行列による骨組構造物の解法

大 地 羊 三*

1. 緒 論

(1) まえがき

著者はさきに行列を用いて骨組構造物を解く方法について，二，三の論文を発表した。しかしそれらは個々の問題としてまとめたため，記号の取り方，公式の誘導方法などについて統一を欠き，将来の発展のためには不便なものであった。本文では記号を統一し，すべての骨組構造物に共通な基本式を誘導し，その特別な場合として個々の骨組構造物の解を求めた。

骨組構造物の解法は連立一次方程式を作り，これを解くことに帰一する。元数を制限しなければ，大ていの骨組構造物を解くための連立一次方程式を作ることは可能である。しかし構造が複雑になると連立一次方程式の元数は，加速度的に増大するため，原理的には解式ができても，実用にならないことが多かった。したがって今までは，いかにして連立一次方程式の元数を減らすか，また作られた解式をいかにして手ぎわよく，労力少なく解くかということに主眼がおかれていた。

ところが電子計算機が発明され，これが実用化されるに至って，構造力学の分野に一大変革がもたらされた。電子計算機は，小型のもので千分の数秒，大型のもので百万分の数秒という短い時間で，四則演算を行なう能力をもっている。しかも人間と違って，その計算結果は正確なものである。したがって電子計算機を使用するならば，連立一次方程式の元数が多いことは，あまり問題でなくなった。しかし，いかなる機械にも長所と短所があるように電子計算機の使用にあたっては programing というやっかいな問題があらわれた。

電子計算機は意志をもたない機械であるから，一つの計算を実施させるには，その計算順序を克明に指令してやらなければならない。しかも一つ一つの命令を電子計算機が解る記号で，順序よく配列しなければならない。この作業が programing といわれるものである。電子計算機にかけてしまえば，1時間以内で答が得られる問題でも，programing に1カ月以上の時間を要することもまれではない。しかも誤りは，そのほとんどが，この programing の際に発生する。したがっていかにして正確に早く program するかということが，新しい問題として発生した。このためには，行列を使用すると好都合である。問題の記述およびその説明には，行列は非常に有効な手段である。しかし実際に数字を入れて計算しようとすると，人力による場合は，繁雑で手間がかかるものである。この点で行列は，電子計算機に最も適した演算手段であるといえよう。

欧米では 1950 年頃から，行列による骨組構造物の解法を論じた文献が多数発表されている。また電子計算機の利用を主題とする論文も多数あるが，その大部分が行列を利用したものである。しかし，これらの論文は原理を述べたものが多く，個々の問題に適用するにあたっては，部材の結合状態，あるいは支点の状態などを考慮しながら，各問題ごとに異なった操作によって行列を作らなければならないものばかりである。したがって，すべての骨組構造物に共通な解式の誘導が望まれるわけである。

また，いかに行列が電子計算機に有効であるといっても，元数の多い行列を，一時に取り扱うことができるわけではない。電子計算機にも，おのずから定められた容量（記憶できる数字の数）がある。したがって容量を上まわる行列は，これを小行列に分割して演算を実施しなければならない。

本論文はこの2つの問題（共通な解式・小行列による演算）を解決しようとするものである。

(2) 座標軸および記号の定義

a) 行列およびベクトルの一般的な定義

矩形行列……ギリシャ文字，小文字のローマ字，ドイツ文字を用いて $[\alpha]$, $[a]$, $[\mathfrak{A}]$ 等と書く。

正方行列……小文字のローマ字を用いて $[a]$ 等と書く（小文字は矩形行列と正方行列の両方に使用するが，サフィックスその他で区別がつく）。

対角行列……大文字のローマ字を用いて $[A]$ 等と書く。

単位行列……$[E]$

転置行列……$[\overline{}]$

直交する行列……$[\alpha]_{\perp}[\bar{\alpha}]=0$ となる行列 $[\alpha]_{\perp}$ のこと。

広義の左逆行列……$[\alpha]^{-1}[\bar{\alpha}]=[E]$ となる行列 $[\alpha]^{-1}$ のこと。

列ベクトル……(M), (θ) 等と書く。

b) 座標系の定義

空間座標……空間に固定された右手系の直交座標。x, y, z で表わす。

---

* 正員 工博 国鉄鉄道技術研究所構造物研究室

部材座標……各部材に a 端，b 端の区別をつけ，a 端を原点とし，a 端より b 端に向って u 軸を取り，これと直交する面内で部材の2つの断面主軸の方向に v, w 軸を取る。この u, v, w 軸によって作られる右手系の座標を部材座標と名づける。

