial \rho}, & \epsilon_\varphi &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{u}{\rho}, \\ \epsilon_\zeta &= \frac{\partial v}{\partial \zeta}, & r_{\rho\varphi} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial \rho} - \frac{w}{\rho}, \\ r_{\rho\zeta} &= \frac{\partial w}{\partial \zeta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, & r_{\zeta\rho} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{aligned} \right\} \dots (5)$$

つぎに、単純ねじりにおいて、桁内任意点 $D(\rho, \varphi, \zeta)$ の変位成分 u, w, v について考える。そのため図-5に示すように、断面内にねじり中心 S を原点とし、鉛直下

図-5 微小要素 ds と座標 (Y, Z)

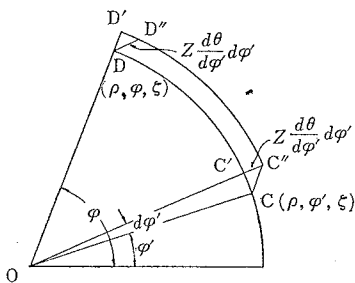
Fig. 5 Differential element ds and rectangular coordinates (Y, Z)



方に Z 、水平 ρ 方向に Y なる座標軸を設ける。よって直角座標 (Y, Z) をもって断面内の任意点を表わすことができる。ところで原線 OA と角 φ' をなす断面 C に対し、 $\varphi' + d\varphi'$ をなす断面 C' は、角 $d\theta = \frac{d\theta}{d\varphi'}$ 、 $d\varphi'$ だけ余計にねじれていると考えられる。したがって断面 C' 上の点 (Y, Z) は、断面 C 上の点 (Y, Z) に対し、相対的に u 方向に $Z d\theta$ 、 v 方向に $Y d\theta$ だけ変位することになる。このようなきわめて接近せる隣接2断面の相対変位のために、断面 D の点 (Y, Z) には、いかなる変位を生ずるであろうか。図-6 から明らかなように、水平面内の変位 u, w は

図-6 単純ねじりにおける変位 u, w

Fig. 6 Displacements u, w under pure torsion.



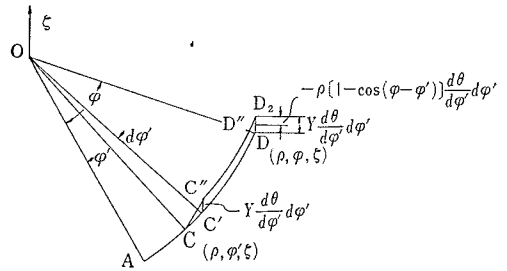
$$\left. \begin{aligned} u &= \int_0^\varphi Z \frac{d\theta}{d\varphi'} \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' \\ w &= - \int_0^\varphi Z \frac{d\theta}{d\varphi'} \sin(\varphi - \varphi') d\varphi' + \frac{W_s}{R^2} \rho \frac{d\theta}{d\varphi} \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

一方、鉛直方向変位 v は図-7 で明らかなように、

$$v = \int_0^\varphi \{ Y - \rho [1 - \cos(\varphi - \varphi')] \} \frac{d\theta}{d\varphi'} d\varphi' \dots (7)$$

図-7 単純ねじりにおける変位 v

Fig. 7 Displacement v under pure torsion.



式 (6)₂ の第2項は断面のそりを表わす量である。

つぎに変位式 (6), (7) を式 (5) に代入して、ひずみ成分を計算すれば、つぎのようになる。

$$\epsilon_\rho = 0, \quad \epsilon_\zeta = 0, \quad \epsilon_\varphi = W_s \frac{d^2 \theta}{R^2 d\varphi^2} \dots (8)$$

$$\begin{aligned} r_{\rho\varphi} &= \frac{1}{\rho} \left[- \int_0^\varphi Z \frac{d\theta}{d\varphi'} \sin(\varphi - \varphi') d\varphi' + Z \frac{d\theta}{d\varphi} \right] \\ &+ \left(\frac{\partial W_s}{\partial \rho} \rho + W_s \right) \frac{d\theta}{R^2 d\varphi} - \frac{1}{\rho} \left[- \int_0^\varphi Z \frac{d\theta}{d\varphi'} \right. \\ &\left. \cdot \sin(\varphi - \varphi') d\varphi' + W_s \rho \frac{d\theta}{R^2 d\varphi} \right] \dots (9) \end{aligned}$$

しかるに、問題の点 D において薄肉部材が ρ 軸と角 α をなすものとするれば、曲線座標 s の方向が ρ 軸と角 α をなすことになる。 s 方向に直角に外方へ座標 n を取れば、次式が成立する。

$$\frac{\partial W_s}{\partial \rho} = \frac{\partial W_s}{\partial s} \cos \alpha + \frac{\partial W_s}{\partial n} \sin \alpha$$

$$\frac{\partial W_s}{\partial \zeta} = \frac{\partial W_s}{\partial s} \sin \alpha - \frac{\partial W_s}{\partial n} \cos \alpha$$

この関係を式 (9) に用いれば

$$r_{\rho\varphi} = \left(\frac{\partial W_s}{\partial s} \frac{\rho}{R^2} \cos \alpha + \frac{Z}{\rho} + \frac{\partial W_s}{\partial n} \frac{\rho}{R^2} \sin \alpha \right) \frac{d\theta}{d\varphi} \dots (9)'$$

同じようにして

$$r_{\zeta\varphi} = \left(\frac{\partial W_s}{\partial s} \frac{\rho}{R^2} \sin \alpha + \frac{Y}{\rho} - \frac{\partial W_s}{\partial n} \frac{\rho}{R^2} \cos \alpha \right) \frac{d\theta}{d\varphi} \dots (10)$$

$$r_{\zeta\rho} = 0$$

ところで直角座標 (ρ, φ, ζ) 方向のひずみ成分と直角座標 (s, n, φ) 方向のひずみ成分の関係は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= \epsilon_\rho \cos^2 \alpha + \epsilon_\zeta \sin^2 \alpha + 2r_{\rho\zeta} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \\ r_{s\varphi} &= r_{\rho\varphi} \cos \alpha + r_{\zeta\varphi} \sin \alpha \\ r_{n\varphi} &= r_{\rho\varphi} \sin \alpha - r_{\zeta\varphi} \cos \alpha \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

したがって式 (8), (9)' および式 (10) を式 (11) に代入すれば、

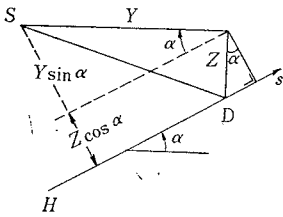
$$\epsilon_s = 0$$

$$r_{s\varphi} = \left(\frac{\partial W_s}{\partial s} \frac{\rho}{R^2} + \frac{Y}{\rho} \sin \alpha + \frac{Z}{\rho} \cos \alpha \right) \frac{d\theta}{d\varphi}$$

そして断面内の点 D とねじり中心 S との関係が 図-8 に示されるように、

図-8 微小要素とせん断中心の
相対位置

Fig. 8 Relative position of
shear center to a differential
element.



$$r_{s\varphi} = \left(\frac{\partial W_s}{\partial s} \frac{\rho}{R^2} + \frac{r_s}{\rho} \right) \frac{d\theta}{d\varphi}$$

$$r_{n\varphi} = \left(\frac{\partial W_s}{\partial n} \frac{\rho}{R^2} - \frac{r_n}{\rho} \right) \frac{d\theta}{d\varphi} \dots\dots\dots(12)$$

ここに r_n は点 D における薄肉ののり線に至るねじり中心 S からの垂線の長さである。

さらに応力成分を求めれば、つぎのようである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_\varphi &= E_s \frac{W_s}{n} \frac{d^2\theta}{R^2 d\varphi^2} (= \sigma_w) \\ \tau_{s\varphi} &= G \left(\frac{\partial W_s}{\partial s} \frac{\rho}{R^2} + \frac{r_s}{\rho} \right) \frac{d\theta}{d\varphi} \\ \tau_{n\varphi} &= G \left(\frac{\partial W_s}{\partial n} \frac{\rho}{R^2} - \frac{r_n}{\rho} \right) \frac{d\theta}{d\varphi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

単純ねじりの場合には $\frac{d\theta}{d\varphi}$ = 一定であって、垂直応力 σ_w が生じない。そして一般にせん断応力 $\tau_{n\varphi}$ は僅少である。

つぎに、図-9 に示すように半径 ρ および半径 $\rho+d\rho$ なる2つの隣接する同心円および微小中心角 $d\varphi$ をはさむ2つの動径で切り取られる扇形の微小要素について、その断面に作用する応力のつりあいを考える。すでに述べたように、この微小要素の板面内には、せん断応力 $\tau_{s\varphi}$ のみが作用する。それで薄板の厚さを t とし、半径 ρ の円弧にそうせん断流を q_s とすれば、

$$q_s = \tau_{s\varphi} t \dots\dots\dots(14)$$

図-9 に示すように、座標 ρ と $\rho+d\rho$ の円筒および微小中心角 $d\varphi$ をはさむ横断面で切り取られる扇形微小要素について φ 方向のせん断流のつりあいを考える。微小要素は ρ 軸の方向と任意の傾き α をなすとする。そこで微小要素をふくむ平面と ρ 軸との交点 O' に関するモーメントのつりあい条件は

$$q_s \cdot \rho^2 d\varphi \cdot \sec \alpha = \left(q_s + \frac{dq_s}{d\rho} d\rho \right) (\rho+d\rho)^2 d\varphi \cdot \sec \alpha$$

2次以上の微小項を省略すれば、

$$Y \sin \alpha + Z \cos \alpha = r_s$$

ここに r_s はねじり中心 S から部材内の点 D における接線 DH におろした垂線 SH の長さである。それで s 方向と n 方向のせん断ひずみは、それぞれ

$$\frac{dq_s}{d\rho} \rho^2 + 2q_s \rho = 0$$

これを q_s について解けば $q_s \rho^2 = \text{const.}$ をうる。

これより q_s は、その点の ρ 座標の平方に逆比例する大きさを有することを知りえた。そこで第 k 室を一巡するせん断流を $q_{s,k}$ とすれば、右辺の定数を第 k 室に対し $R^2 q_k$ ととることによって、一般に

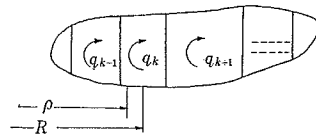
$$q_{s,k} \rho^2 = R^2 q_k$$

$$q_{s,k} = \frac{R^2}{\rho^2} q_k \dots\dots\dots(15)$$

なるせん断流が流れていると考えられる、式 (15) において q_k は第 k 室に属する標準せん断流と名づけることにする。式 (15) は閉断面の任意の形状について成り立

図-10 多室断面

Fig. 10 Section with multiple cells.



つものである。一般に、図-10のような断面が任意形状の多室閉断面であれば、室 k に面する薄板内のせん断流 q_s は、つぎのようである。

室 k を一巡する循環せん断流を $q_{s,k}$ と記せば、

$$q_s = q_{s,k} \quad \text{隣室と境界でない壁区間} \dots\dots\dots(16)_1$$

$$q_s = q_{s,k} - q_{s,k-1} \quad \text{隣室 } k-1 \text{ との境界壁} \dots\dots\dots(16)_2$$

$$q_s = q_{s,k} - q_{s,k+1} \quad \text{隣室 } k+1 \text{ との境界壁} \dots\dots\dots(16)_3$$

$$\text{さて、} q_k = G_s \frac{d\theta}{R d\varphi} \tilde{q}_k \dots\dots\dots(17)$$

によって、ねじり関数 \tilde{q}_k を定義する。ここに G_s は鋼のせん断弾性係数である。式 (15) に式 (17) を代入すれば、循環せん断流 $q_{s,k}$ をうる。

$$q_{s,k} = \left(\frac{R}{\rho} \right)^2 G_s \frac{d\theta}{R d\varphi} \tilde{q}_k \dots\dots\dots(17)'$$

したがって式 (16) に式 (17)' を用いると、小室 k に属する壁区間内のせん断流 q_s は、つぎの値をとる。

$$\left. \begin{aligned} q_s &= \left(\frac{R^2}{\rho^2} \tilde{q}_k - \frac{R^2}{\rho^2} \tilde{q}_{k+1} \right) G_s \frac{d\theta}{R d\varphi} \quad \text{境界壁} \\ q_s &= \frac{R^2}{\rho^2} \tilde{q}_k G_s \frac{d\theta}{R d\varphi} \quad \text{境界でない壁} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)''$$

そこで式 (13)₂ にこれらを用いて

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_q}{t} \left(\frac{R^3}{\rho^3} \tilde{q}_k - \frac{R^3}{\rho^3} \tilde{q}_{k+1} \right) &= \frac{\partial W_s}{\partial s} + \frac{r_s}{\rho^2} R^2 \quad \text{境界壁} \\ \frac{n_q}{t} \frac{R^3}{\rho^3} \tilde{q}_k &= \frac{\partial W_s}{\partial s} + \frac{r_s}{\rho^2} R^2 \quad \text{境界でない壁} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

式 (18) を s について積分すれば、

$$W_s = \bar{W}_s + W_0 \dots\dots\dots(19)$$

ここに W_0 は、 $s=0$ における W_s の値である。また \bar{W}_s は式 (18) より、

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_s &= \int_0^s \frac{R^3}{\rho^3} \tilde{q}_k \frac{n_g}{t} ds - \int_0^s \frac{R^3}{\rho^3} \tilde{q}_{k\pm 1} \frac{n_g}{t} ds \\ &\quad - R^2 \int_0^s \frac{r_s}{\rho^2} ds \quad \text{境界壁} \\ \bar{W}_s &= \int_0^s \frac{R^3}{\rho^3} \tilde{q}_k \frac{n_g}{t} ds - R^2 \int_0^s \frac{r_s}{\rho^2} ds \quad \text{境界でない壁} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

そして、小室 k のまわりを一巡する線積分を施せば、 W_s の周期性によって、

$$\oint_k \frac{\partial W_s}{\partial s} ds = 0 \dots\dots\dots(21)$$

式 (21) を用いて、 \tilde{q}_k についてのつぎの連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} -\tilde{q}_{k-1} \int_{k-1,k} \frac{R^3 n_g}{\rho^3 t} ds + \tilde{q}_k \int_k \frac{R^3 n_g}{\rho^3 t} ds \\ - \tilde{q}_{k+1} \int_{k,k+1} \frac{R^3 n_g}{\rho^3 t} ds = R^2 \int_k \frac{r_s}{\rho^2} ds \dots\dots\dots(22) \end{aligned} \right\}$$