節点座標……各節点に固定した右手系の直交座標。ξ, η, ζ で表わす。本文では基本式の誘導以外では空間座標と一致させてある。

c）方向余弦行列

$[C_{xu}], [C_{xv}], [C_{xw}]$ 等……空間座標軸 x, y, z と部材座標軸 u, v, w とがなす角の cosine を対角線上に並べた対角行列。

$[C_{x\xi}], [C_{x\eta}], [C_{x\zeta}]$ 等……空間座標軸 x, y, z と節点座標軸 ξ, η, ζ とがなす角の cosine を対角線上に並べた対角行列。

d）形状行列

$[\alpha]$ または $[\beta]$……j 部材の a 端または b 端が i 節点と結合しているときだけ ij 元素が1となり，そうでないときは0となる行列。

$[r_{q\xi}], [r_{q\eta}], [r_{q\zeta}]$ または $[r_{m\xi}], [r_{m\eta}], [r_{m\zeta}]$……$i$ 番目の支点が j 節点と一致し，この支点に作用する反力または反力モーメントの ξ, η, ζ 方向の成分が0でないときだけそれぞれの ij 元素が1となり，そうでないときは0となる行列。

e）部材の剛性を表わす行列

$[A], [D], [J], [B]$……各部材ごとに $EF_{(i)}/L_{(i)}$, $EJ_{w(i)}/L^3_{(i)}$, $GJ_{u(i)}/L_{(i)}$, $EJ_{v(i)}/L_{(i)}$ を作り，これらを対角線上に並べた対角行列。ただし E＝ヤング係数。G＝せん断弾性係数。$L_{(i)}$, $F_{(i)}$, $J_{u(i)}$, $J_{v(i)}$ および $J_{w(i)}$＝(i) 部材の長さ，断面積，u 軸まわりの断面ねじり定数，v および w 軸まわりの断面二次モーメント。

$[\lambda_{q\xi}], [\lambda_{q\eta}], [\lambda_{q\zeta}]$ または $[\lambda_{m\xi}], [\lambda_{m\eta}], [\lambda_{m\zeta}]$……各支点に入れた節点座標方向の変位に抵抗するバネ，または回転に抵抗するバネのバネ常数を対角線上に並べた対角行列。

f）変位を表わすベクトル

$(\eta_{ua}), (\eta_{va}), (\eta_{wa})$ または $(\theta_{ua}), (\theta_{va}), (\theta_{wa})$……各部材の a 端の変位またはたわみ角を部材座標軸方向に分解し，それぞれをたてに並べた列ベクトル。

$(\eta_{ub}), (\eta_{vb}), (\eta_{wb})$ または $(\theta_{ub}), (\theta_{vb}), (\theta_{wb})$……各部材の b 端の変位またはたわみ角を部材座標軸方向に分解し，それぞれをたてに並べた列ベクトル。

$(\eta_x), (\eta_y), (\eta_z)$ または $(\theta_x), (\theta_y), (\theta_z)$……各節点の変位またはたわみ角を空間座標方向に分解し，それぞれをたてに並べた列ベクトル。

$(\eta_\xi), (\eta_\eta), (\eta_\zeta)$ または $(\theta_\xi), (\theta_\eta), (\theta_\zeta)$……各節点の変位またはたわみ角を節点座標方向に分解し，しかるのち，その中から支点の変位またはたわみ角を取り除いたものを元素とする列ベクトル。

$(\eta_{\xi r}), (\eta_{\eta r}), (\eta_{\zeta r})$ または $(\theta_{\xi r}), (\theta_{\eta r}), (\theta_{\zeta r})$……各支点の変位またはたわみ角を節点座標方向に分解し，それぞれをたてに並べた列ベクトル。

$(\eta_{0\xi r}), (\eta_{0\eta r}), (\eta_{0\zeta r})$ または $(\theta_{0\xi r}), (\theta_{0\eta r}), (\theta_{0\zeta r})$……各支点の変位または回転に対するガタを節点座標方向に分解しそれぞれたてに並べた列ベクトル。

g）外力を表わすベクトル

$(q_{ua}), (q_{va}), (q_{wa})$ または $(m_{ua}), (m_{va}), (m_{wa})$……各部材に作用する外力の a 端における合力または合モーメントを部材座標方向に分解した成分を元素とするベクトル。

$(q_{ub}), (q_{vb}), (q_{wb})$ または $(m_{ub}), (m_{vb}), (m_{wb})$……各部材に作用する外力の b 端における合力または合モーメントを部材座標方向に分解した成分を元素とするベクトル。

$(q_x), (q_y), (q_z)$ または $(m_x), (m_y), (m_z)$……各節点に作用する外力を，空間座標方向に分解した成分を元素とする列ベクトル。