ここに \int_k : 室 k のまわりの線積分, $\int_{k,k\pm 1}$ は室 k と $k\pm 1$ の境界壁にそう線積分を表わす。

つぎにねじりモーメント T_s は、

$$T_s = \int_R q_s r_s ds$$

上式に式 (17)' を代入すれば、

$$T_s = G_s J \frac{d\theta}{R d\varphi} \dots\dots\dots(23)$$

ここに $G_s J$: ねじりこわさ

$$J = \sum_k \tilde{q}_k R^2 \int_k \frac{r_s}{\rho^2} ds \dots\dots\dots(24)$$

ここに \sum_k : 全断面にわたって総和することを示す。

式 (23) において T_s は一定であるから、等断面のときには、 $d\theta/d\varphi$ も一定であることがわかる。

つぎに式 (17) と式 (23) とから θ を消去すれば、せん断流 $q_{s,k}$ がねじりモーメント T_s の項で与えられる。

$$q_{s,k} = \frac{R^2}{\rho^2} \frac{T_s}{J} \tilde{q}_k \dots\dots\dots(25)$$

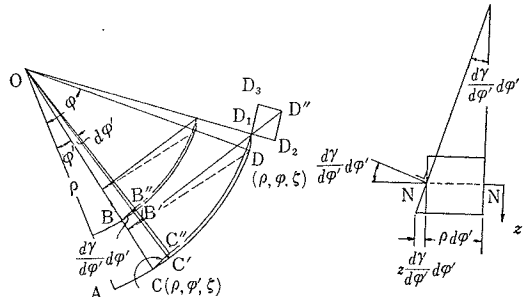
5. 曲率面外の単純曲げ

曲率面外の単純曲げとは、中心 O を頂点とする円錐の側面にそうように曲げられた変形状態をいう。このとき、図-11 のように変形前に扇形 OAD が作る平面上にあって、微小中心角 $d\varphi'$ をはさむ2つを半径 OC, OC' で切り取られるような微小要素 $CC''BB'$ は変形後も共通の平面 OCC'' 上にあることになる。そして断面 $B'C'$ が断面 BC に対し dr だけ傾き $B''C''$ に至る。すなわち、 $\angle B'BB'' = \angle C'CC'' = d\tau$, そして $d\tau/d\varphi'$ は φ' のいかんにかかわらず桁軸方向に一定である。

このような隣接 2 断面の相対的傾きによって、原点 OA と中心角 φ をなす断面上の点 $D(\rho, \varphi, \zeta)$ の変位成分は、結局次式で与えられる。

点 D が中立軸の下方 z にあれば、

図-11 単純曲げにおける変位
Fig. 11 Displacements under pure bending.



$$\left. \begin{aligned} u &= \int_0^{\varphi} \sin(\varphi - \varphi') z \frac{d\tau}{d\varphi'} d\varphi' \\ v &= \int_0^{\varphi} \rho \sin(\varphi - \varphi') \frac{d\tau}{d\varphi'} d\varphi' \\ w &= \int_0^{\varphi} \cos(\varphi - \varphi') z \frac{d\tau}{d\varphi'} d\varphi' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

式 (26) をひずみ成分式 (5) に代入すれば、

$$\epsilon_\rho = \epsilon_\zeta = \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\zeta} = \tau_{\zeta\rho} = 0, \quad \epsilon_\varphi = \frac{z}{\rho} \frac{d\tau}{d\varphi}$$

よって応力成分は、

$$\sigma_\varphi = E_s \frac{z}{n\rho} \frac{d\tau}{d\varphi} \dots\dots\dots(27)$$

のみで、ほかはすべて 0 となっている。

6. 曲率面内の単純曲げ

曲率中心 O をとおる鉛直線すなわち z 軸を中心軸とする円筒面に巻きつけるように桁を湾曲させた場合を曲率面内の単純曲げと定義する。

図-12 曲率面内の単純曲げ
Fig. 12 Pure bending in its own plane.

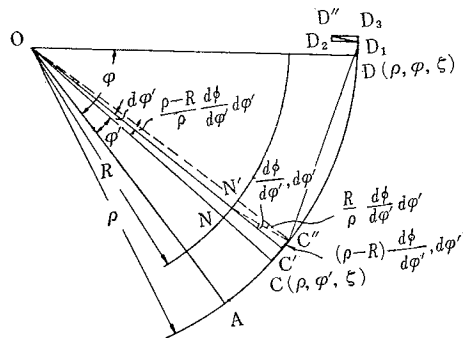


図-12 に示すように原線 OA から中心角 φ' をなす断面 NC に対し、中心角 $\varphi' + d\varphi'$ をなす隣接断面 $N'C'$ は変形後、桁の面内で $d\phi$ だけ回転する。そして変形後 $N'C''$ となる。このため断面 φ における点 D の変位成分 u, v, w はつぎのようである。

$$\left. \begin{aligned} u &= - \int_0^{\varphi} R \sin(\varphi - \varphi') \frac{d\phi}{d\varphi'} d\varphi' \\ v &= 0 \\ w &= \int_0^{\varphi} [\rho - R \cos(\varphi - \varphi')] \frac{d\phi}{d\varphi'} d\varphi' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

これらをひずみ成分の式 (5) に代入すれば、

$$\epsilon_\rho = \epsilon_\zeta = \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\zeta} = \tau_{\zeta\rho} = 0, \quad \epsilon_\varphi = \frac{y}{\rho} \frac{d\phi}{d\varphi}$$

よって応力成分としては、

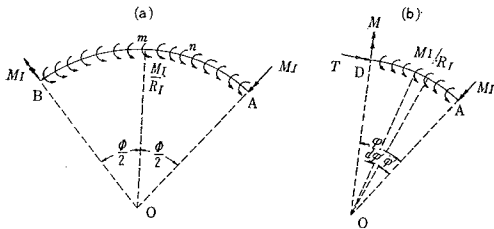
$$\sigma_\varphi = \frac{E_s}{n} \frac{y}{\rho} \frac{d\phi}{d\varphi} \dots\dots\dots(29)$$

7. 断面主軸 \tilde{y} まわりの単純曲げ

図-13 に示すように自由な曲線桁の両端 A, B において断面の主軸 \tilde{y} のまわりに、大きさ等しく方向逆の曲げモーメント M_I を作用する。さらに外的平衡を保持するため桁軸方向の単位長あたり強度 M_I/R_I の等分布トルクを加えた場合について考察する。

図-13 単純曲げにおける外力と断面力

Fig. 13 External and internal forces under pure bending out of initial plane.