$(q_\xi), (q_\eta), (q_\zeta)$ または $(m_\xi), (m_\eta), (m_\zeta)$……各節点に作用する外力を節点座標方向に分解し，しかるのち，その中から支点に関する量を取り除いたものを元素とする列ベクトル。

h）断面力および反力を表わすベクトル

$(Q_{ua}), (Q_{va}), (Q_{wa})$ または $(M_{ua}), (M_{va}), (M_{wa})$…各部材の a 端に生ずる断面力または断面モーメントを部材座標方向に分解した成分を元素とする列ベクトル。

$(Q_{ub}), (Q_{vb}), (Q_{wb})$ または $(M_{ub}), (M_{vb}), (M_{wb})$…各部材の b 端に生ずる断面力または断面モーメントを部材座標方向に分解した成分を元素とする列ベクトル。

$(Q_{fua}), (Q_{fva}), (Q_{fwa})$ または $(M_{fua}), (M_{fva}), (M_{fwa})$……各部材を両端固定ばりと仮定したとき，外力によって a 端に生ずる断面力または断面モーメントを部材座標方向に分解した成分を元素とする列ベクトル。

$(Q_{fub}), (Q_{fvb}), (Q_{fwb})$ または $(M_{fub}), (M_{fvb}), (M_{fwb})$……各部材を両端固定ばりと仮定したとき，外力によって b 端に生ずる断面力または断面モーメントを部材座標方向に分解した成分を元素とする列ベクトル。

$(Q_{\xi r}), (Q_{\eta r}), (Q_{\zeta r})$ または $(M_{\xi r}), (M_{\eta r}), (M_{\zeta r})$……各支点に生ずる反力または反力モーメントを節点座標方向に分解した成分を元素とする列ベクトル。

（3）逆行列その他の公式

つぎに本文の各式を誘導するために使用した逆行列その他の公式を列記する。証明は略す。

$$\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11}^{-1} & 0 \\ 0, & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11}^{-1}a_{12} \\ -E \end{bmatrix} [a_{212}]^{-1} [a_{21}a_{11}^{-1}, -E] \quad \cdots\cdots(1)$$

ただし $[a_{212}]=[a_{22}]-[a_{21}a_{11}{}^{-1}a_{12}]$

$$\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 0, & 0 \\ 0, & a_{22}{}^{-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -E \\ a_{22}{}^{-1}a_{21} \end{bmatrix}[a_{121}]^{-1}[-E, a_{12}a_{22}{}^{-1}] \qquad \cdots\cdots(2)$$

ただし $[a_{121}]=[a_{11}]-[a_{12}a_{22}{}^{-1}a_{21}]$

$$[\bar{\beta}][\dot{\alpha}\,a\,\bar{\beta}]^{-1}[\alpha]=[a]^{-1}-[a^{-1}\bar{\alpha}_{\perp}][\beta_{\perp}a^{-1}\bar{\alpha}_{\perp}]^{-1}[\beta_{\perp}a^{-1}] \qquad \cdots\cdots(3)$$

$$[\alpha\,a\,\bar{\beta}]^{-1}=[\beta]^{-1}\{[a]^{-1}-[a^{-1}\bar{\alpha}_{\perp}][\beta_{\perp}a^{-1}\bar{\alpha}_{\perp}]^{-1}[\beta_{\perp}a^{-1}]\}[\bar{\alpha}]^{-1} \qquad \cdots\cdots(4)$$

$$[a+\bar{\beta}\,b\,r]^{-1}=[a]^{-1}-[a^{-1}\bar{\beta}][b^{-1}+r\,a\,\bar{\beta}]^{-1}[r\,a^{-1}] \quad (5)$$

以上3式に表われる $[\alpha]$, $[\beta]$, $[r]$ は行および列の数が同じ矩形行列である。

$$[a-\varDelta a]^{-1}=[a]^{-1}\{[E]+[\varDelta a\cdot a]+[\varDelta a\cdot a]^2+\cdots\cdots\} \qquad \cdots\cdots(6)$$

ただし $[a-\varDelta a]$ は各元素が $[a]$ の各元素と少しずつ異なる行列で，$[a-\varDelta a]$ の個有値はすべて異なり，$[a]$ の最小個有値は $[\varDelta a]$ の最大個有値より大であるとする。