任意断面 D における断面力を計算すれば、つぎのようになる。

$$Q=0$$

$$\tilde{M}_{\tilde{y}} = \left\{ M_I \cos \varphi + \int_0^\varphi \frac{M_I}{R} \sin(\varphi - \varphi') \cdot R d\varphi' \right\} \cdot \cos^2 \vartheta + M_I \sin^2 \vartheta = M_I$$

$$T = \left\{ M_I \sin \varphi - \int_0^\varphi M_I \cos(\varphi - \varphi') d\varphi' \right\} \cos \vartheta = 0$$

これより明らかなように、桁軸方向に一定の曲げモーメント M_I が主軸 \tilde{y} のまわりに生ずる。そして、ほかの断面力は存在しない。すなわち単純曲げの状態である。このとき等断面桁ならば、変形量も桁軸方向に同じ状態なることがわかる。

また一定の湾曲率 $d\eta/d\varphi'$ でもって、断面が主軸 \tilde{y} のまわりに回転するように湾曲する。そこで点 D の変位成分は式 (26), (28) から

$$u = \int_0^\varphi \left\{ \sin(\varphi - \varphi') z \frac{d\eta}{d\varphi'} \cos \vartheta + R \sin(\varphi - \varphi') \frac{d\eta}{d\varphi'} \sin \vartheta \right\} d\varphi'$$

$$v = \int_0^\varphi \rho \sin(\varphi - \varphi') \frac{d\eta}{d\varphi'} \cos \vartheta d\varphi'$$

$$w = \int_0^\varphi \left\{ \cos(\varphi - \varphi') z \frac{d\eta}{d\varphi'} \cos \vartheta + [R \cos(\varphi - \varphi') - \rho] \frac{d\eta}{d\varphi'} \sin \vartheta \right\} d\varphi'$$

上式をひずみ成分式 (5) に代入すれば、

$$\epsilon_\rho = \epsilon_\zeta = \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\zeta} = \tau_{\zeta\rho} = 0, \quad \epsilon_\varphi = \frac{z}{\rho} \frac{d\eta}{d\varphi}$$

よって応力成分は、

$$\sigma_\varphi = E_s \frac{z}{n\rho} \frac{d\eta}{d\varphi} (= \sigma_I) \dots\dots\dots(a)$$

のみで、ほかはすべて 0 である。

曲げモーメント $M_{\tilde{y}}$ と垂直応力 σ_I との関係は、

$$M_{\tilde{y}} = \int_F \sigma_I z dF$$

上式に式 (a) を代入して、

$$M_{\tilde{y}} = E_s I_{\tilde{y}} \frac{d\eta}{R d\varphi} \dots\dots\dots(b)$$

ここに $I_{\tilde{y}} = \int_F \frac{R z^2}{n\rho} t ds$ で断面の主軸 \tilde{y} まわりの主断面 2 次モーメントである。

つぎに式 (a) と (b) とより η を消去すれば、

$$\sigma_I = \frac{M_{\tilde{y}} z}{n I_{\tilde{y}} \rho} \dots\dots\dots(30)$$

また軸力が存在しないので、次式が成立する。

$$\int_F \frac{z t}{n \rho} ds = 0 \dots\dots\dots(31)$$

8. 断面主軸 \tilde{z} まわりの単純曲げ

前項の単純曲げと同じように自由な曲線桁の両端 A, B において、断面の主軸 \tilde{z} のまわりに大きさ等しく方向逆の曲げモーメント M_{II} を作用する。さらに外的平衡を保持するため、桁軸方向の単位長あたり M_{II}/R_{II} なる等分布トルク荷重を作用させる場合について考察する。

任意断面 D における断面力は、

$$Q=0, \quad M_{\tilde{z}} = M_{II}, \quad T=0$$

この場合、桁軸方向に一定の曲げモーメント M_{II} が主軸 \tilde{z} のまわりに生ずる。そして、ほかの断面力は生じない。これも単純曲げである。

変形については一定の湾曲率 $dx/d\varphi$ でもって断面が主軸 \tilde{z} のまわりに回転するように湾曲する。任意点 D の変位成分は、式 (26), (28) から

$$u = \int_0^\varphi \sin(\varphi - \varphi') \frac{dx}{d\varphi'} (z \sin \vartheta - R \cos \vartheta) d\varphi'$$

$$v = \int_0^\varphi \rho \sin(\varphi - \varphi') \frac{dx}{d\varphi'} \sin \vartheta d\varphi'$$

$$w = \int_0^\varphi \{ [\rho - R \cos(\varphi - \varphi')] \cos \vartheta + \cos(\varphi - \varphi') z \sin \vartheta \} \frac{dx}{d\varphi'} d\varphi'$$

これらをひずみ成分の式 (5) に代入すれば、

$$\epsilon_\rho = \epsilon_\zeta = \tau_{\rho\varphi} = \tau_{\varphi\zeta} = \tau_{\zeta\rho} = 0, \quad \epsilon_\varphi = \frac{\tilde{y}}{\rho} \frac{dx}{d\varphi}$$

よって応力成分としては、

$$\sigma_\varphi = \frac{E_s}{n} \frac{\tilde{y}}{\rho} \frac{dx}{d\varphi} (= \sigma_{II}) \dots\dots\dots(a)$$

のみで、ほかは全部0となる。

また軸力が存在せぬ条件から

$$\int_F \frac{\tilde{y}t}{n\rho} ds = 0 \dots\dots\dots(32)$$

つぎに曲げモーメント M_z は明らかに

$$M_z = \int_F \sigma_{II} \tilde{y} dF$$

式 (a) を代入して、

$$I_z = \int_F \frac{R\tilde{y}^2}{n\rho} t ds \dots\dots\dots(33)$$

として、

$$M_z = E_s I_z \frac{d\chi}{Rd\phi} \dots\dots\dots(b)$$

式 (a) と (b) とから ϕ を消去すれば、

$$\sigma_{II} = \frac{M_z \tilde{y} R}{n I_z \rho}$$

一方、条件式 (31)、(32) に定義式 (1) を用いると、座標変換して

$$G_y = 0, G_z = 0 \dots\dots\dots(34)$$

式 (34) が中立軸の位置を与える。式 (34)_z から $y = \rho - R$ なることに注目すれば、

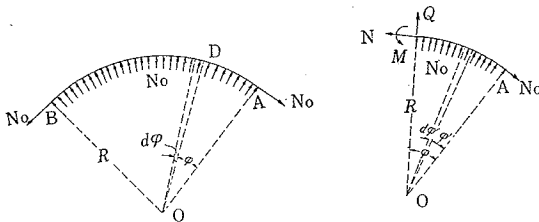
$$R = \frac{F_s}{\int_F \frac{t}{n\rho} ds} \dots\dots\dots(35)$$

また条件式 (34) は図心の定義と一致するので、単純曲げの中立軸は図心をとおることがわかる。

9. 単純引張り

図-14のように、自由な曲線桁の両端 A, B の図心に大きさ相等しい引張力 N_0 を作用させる。このとき外的つりあいを保つため、曲率半径方向に単位中心角あた

図-14 単純引張り
Fig. 14 Pure tension.



り N_0 なる強度の等分布水平荷重を作用させねばならない。このとき原線 OA と中心角 ϕ をなす断面における断面力は、

$$Q = N_0 \sin \phi - N_0 \int_0^\phi \cos(\phi - \phi') d\phi' = 0$$

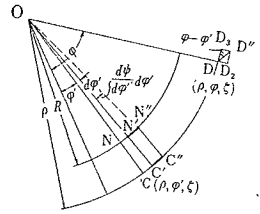
$$N = N_0 \cos \phi + N_0 \int_0^\phi \sin(\phi - \phi') d\phi' = N_0$$

$$M_z = N_0 R - NR = 0$$

で断面力としては、一定の引張力 N_0 が生ずるだけである。

つぎに変位について考える。図-15に示すように、原線 OA と中心角 ϕ' をなす断面 NC に対し、 $\phi' + d\phi'$ をなす隣接断面 $N'C'$ は、桁全体の伸びに対応して相対変位を生じ、 $N''C''$ に至る。

図-15 単純引張りにおける変位
Fig. 15 Displacements under pure tension.



桁せんいの変位量は、次式で与えられる。

$$N''N' = C''C' = Rd\phi$$

それで点 $D(\rho, \phi, \zeta)$ の変位成分 u, v, w は

$$\left. \begin{aligned} u &= \int_0^\phi R \frac{d\phi}{d\phi'} \sin(\phi - \phi') d\phi', \\ v &= 0 \\ w &= \int_0^\phi R \frac{d\phi}{d\phi'} \cos(\phi - \phi') d\phi' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

ひずみ成分は、式 (5) に上式を代入して得られる。

$$\epsilon_\rho = \epsilon_\zeta = \tau_{\rho\phi} = \tau_{\phi\zeta} = \tau_{\zeta\rho} = 0, \quad \epsilon_\phi = \frac{R}{\rho} \frac{d\phi}{d\phi}$$

この場合の応力成分としては、

$$\sigma_\phi = E_s \frac{R}{n\rho} \frac{d\phi}{d\phi} (= \sigma_n) \dots\dots\dots(a)$$

ほかの応力成分はすべて0である。応力 σ_n と軸力 N との関係は

$$N = \int_F \sigma_n dF$$

上式に式 (a) を代入して、

$$N = E_s \frac{d\phi}{d\phi} \int_F \frac{R}{\rho} \frac{t}{n} ds$$

式 (35) を用いて、

$$N = E_s F_s \frac{d\phi}{d\phi} \dots\dots\dots(b)$$

式 (a)、(b) から $d\phi/d\phi$ を消去すれば、

$$\sigma_n = \frac{R}{n\rho} \frac{N}{F_s} \dots\dots\dots(37)$$

一方、 \tilde{x} 軸まわりの曲げモーメント M_z を求めてみると、

$$M_z = \int_F \sigma_n \tilde{y} dF$$

上式に式 (37) を代入すれば、条件式 (32) から $M_z = 0$ なることを知る。同じように \tilde{y} 軸まわりの曲げモーメント M_y についても、 $M_y = 0$ である。すなわち、単純引張りにおいては曲げモーメントが存在しない。

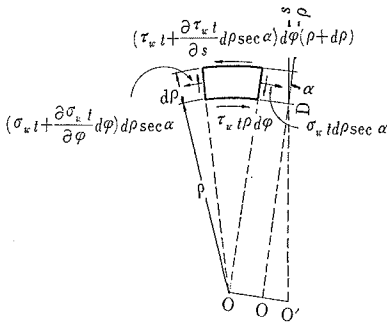
10. 曲げねじり

単純ねじりをさらに一般化して、ねじりモーメント T とせん断力 Q が ϕ の関数として変化する場合は曲げねじりと定義する。実際にそのような変形状態を作り出すことができる。この場合 T が桁軸方向に一定でないの、等断面でも関係式 (23) からわかるように、ねじり

率 $d\theta/d\varphi$ も φ の関数として変化する。したがって式 (13)₁ より垂直応力 σ_w がそり拘束の結果として生ずる。そうすると σ_w につりあうために、円周方向に 2 次せん断応力 τ_w が誘発する。それを求めるため微小中心角 $d\varphi$ をはさむ隣接 2 断面と、半径 ρ および $\rho+d\rho$ を有する円筒面で切り取られる微小要素に作用する応力間のつりあいについて考える。図-16 において微小要素の薄板の中央面にそり座標 s の方向は、一般に座標 ρ の方向と角 α だけ傾いている。このことを考慮して、つぎのつりあい条件式をうる。

図-16 曲げねじりにおける応力

Fig. 16 Stresses under torsion bending.



$$\frac{\partial \tau_w t}{\partial s} + \frac{2 \tau_w t}{\rho} \cos \alpha + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_w t}{\partial \varphi} = 0 \dots\dots\dots (c)$$

今、2 次せん断流 q_w としてつぎのものを採用する。

$$q_w = \tau_w t = -\frac{E_s}{R^3} \frac{d^3 \theta}{d\varphi^3} q^*(s) \dots\dots\dots (38)$$

この q^* は s のみの関数で、曲げねじり関数と名づける。式 (38) を微分方程式 (c) に代入し、共通項を消去すれば、

$$\frac{dq^*}{ds} + 2 \frac{\cos \alpha}{\rho} q^* = \frac{R}{\rho} \frac{W_s t}{n}$$

これを解いて

$$q^* = \frac{1}{\rho^2} \left(R \int_0^s W_s \frac{t}{n} \rho ds + S_w \right) \dots\dots\dots (39)$$

ここに S_w は不静定せん断流の項でつぎのように求まる。

曲げねじりを受ける曲線桁から、角 $d\varphi$ をはさむ隣接 2 断面で切り取られる要素について、ポテンシャルエネルギー $d\Pi$ を計算すれば、

$$d\Pi = \frac{1}{2} \int_F \left(\frac{\sigma_w^2}{E} + \frac{\tau_w^2}{G} \right) t \rho ds d\varphi - T \frac{d\theta}{d\varphi} d\varphi$$

したがって桁全長にわたるポテンシャルエネルギー Π は、

$$\Pi = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\theta \int_F \left(\frac{\sigma_w^2}{E} + \frac{\tau_w^2}{G} \right) t \rho ds d\varphi - \int_0^\theta T \frac{d\theta}{d\varphi} d\varphi \right\} \dots\dots\dots (d)$$

一般に閉断面について小室 k に属するせん断応力 τ_k は、単純ねじりのせん断流 q_{sk} と、2 次せん断流 q_{wk} とからなる。開断面部分については q_s が存在しない。

$$\tau_k = \frac{1}{t} (q_{sk} + q_{wk}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{境界でない壁} \\ \text{境界壁} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

このうち、 q_{wk} は式 (38)、(39) からつぎの形に書ける。

$$q_{wk} = -\frac{E_s}{R^3} \frac{d^3 \theta}{d\varphi^3} \frac{1}{\rho^2} (\bar{q}^*_{wk} + S_{wk}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{境界でない壁} \\ \text{境界壁} \end{array} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

ここに

$$\bar{q}^*_{wk} = R \int_0^s W_s \frac{t \rho}{n} ds \dots\dots\dots (42)$$

そこで最小仕事の原理にもとづき S_{wk} の変分 δS_{wk} に対し Π の変分 $\delta \Pi$ は

$$\delta \Pi = 0$$

この条件から、式 (d)、(40)~(42) を用いて

$$\begin{aligned} & -\tilde{q}_{k-1} \frac{d\theta}{R d\varphi} \int_{k,k-1} \frac{R^2 n_g}{\rho^3 t} ds + \tilde{q}_k \frac{d\theta}{R d\varphi} \int_k \frac{R^2 n_g}{\rho^3 t} ds \\ & -\tilde{q}_{k+1} \frac{d\theta}{R d\varphi} \int_{k,k+1} \frac{R^2 n_g}{\rho^3 t} ds + \int_k \frac{R q_{wk}}{G \rho t} ds \\ & - \frac{d\theta}{R d\varphi} \int_k \frac{R^2 r_s}{\rho^2} ds = 0 \end{aligned}$$