(m, n) 正則矩形行列 $[\alpha]$（$m<n$ とする）を係数行列とする連立一方程式 $[\alpha](\eta)=(q)$ の解は，つぎのごとくなる。

$$(\eta)=[\bar{\alpha}]_{\perp}[\alpha_{\perp}\bar{\alpha}_{\perp}]^{-1}[\alpha]_{\perp}(\eta)+[\bar{\alpha}][\alpha\cdot\bar{\alpha}]^{-1}(q) \quad \cdots(7)$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} E, & -a_{1(2)1}^{-1}a_{1\cdots2}, & \cdots\cdots & -a_{1(n)1}^{-1}a_{1\cdots n} \\ -a_{2(1)2}^{-1}a_{2\cdots1}, & E, & \cdots\cdots & -a_{2(n)2}^{-1}a_{2\cdots n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n(1)n}^{-1}a_{n\cdots1}, & -a_{n(1)n}^{-1}a_{n\cdots2}, & \cdots\cdots & E \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} a_{1\cdots1}^{-1} & & & \\ & a_{2\cdots2}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{n\cdots n}^{-1} \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(8)$$

ただし，もとの行列は正値対称行列とする。また

$[a_{ijk}]\equiv[a_{ik}]-[a_{ij}a_{jj}{}^{-1}a_{jk}]$,

$[a_{ixyzjk}]\equiv[a_{ixyzk}]-[a_{ixyzj}a_{jxyzj}^{-1}a_{jxyzk}]$

とし，$[a_{i(k)i}]$, $[a_{i\cdots k}]$ または $[a_{i\cdots i}]$ は指標 $1, 2, \cdots\cdots n$ から i, k または i を除いたものを中にはさむ小行列である（中にはさむ指標は順序を変えてもよいことが証明されている[8]）。

たとえば

$$\begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix} E, & -a_{131}^{-1}a_{132}, & -a_{121}^{-1}a_{123} \\ -a_{232}^{-1}a_{231}, & E, & -a_{212}^{-1}a_{213} \\ -a_{323}^{-1}a_{321}, & -a_{313}^{-1}a_{312}, & E \end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix} a_{1231}^{-1}, & 0, & 0 \\ 0, & a_{2312}^{-1}, & 0 \\ 0, & 0, & a_{3123}^{-1} \end{bmatrix}$$

2. 基本式の誘導とその解

(1) 基本式の誘導

外力によって全部材および支点にたくわえられる弾性エネルギーを，各部材の a 端の断面力および支点反力の関数として表わし，これに castigliano の定理を適用すると，つぎの変形条件が得られる（記号の説明はあとでする）。

$$[k]^{-1}(Q_a-Q_{fa})=(\eta_a)-[\bar{l}](\eta_b) \qquad \cdots\cdots(9)$$

$$[\lambda]^{-1}(Q_r)+(\eta_r)=(\eta_{0r}) \qquad \cdots\cdots(10)$$

また全部材を節点で切断し，各部材および各節点ごとにつりあい条件をたてると，つぎの2式が得られる。

$$[l](Q_a-Q_{fa})+(Q_b-Q_{fb})=0 \qquad \cdots\cdots(11)$$

$$-[\alpha\,C](Q_a-Q_{fa})+[\beta\,C](Q_b-Q_{fb})+[C_p\bar{r}](Q_r)=-(q_p)+[\alpha\,C](Q_{fa})+[\beta\,C](Q_{fb}) \qquad \cdots\cdots(12)$$

最後に「部材端の変位および支点の変位は，それが接続する節点の変位に等しい」という条件を式に書くと，つぎの3式が得られる。

$$(\eta_a)=[\bar{C}\bar{\alpha}](\eta_p) \qquad \cdots\cdots(13)$$

$$(\eta_b)=[\bar{C}\bar{\beta}](\eta_p) \qquad \cdots\cdots(14)$$

$$(\eta_r)=[r\,\bar{C}_p](\eta_p) \qquad \cdots\cdots(15)$$

ただし，以上の各式に表われる行列および列ベクトルは，つぎのごときものである。

$$[k]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} A, & 0, & 0 & & & \\ 0, & 12D, & 6DL & & & \\ 0, & 6DL, & 4DL^2 & & & \\ \hline & & & J, & 0, & 0 \\ & & & 0, & 4B, & -6\frac{B}{L} \\ & & & 0, & -6\frac{B}{L}, & 12\frac{B}{L^2} \end{array}\right],$$

$$[\lambda]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \lambda_{q\xi} & & & & & \\ & \lambda_{q\eta} & & & & \\ & & \lambda_{m\zeta} & & & \\ \hline & & & \lambda_{m\xi} & & \\ & & & & \lambda_{m\eta} & \\ & & & & & \lambda_{q\zeta} \end{array}\right],$$

$$[C]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} C_{xu}, & C_{xv}, & 0 & 0, & 0, & C_{xw} \\ C_{yu}, & C_{yv}, & 0 & 0, & 0, & C_{yw} \\ 0, & 0, & C_{zw} & C_{zu}, & C_{zv}, & 0 \\ \hline 0, & 0, & C_{xw} & C_{xu}, & C_{xv}, & 0 \\ 0, & 0, & C_{yw} & C_{yu}, & C_{yv}, & 0 \\ C_{zu}, & C_{zv}, & 0 & 0, & 0, & C_{zw} \end{array}\right],\qquad [\gamma]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \gamma_{q\xi} & & & & & \\ & \gamma_{q\eta} & & & & \\ & & \gamma_{m\zeta} & & & \\ \hline & & & \gamma_{m\xi} & & \\ & & & & \gamma_{m\eta} & \\ & & & & & \gamma_{q\zeta} \end{array}\right],$$

$$[l]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} E, & 0, & 0 & & & \\ 0, & E, & 0 & & & \\ 0, & -L, & E & & & \\ \hline & & & E, & 0, & 0 \\ & & & 0, & E, & L \\ & & & 0, & 0, & E \end{array}\right],\qquad (Q_a)=\left(\begin{array}{c} Q_{ua} \\ Q_{va} \\ M_{wa} \\ \hline M_{ua} \\ M_{va} \\ Q_{wa} \end{array}\right),\quad (Q_b)=\left(\begin{array}{c} Q_{ub} \\ Q_{vb} \\ M_{wb} \\ \hline M_{ub} \\ M_{vb} \\ Q_{wb} \end{array}\right),$$

$$[C_p]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} C_{x\xi}, & C_{x\eta}, & 0 & 0, & 0, & C_{x\zeta} \\ C_{y\xi}, & C_{y\eta}, & 0 & 0, & 0, & C_{y\zeta} \\ 0, & 0, & C_{z\zeta} & C_{z\xi}, & C_{z\eta}, & 0 \\ \hline 0, & 0, & C_{x\zeta} & C_{x\xi}, & C_{x\eta}, & 0 \\ 0, & 0, & C_{y\zeta} & C_{y\xi}, & C_{y\eta}, & 0 \\ C_{z\xi}, & C_{z\eta}, & 0 & 0, & 0, & C_{z\zeta} \end{array}\right],\qquad (Q_{fa})=\left(\begin{array}{c} Q_{fua} \\ Q_{fva} \\ M_{fwa} \\ \hline M_{fua} \\ M_{fva} \\ Q_{fwa} \end{array}\right),\quad (Q_{fb})=\left(\begin{array}{c} Q_{fub} \\ Q_{fvb} \\ M_{fwb} \\ \hline M_{fub} \\ M_{fvb} \\ Q_{fwb} \end{array}\right),$$

$$[\alpha]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha & & & & & \\ & \alpha & & & & \\ & & \alpha & & & \\ \hline & & & \alpha & & \\ & & & & \alpha & \\ & & & & & \alpha \end{array}\right],\qquad (Q_r)=\left(\begin{array}{c} Q_{\xi r} \\ Q_{\eta r} \\ M_{\zeta r} \\ \hline M_{\xi r} \\ M_{\eta r} \\ Q_{\zeta r} \end{array}\right),\quad (\eta_a)=\left(\begin{array}{c} \eta_{ua} \\ \eta_{va} \\ \theta_{wa} \\ \hline \theta_{ua} \\ \theta_{va} \\ \eta_{wa} \end{array}\right),$$

$$[\beta]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} \beta & & & & & \\ & \beta & & & & \\ & & \beta & & & \\ \hline & & & \beta & & \\ & & & & \beta & \\ & & & & & \beta \end{array}\right],\qquad (\eta_b)=\left(\begin{array}{c} \eta_{ub} \\ \eta_{vb} \\ \theta_{wb} \\ \hline \theta_{ub} \\ \theta_{vb} \\ \eta_{wb} \end{array}\right),\quad (\eta_p)=\left(\begin{array}{c} \eta_{x} \\ \eta_{y} \\ \theta_{z} \\ \hline \theta_{x} \\ \theta_{y} \\ \eta_{z} \end{array}\right),$$

$$(\eta_r)=\begin{pmatrix}\eta_{\xi r}\\ \eta_{\eta r}\\ \theta_{\zeta r}\\ \hdashline \theta_{\xi r}\\ \theta_{\eta r}\\ \eta_{\zeta r}\end{pmatrix},\qquad (\eta_{0r})=\begin{pmatrix}\eta_{0\xi r}\\ \eta_{0\eta r}\\ \theta_{0\zeta r}\\ \hdashline \theta_{0\xi r}\\ \theta_{0\eta r}\\ \eta_{0\zeta r}\end{pmatrix},$$

$$(q_p)=\begin{pmatrix}q_x\\ q_y\\ m_z\\ \hdashline m_x\\ m_y\\ q_z\end{pmatrix}$$