上式の第 1 項、第 2 項、第 3 項および第 5 項は方程式 (22) によって消し合い、結局つぎの条件式をうる。

$$\int_k \frac{q_{wk} n_g}{\rho t} ds = 0 \dots\dots\dots (43)$$

条件式 (43) に式 (41) を代入すれば、 S_{wk} に関するつぎのような連立方程式をうる。

$$\begin{aligned} & -S_{w,k-1} \int_{k,k-1} \frac{R^2 n_g}{\rho^3 t} ds + S_{wk} \int_k \frac{R^2 n_g}{\rho^3 t} ds \\ & - S_{w,k+1} \int_{k,k+1} \frac{R^2 n_g}{\rho^3 t} ds = - \int_k \frac{R^2 \bar{q}^*_{wk} n_g}{\rho^3 t} ds \quad (44) \end{aligned}$$

つぎに、

$$M_w = \frac{1}{R} \int_F \sigma_w W_s \rho dF \dots\dots\dots (45)$$

によって曲げねじりモーメント M_w を定義する。式(45)に応力 (13)₁ を代入し、

$$C_w = \int_F \frac{\rho}{R} W_s^2 \frac{t}{n} ds \dots\dots\dots (46)$$

として、曲げねじりこわさ $E_s C_w$ を定義する。そうすると M_w は、

$$M_w = E_s C_w \frac{d^2 \theta}{R^2 d\varphi^2} \dots\dots\dots (47)$$

そして式 (47) と式 (13)₁ とから M_w から直接 σ_w を求める公式をうる。

$$\sigma_w = \frac{M_w}{C_w} \frac{W_s}{n} \dots\dots\dots (48)$$

一方、2 次せん断流 q_w からねじりモーメント T_w を生じ、

$$T_w = \int_F q_w r_s ds$$

上式に式 (41)~(43) を用い、変形すれば、

$$T_w = -E_s C_w \frac{d^3 \theta}{R^3 d\varphi^3} \dots\dots\dots(49)$$

結局、合ねじりモーメント T は T_s と T_w の和であるから、式 (23) と (49) とから

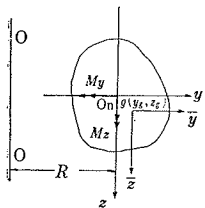
$$T = G_s J \frac{d\theta}{R d\varphi} - E_s C_w \frac{d^3 \theta}{R^3 d\varphi^3} \dots\dots\dots(50)$$

11. 一般曲げ

図-17 において横断面の図心 O_n を原点として、 ρ 軸

図-17 直角座標

Fig. 17 Rectangular coordinates.



に平行に y 軸、 z 軸と平行、逆向きに x 軸をとる。

さて、 y 軸および z 軸まわりの曲げモーメント M_y, M_z , それらの軸の方向のせん断力 H, \bar{Q} , そして軸力 N が同時に存在するような一般的な曲げの場合について論じる。この場合、断面内任意点 (y, z) の変位は

5., 6., 9. で得られたそれぞれの

変位の重ね合わせた値をとるものと考えられる。そこで、一般曲げの垂直応力 σ_x を、つぎのように表わす。

$$\sigma_x = a \frac{R}{n\rho} + b \frac{y}{n\rho} + c \frac{z}{n\rho} \dots\dots\dots(a)$$

ここに、 a, b, c は定数で、つぎのように決められる。

まず、断面力と応力との関係から、

$$\int_F \sigma_x t ds = N, \int_F \sigma_x z t ds = M_y, \int_F \sigma_x y t ds = M_z$$

式 (a) を上式に代入して、 a, b, c について解けば、

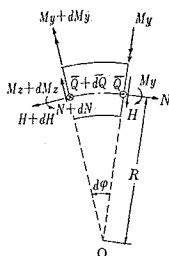
$$\sigma_x = \frac{N}{F_s} \frac{R}{n\rho} + \frac{M_z I_y - M_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \frac{R}{n\rho} y + \frac{M_y I_z - M_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \frac{R}{n\rho} z \dots\dots\dots(51)$$

一般に断面力が φ の関数として変化すれば、 σ_x につりあうために、せん断応力 τ が生ずる。 σ_x と τ とのつりあいは、図-16 の状態と類似していて、

$$\frac{\partial \tau t}{\partial s} + \frac{2\tau t}{\rho} \cos \alpha + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_x t}{\partial \varphi} = 0 \dots\dots\dots(b)$$

図-18 一般曲げにおける断面力

Fig. 18 Internal forces at any cross section under general bending.



つぎに図-18 のように、微小中心角 $d\varphi$ をはさむ2つの断面で切り取られる要素に作用する断面力のつりあいは次式のようなものである。 \bar{Q} を曲げによるせん断力とすれば、

$$\frac{dM_x}{d\varphi} = RH, \quad \frac{dN}{d\varphi} = -H, \quad \frac{dM_y}{d\varphi} = R_s \bar{Q} \dots\dots(52)$$

式 (b) に式 (51) を代入し、関係式 (52) を考慮すれば、せん断流 q が得られる。

$$q = \tau t = -\{H \bar{q}_h(s) + \bar{Q} \bar{q}_b(s)\} \dots\dots\dots(53)$$

ここに

$$\bar{q}_h(s) = \begin{cases} \frac{R}{\rho^2} (\bar{q}_h + S_{h,k}) & \text{境界でない壁} \\ \frac{R}{\rho^2} (\bar{q}_h + S_{h,k} - S_{h,k\pm 1}) & \text{境界壁} \end{cases} \dots\dots(54)$$

$$\bar{q}_b(s) = \begin{cases} \frac{R_0}{\rho^2} (\bar{q}_b + S_{b,k}) & \text{境界でない壁} \\ \frac{R_0}{\rho^2} (\bar{q}_b + S_{b,k} - S_{b,k\pm 1}) & \text{境界壁} \end{cases} \dots\dots(55)$$

$$\bar{q}_h = \frac{I_y f_z - I_{yz} f_y}{I_y I_z - I_{yz}^2} R - \frac{f_s}{F_s} \dots\dots\dots(56)$$

$$\bar{q}_b = \frac{I_z f_y - I_{yz} f_z}{I_y I_z - I_{yz}^2} R \dots\dots\dots(57)$$

そして、

$$f_z = \int_0^s \frac{y t}{n} ds, \quad f_y = \int_0^s \frac{z t}{n} ds, \quad f_s = \int_0^s \frac{t}{n} ds \dots\dots(58)$$

$S_{h,k}, S_{b,k}$ はともに不静定せん断流の項である。これらもやはり、最小仕事の原理を適用して 10. と類似の条件をうる。

$$\oint_k \frac{\bar{q}_h n_g}{\rho t} ds = 0, \quad \oint_k \frac{\bar{q}_b n_g}{\rho t} ds = 0$$

これらの条件式に式 (54), (55) を代入すれば、つぎのような $S_{h,k}$ および $S_{b,k}$ に関するそれぞれの連立方程式をうる。

$$-S_{h,k-1} \int_{k,k-1} \frac{R^3 n_g}{\rho^3 t} ds + S_{h,k} \int_k \frac{R^3 n_g}{\rho^3 t} ds - S_{h,k+1} \int_{k,k+1} \frac{R^3 n_g}{\rho^3 t} ds = - \int_k \frac{R^3 \bar{q}_h n_g}{\rho^3 t} ds \dots\dots(59)$$

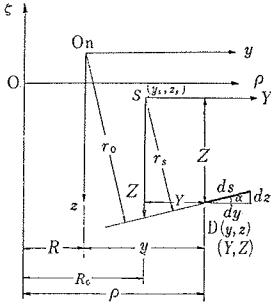
$$-S_{b,k-1} \int_{k,k-1} \frac{R^3 n_g}{\rho^3 t} ds + S_{b,k} \int_k \frac{R^3 n_g}{\rho^3 t} ds - S_{b,k+1} \int_{k,k+1} \frac{R^3 n_g}{\rho^3 t} ds = - \int_k \frac{R^3 \bar{q}_b n_g}{\rho^3 t} ds \dots\dots(60)$$

12. せん断中心

一般の荷重状態において、曲線桁には曲げと同時にねじりをともなう。この場合、ねじり中心としてせん断中心を選び、そのまわりにねじりモーメントを計算したり、ねじり角を測ることにすれば、初めて曲げモーメントとか曲げねじりモーメントが前項までに与えられた、はっきりした公式で定義できることになる。そのような意味で重要なせん断中心 S の位置を求めよう。

図-19 において桁軸 O_n を原点とし直角座標 (y, z)

図-19 せん断中心
Fig. 19 Shear center.