式 (13), (14), (15) を式 (9), (10) に代入して (η_a), (η_b), (η_r) を消去し，式 (11) より (Q_b-Q_{fb}) を求め，これを式 (12) に代入して (Q_b-Q_{fb}) を消去すると式 (9), (10), (12) はそれぞれつぎのごとくなる。

$$[k]^{-1}(Q_a-Q_{fa})-[\overline{C}\bar{\alpha}-\bar{l}\overline{C}\bar{\beta}](\eta_p)=0 \quad \cdots(16)$$

$$[\lambda]^{-1}(Q_r)+[r\,\overline{C}_p](\eta_p)=(\eta_{0r}) \quad \cdots\cdots(17)$$

$$-[\alpha C-\beta Cl](Q_a-Q_{fa})+[C_p\bar{r}](Q_r)=$$
$$-(q_p)+[\alpha C](Q_{fa})+[\beta C](Q_{fb}) \quad \cdots\cdots(18)$$

さらに公式 (7) を用いて式 (17) より (η_p) を求めて式 (16) に代入し，式 (18) の左から $[r_\perp\overline{C}_p]$ および $[r^{-1}\overline{C}_p]$ をかけて変形すると，つぎの 3 式が得られる。

$$\{[K]^{-1}+[\mathfrak{A}'\lambda^{-1}\overline{\mathfrak{A}'}]\}(P)=[\overline{\mathfrak{A}}](\eta)+[\overline{\mathfrak{A}'}]\{(\eta_{0r})$$
$$+[\lambda]^{-1}(p')\} \quad \cdots\cdots(19)$$

$$[\mathfrak{A}](P)=(p) \quad \cdots\cdots(20)$$

$$(Q_r)=[\mathfrak{A}'](P)-(p') \quad \cdots\cdots(21)$$

ただし，上の式 (19), (20), (21) に表われる記号はつぎのごときものである。

$$[\mathfrak{A}]\equiv[r_\perp\overline{C}_p][\alpha C-\beta Cl][x]^{-1},$$
$$(p)\equiv[r_\perp\overline{C}_p]\{(q_p)-[\alpha C](Q_{fa})-[\beta C](Q_{fb})\},$$
$$[\mathfrak{A}']\equiv[r^{-1}\overline{C}_p][\alpha C-\beta Cl][x]^{-1},$$
$$(p')\equiv[r^{-1}\overline{C}_p]\{(q_p)-[\alpha C](Q_{fa})-[\beta C](Q_{fb})\}$$
$$(P)\equiv[x](Q_a-Q_{fa}),\quad (\eta)\equiv[r_\perp{}^{-1}\overline{C}_p](\eta_p)$$

$$[K]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} A & & & & & \\ & 12D & & & & \\ & & 4D & & & \\ \hdashline & & & J & & \\ & & & & 3B & \\ & & & & & B \end{array}\right],$$

$$[x]=\left[\begin{array}{ccc:ccc} E & 0 & 0 & & & \\ 0 & E & 0 & & & \\ 0 & -E & \dfrac{2}{L} & & & \\ \hdashline & & & E & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & \dfrac{-L}{2} \\ & & & 0 & E & \dfrac{L}{2} \end{array}\right]$$

本文では特にことわらないかぎり，支点は沈下せずバネがないものとする。この場合には式 (19)～(21) は，つぎのごとく簡単になる。

$$[K]^{-1}(P)=[\overline{\mathfrak{A}}](\eta) \quad \cdots\cdots(22)$$

$$[\mathfrak{A}](P)=(p) \quad \cdots\cdots(23)$$

$$(Q_r)=[\mathfrak{A}'](P)-(p') \quad \cdots\cdots(24)$$

式 (22), (23) より，(η), (P) を求めることができる。今後この 2 式を基本式とよぶことにする。また式 (24) は支点反力を求める場合に必要な式である。

(2) 基本式の解

式 (22) より (P) を求めて式 (23) に代入すると

$$[\mathfrak{A}K\overline{\mathfrak{A}}](\eta)=(p) \quad \cdots\cdots(25)$$

が得られる。今後式 (25) を解式とよび，行列 $[\mathfrak{A}K\overline{\mathfrak{A}}]$ を解式の係数行列とよぶことにする。

解式の係数行列の逆行列が求まれば，(η), (P) は次式によって計算できる。

$$(\eta)=[\mathfrak{A}K\overline{\mathfrak{A}}]^{-1}(p) \quad \cdots\cdots(26)$$

$$(P)=[K\overline{\mathfrak{A}}][\mathfrak{A}K\overline{\mathfrak{A}}]^{-1}(p) \quad \cdots\cdots(27)$$

また逆行列の公式 (4) を用いれば式 (26), (27) はつぎのごとく書くこともできる。

$$(\eta)=[\mathfrak{A}]^{-1}\{[K]^{-1}-[K^{-1}\overline{\mathfrak{A}}_\perp][\mathfrak{A}_\perp K^{-1}\overline{\mathfrak{A}}_\perp]^{-1}[\mathfrak{A}_\perp K^{-1}]\}$$
$$\times[\overline{\mathfrak{A}}]^{-1}(p)=[\mathfrak{A}^{-1}K^{-1}](P) \quad \cdots\cdots(28)$$

$$(P)=\{[E]-[\overline{\mathfrak{A}}_\perp][\mathfrak{A}_\perp K^{-1}\overline{\mathfrak{A}}_\perp]^{-1}[\mathfrak{A}_\perp K^{-1}]\}[\overline{\mathfrak{A}}]^{-1}(p)$$
$$\cdots\cdots(29)$$

式 (26), (27) は，いわゆるたわみ角法に相当し，式 (28), (29) は $[\mathfrak{A}]_\perp$ の取り方によって仮想仕事の原理による解法とも，四連モーメント定理による解法とも考えることができる。また直接 $[\mathfrak{A}K\overline{\mathfrak{A}}]$, $[\mathfrak{A}_\perp K^{-1}\overline{\mathfrak{A}}_\perp]$ の逆行列を求める代りに，公式 (6) によって逆行列を級数に展開する方法も考えられる。この方法はイテラチオン法といわれるもので，たわみ角分配法，モーメント分配法などがこれに入る。なお，(P) よりモーメントを主とした断面力を求めるには，次式を用いればよい。

$$(M')=[y]^{-1}(P) \quad \cdots\cdots(30)$$

ただし

$$[y]^{-1}=\left[\begin{array}{ccc:c} E, & 0, & 0 & \\ 0, & \dfrac{L}{2}, & \dfrac{L}{2} & \\ 0, & \dfrac{L}{2}, & \dfrac{-L}{2} & \\ \hdashline & & & \end{array}\right],$$

$$
\left.\begin{matrix} E, & 0, & 0 \\ 0, & E, & E \\ 0, & E, & -E \end{matrix}\right]
$$

$$
(M')=\begin{pmatrix} Q_{ua}-Q_{fua} \\ M_{wa}-M_{fwa} \\ M_{wb}-M_{fwb} \\ \hdashline M_{ua}-M_{fua} \\ M_{va}-M_{fva} \\ M_{vb}-M_{fvb} \end{pmatrix}
$$

（3） 特別の場合

a) トラス　全部材の両端がヒンジであり，外力は節点だけに作用するものとすると，$[J]=[B]=[D]=0$，$(Q_{fa})=(Q_{fb})=0$ となるから，基本式 (22)，(23) はつぎのごとく簡単になる（空間座標の方向と節点座標の方向は一致させてある）。

$$
\left[\frac{L}{EF}\right](Q_{ua})=[C_{xu}\bar{\delta}_{\xi},\ C_{yu}\bar{\delta}_{\eta},\ C_{zu}\bar{\delta}_{\zeta}]\begin{bmatrix} \eta_{\xi} \\ \eta_{\eta} \\ \eta_{\zeta} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(31)
$$

$$
\begin{bmatrix} \delta_{\xi}C_{xu} \\ \delta_{\eta}C_{yu} \\ \delta_{\zeta}C_{zu} \end{bmatrix}(Q_{ua})=\begin{bmatrix} q_{\xi} \\ q_{\eta} \\ q_{\zeta} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots(32)
$$

ただし，

$[\delta_{\xi}]\equiv[r_{q\xi}]_{\perp}[\alpha-\beta]$，　$[\delta_{\eta}]\equiv[r_{q\eta}]_{\perp}[\alpha-\beta]$，