を設定する。y軸は ρ 軸に平行にとる。さらにせん断中心 S を原点とし、 (y, z) 座標に平行な直角座標 (Y, Z) を設ける。せん断中心 S の (y, z) 座標を (y_s, z_s) であるとしておく。そうすると y_s および z_s を知れば、 S の位置が確定

する。

それで S をねじり中心と考えれば、

$$\int_0^s \frac{r_s}{\rho^2} ds = \int_0^s \frac{r_0}{\rho^2} ds - z_s \int_0^s \frac{dy}{\rho^2} + y_s \int_0^s \frac{dz}{\rho^2} \dots (a)$$

ここに r_0 は軸 O_n から薄板中心線の接線に至る距離である。上式第 2, 3 項の積分は、つぎのようになる。

$$\int_0^s \frac{dy(s)}{\rho^2} = \frac{y - y_0}{\rho \rho_0}$$

$$\int_0^s \frac{dz(s)}{\rho^2} = \frac{1}{R} \left(\frac{z}{\rho} - \frac{z_0}{\rho_0} + \int_0^s \frac{r_0}{\rho^2} ds \right)$$

式中、 $s=0$ における座標の値を $y=y_0, z=z_0, \rho=\rho_0$ と記しておいた。上式を式 (a) に用いると、

$$\int_0^s \frac{r_s}{\rho^2} ds = \frac{R_0}{R} \int_0^s \frac{r_0}{\rho^2} ds + y_s \frac{1}{R} \left(\frac{z}{\rho} - \frac{z_0}{\rho_0} \right) - z_s \frac{y - y_0}{\rho \rho_0} \dots (b)$$

式 (b) から容易に、

$$\int_k^s \frac{r_s}{\rho^2} ds = \frac{R_0}{R} \int_k^s \frac{r_0}{\rho^2} ds \dots (c)$$

式 (c) を方程式 (22) の右辺に代入し、

$$\tilde{q}_k = \frac{R_0}{R} \tilde{q}_{k,0} \dots (61)$$

とおけば、 $\tilde{q}_{k,0}$ に関する連立方程式をうる。

$$-\tilde{q}_{k-1,0} \int_{k-1,k} \frac{R^3}{\rho^3} \frac{n_g}{t} ds + \tilde{q}_{k,0} \int_k \frac{R^3}{\rho^3} \frac{n_g}{t} ds - \tilde{q}_{k+1,0} \int_{k,k+1} \frac{R^3}{\rho^3} \frac{n_g}{t} ds = R^2 \int_k \frac{r_0}{\rho^2} ds \dots (22)'$$

方程式 (22)' を解き、 $\tilde{q}_{k,0}$ を知れば、式 (61) からねじり関数 \tilde{q}_k をうる。

つぎに式 (20) に式 (b), (61) を代入すれば、断面内任意点のそり関数 W_s を与える。

$$W_s = \frac{R_0}{R} \bar{W}_{s,0} + \frac{R}{\rho} (z_s y - y_s z) + W_0 \dots (62)$$

ここに、

$$\bar{W}_{s,0} = \int_0^s \frac{R^3}{\rho^3} \frac{n_g}{t} \tilde{q}_{k,0} ds - R^2 \int_0^s \frac{r_0}{\rho^2} ds \quad \left. \begin{array}{l} \text{境界でない壁} \\ \text{境界壁} \end{array} \right\} \dots (63)$$

W_0 は $s=0$ での W_s 値に関係し、つぎの条件から決定できる。断面には σ_w によって軸力を生じない、すなわち

$$\int_F \sigma_w dF = 0 \dots (d)$$

式 (d) に式 (62) を代入すれば、 W_0 は、

$$W_0 = \frac{-R_0}{R} \frac{\int_F \bar{W}_{s,0} \frac{t}{n} ds}{F_s} \dots (64)$$

さらに σ_w によっては、直角 2 方向に曲げモーメントを生じないという条件から、

$$\int_F \sigma_w y dF = 0, \quad \int_F \sigma_w z dF = 0 \dots (e)$$

条件 (d), (e) は曲げねじり垂直応力 σ_w が、それ自身のみでは平衡状態にあることを意味する。

条件 (e) を用いれば、つぎのような連立方程式をうる。

$$\left. \begin{array}{l} (I_{yz} - B_z) y_s - I_z z_s = C_z \\ (I_y - B_y) y_s - I_{yz} z_s = C_y \end{array} \right\} \dots (65)$$

ここに

$$C_y = \int_F \frac{W_{s,0} z t}{n} ds, \quad C_z = \int_F \frac{W_{s,0} y t}{n} ds \dots (66)$$

$$B_y = \frac{C_y}{R}, \quad B_z = \frac{C_z}{R} \dots (67)$$

$$W_{s,0} = \bar{W}_{s,0} + W_0 \frac{R}{R_0} \dots (68)$$

最後に、せん断中心 S の座標は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} y_s = \frac{C_y I_z - C_z I_{yz}}{I_z (I_y - B_y) - I_{yz} (I_{yz} - B_z)} \\ z_s = \frac{C_y (I_{yz} - B_z) - C_z (I_y - B_y)}{I_z (I_y - B_y) - I_{yz} (I_{yz} - B_z)} \end{array} \right\} \dots (69)$$

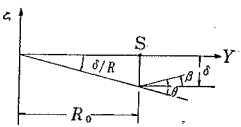
13. 変形

一般に曲線桁に横荷重が作用すれば、せん断中心 S が鉛直下方へ δ だけたわみ、

図-20 変形

断面全体が S のまわりに回転角 β だけ回転する。図-20 に示すように、 δ の正方向を鉛直下方に β の正方向を反時計方向としておく。

Fig. 20 Deformation.



そうすれば基本的変形状態 (4. 単純ねじりと 5. 曲率面外の曲げ) から明らかのように、ねじり角 θ は次式で与えられる。

$$\theta = \beta + \frac{\delta}{R_0} \dots (70)$$

θ の正方向も、反時計方向にとる。

しかるに、ある断面 φ におけるせん断中心 S の変位 v は、式 (7), と (26) において、 $Y=0, \rho=R_0$ とおき、加え合わせば得られる。そのときの v を $v=v_0$ と記すと、

$$v_0 = R_0 \left\{ \int_0^\varphi \sin(\varphi - \varphi') \frac{d\tau}{d\varphi'} d\varphi' \right. \\ \left. - \int_0^\varphi [1 - \cos(\varphi - \varphi')] \frac{d\theta}{d\varphi'} d\varphi' \right\}$$

これより,

$$\frac{d^2 v_0}{d\varphi^2} + v_0 = R_0 \left(\frac{d\tau}{d\varphi} - \theta \right)$$

なる関係が存在することを証明できる。ところが、 $v_0 = -\delta$ であるから、

$$\frac{d^2 \delta}{d\varphi^2} + \delta = R_0 \left(\theta - \frac{d\tau}{d\varphi} \right) \dots\dots\dots (71)$$

14. 結 言

薄肉断面をもつ曲線桁に対し、薄肉構造理論を拡張し、立体的解析を行なった。

まず、①断面の幾何学的形状に関する力学的諸量を明確に定義した。②基本的変形状態について調べ、それぞれの場合の変形量、断面力および応力間の関係を明らかにした。③一般曲げの場合について、垂直応力、せん断応力の横断面内分布および断面力との関係を明らかにした。④せん断中心の意義を明らかにし、その位置を曲率半径の関数として与える公式を得た。⑤変形量すなわち、ねじり角、断面回転角、たわみ、および弯曲の曲率の間の関係を明らかにした。

いずれも本文の内容において、曲率半径の項を無限大とすれば、薄肉直線桁の理論において与えられる諸公式に一致する。

以上を総合して、薄肉曲線桁についての応力および変形量の解析にあたって、従来とかくなおざりにされていた諸特性を明確にしたものである。特に薄肉曲線桁を強固な横繫材で結合した曲線橋を全橋断面不変の仮定にもとづいて一体として曲げねじり理論を適用するような場合、橋幅方向の拡がりが比較的大きくなるから、本文の公式にしたがって応力分布を計算するのが適切である。

本文の結果と関連して、単純支持および連続形式の薄肉曲線桁橋に関する研究成果を引続き発表する予定である。いずれも、すでに昭和 35 年度年次学術講演会ならびに関西支部学術講演会に発表したものである。

参 考 文 献

- 1) Biezeno, C.B.u., Grammel, R. : Technische Dynamic 2 auflage, Berlin, 1953, Bd II, S 339-438
- 2) Biezeno, C.B. and Grammel, R. : Engineering Dynamics 1956, Vol. 2, p. 105~224
- 3) Wansleben, E.H.F. : Die Theorie der Drillfestigkeit von Stahlbauteilen, 1956, Köln
- 4) 小西一郎・小松定夫 : 曲線箱桁橋の立体的応力解析, 第 15 回土木学会年次学術講演会講演概要, 第 II 部 p 7, 昭 35.5.
- 5) 倉西正嗣 : 弾性学, p. 216~240

(原稿受付 : 1962.3.14)

ON FUNDAMENTAL THEORY OF THIN-WALLED CURVED GIRDER

*By Dr. Eng., Ichiro Konishi C.E. Member and
Dr. Eng., Sadao Komatsu C.E. Member*

Synopsis

Until recently many theoretical studies concerning the slender curved beam with solid section as reinforced concrete structure have already been reported.

These theories have dealt chiefly with the simple case where the cross section is relatively small to the radius of curvature and the length of the girder.

Accordingly, in previous investigations it was conventionally considered that the characteristics on the statical behavior could be made clear by investigating the variations of the stress-resultants, moments, and deformations along the girder axis.

However, the larger the cross section, the greater the difference between the actual stress distribution at the cross section and that obtained by the well-known formula for straight girders. The so-called curved beam under the bending moment in its own plane is a fine example.

In general, it may be expected that analogous phenomena will be observed in the curved girder, with arbitrary cross sectional shape, subjected to any external forces. In other words, corresponding to the relation between primary bending theory and the curved beam one, it may be very important to establish a fundamental engineering theory for the thin-walled curved girder developed from the ordinary thin-walled structural theory referring to the straight girder.

In this paper, the authors firstly give the following five fundamental modes of deformations much careful consideration ;

- (1) pure torsion,
- (2) pure bending perpendicular to its own plane,
- (3) torsion bending,
- (4) pure bending in its own plane, and

(5) pure tension.

Thus, starting with the basic equations that combine the displacements and the strain components represented with cylindrical co-ordinate, the authors have given some basic important formulae-

- (a) the static equilibriums of stress components,
- (b) the relation between the stresses and the deformations,
- (c) the expression for the calculation of the cross sectional properties, and
- (d) the stress distribution over the cross section etc.

It is much remarkable that the analysis takes into account the influence of curvature of curved girder axis as well as the several geometrical and statical conditions depending upon the situation of the considering point at the cross section in question.

Furthermore, an attempt has been made to present the thin-walled theory for the case where ordinary curved girder is subjected not only to the shear forces through the flexural axis and bending moments but also to the axial force under any external loading.

On the basis of the fundamental consideration described previously, the important stress formulae have been derived in forms similar to those of straight girder.

When a curved girder is loaded normally to its own plane or is twisted, the bending and torsion are generally bicoupled. Whenever such phenomena should be discussed, it is to be desired that the position of so-called shear center would be found. The locus of such point is commonly determined on conditions that the torsion bending direct stress at a section constrained against warping is in self-equilibrium.

If the additional stress distribution and twist are calculated from the torque about the shear

center, the meaning of the bending moment can be defined as the resultant moment with respect to the neutral axis due to the whole direct stress.

So, the formula for both rectangular coordinates of the shear center depending on the cross sectional properties have been given.

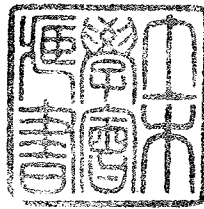
Finally, in the case where a curved girder subjected to the transverse or torque loading deflects downward and at the same time rotates about the shear center of the cross section, the geometrical relation between the absolute rota-

tion and the twisting angle, of a cross section has been expressed plainly.

From above results, various characteristics, which was too ready to be usually lost in the analysis for the stresses in, and deformations of, the thin-walled curved girder with any supporting conditions, could be clarified.

In conclusion, above discussion may be considered to be an important basic material for structural analysis of the ordinary curved girder.

(Received by the Society March 14, 1962)



土木学会論文集編集委員

委員長	丸安隆和	副委員長	山川尚典	委員	立松俊彦	委員	松尾新一郎
委員	安芸周利	委員	倉西茂	委員	玉野治光	委員	村田二郎
委員	浅川美隆	委員	小池力	委員	土屋昭彦	委員	室町忠彦
委員	石橋金一	委員	後藤圭司	委員	西尾元充	委員	八木田功
委員	色部誠	委員	川嘉胤	委員	西片守	委員	山根孟治
委員	内田一郎	委員	佐武正雄	委員	林正道	委員	箭内寛
委員	岡内功	委員	佐藤昭二	委員	久武啓祐	委員	山本稔
委員	川島賢一	委員	佐藤吉彦	委員	堀井健一郎	幹事	吉田徹夫
委員	北川英夫	委員	多田宏行	委員	堀川清司		
委員	吉川秀	委員	高瀬信忠	委員	増田重臣		

昭和37年11月15日印刷
昭和37年11月20日発行

土木学会論文集 第87号 定価 150円(〒20円)

編集兼発行者 東京都新宿区四谷一丁目 社団法人 土木学会 末森猛雄
印刷者 東京都港区赤坂溜池5 株式会社 技報堂 大沼正吉

発行所 社団法人 土木学会 振替東京 16828 番
東京都新宿郵便局区内 新宿区四谷一丁目 電話(351) 代表 5138 番