$[\delta_{\zeta}]\equiv[r_{q\zeta}]_{\perp}[\alpha-\beta]$

b) 部材が一平面内にある場合　部材を空間座標の x，y 面内に入れ，空間座標の z 軸と部材座標の w 軸を一致させる。また反力は空間座標の x,y 面または z 軸方向にあるものとし，節点座標と空間座標を一致させる。このようにする基本式 (22)，(23) はつぎのごとくなる。

$$
\begin{bmatrix} \frac{1}{A} & & & & & \\ & \frac{1}{12D} & & & & \\ & & \frac{1}{4D} & & & \\ & & & \frac{1}{J} & & \\ & & & & \frac{1}{3B} & \\ & & & & & \frac{1}{B} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} P_u \\ P_v \\ N_w \\ \hdashline N_u \\ N_v \\ P_w \end{pmatrix}
$$

$$
=\left[\begin{array}{ccc:ccc} C_{xu}\bar{\delta}_{\xi}, & C_{yu}\bar{\delta}_{\eta}, & 0 & & & \\ C_{xv}\bar{\delta}_{\xi}, & C_{yv}\bar{\delta}_{\eta}, & \frac{L}{2}\bar{\mu}_{\zeta} & & & \\ 0, & 0, & \frac{L}{2}\bar{\delta}_{\zeta} & & & \\ \hdashline & & & C_{xu}\bar{\delta}_{\xi}', & C_{yu}\bar{\delta}_{\eta}', & 0 \\ & & & C_{xv}\bar{\mu}_{\xi}', & C_{yv}\bar{\mu}_{\eta}', & \frac{-2}{L}\bar{\mu}_{\zeta}' \\ & & & C_{xv}\bar{\delta}_{\xi}', & C_{yv}\bar{\delta}_{\eta}', & 0 \end{array}\right]\begin{pmatrix} \eta_{\xi} \\ \eta_{\eta} \\ \theta_{\zeta} \\ \hdashline \theta_{\xi} \\ \theta_{\eta} \\ \eta_{\zeta} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(33)
$$

$$
\left[\begin{array}{ccc:ccc} \delta_{\xi}C_{xu}, & \delta_{\xi}C_{xv}, & 0 & & & \\ \delta_{\eta}C_{yu}, & \delta_{\eta}C_{yv}, & 0 & & & \\ 0, & \mu_{\zeta}\frac{L}{2}, & \delta_{\zeta}\frac{L}{2} & & & \\ \hdashline & & & \delta_{\xi}'C_{xu}, & \mu_{\xi}'C_{xv}, & \delta_{\xi}'C_{xv} \\ & & & \delta_{\eta}'C_{yu}, & \mu_{\eta}'C_{yv}, & \delta_{\eta}'C_{yv} \\ & & & 0, & -\mu_{\zeta}'\frac{2}{L}, & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\times\begin{pmatrix} P_u \\ P_v \\ N_w \\ \hdashline N_u \\ N_v \\ P_w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_{\xi} \\ p_{\eta} \\ n_{\zeta} \\ \hdashline n_{\xi} \\ n_{\eta} \\ p_{\zeta} \end{pmatrix} \quad \cdots\cdots(34)
$$

$$
\text{ただし}\quad \begin{pmatrix} p_{\xi} \\ p_{\eta} \\ n_{\zeta} \\ \hdashline n_{\xi} \\ n_{\eta} \\ p_{\zeta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q_{\xi} \\ q_{\eta} \\ m_{\zeta} \\ \hdashline m_{\xi} \\ m_{\eta} \\ q_{\zeta} \end{pmatrix}
$$

$$
-\left[\begin{array}{ccc:ccc} \alpha_{\xi}C_{xu}, & \alpha_{\xi}C_{xv}, & 0 & & & \\ \alpha_{\eta}C_{yu}, & \alpha_{\eta}C_{yv}, & 0 & & & \\ 0, & 0, & \alpha_{\zeta} & & & \\ \hdashline & & & \alpha_{\xi}'C_{xu}, & \alpha_{\xi}'C_{xv}, & 0 \\ & & & \alpha_{\eta}'C_{yu}, & \alpha_{\eta}'C_{yv}, & 0 \\ & & & 0, & 0, & \alpha_{\zeta}' \end{array}\right]
$$

$$
\times\begin{pmatrix} Q_{fua} \\ Q_{fva} \\ M_{fwa} \\ \hdashline M_{fua} \\ M_{fva} \\ Q_{fwa} \end{pmatrix}
$$

$$-\left[\begin{array}{ccc|ccc} \beta_\xi C_{xu}, & \beta_\xi C_{xv}, & 0 & & & \\ \beta_\eta C_{yu}, & \beta_\eta C_{yv}, & 0 & & & \\ 0, & 0, & \beta_\zeta & & & \\ \hline & & & \beta_\xi' C_{xu}, & \beta_\xi' C_{xv}, & 0 \\ & & & \beta_\eta' C_{yu}, & \beta_\eta' C_{yv}, & 0 \\ & & & 0, & 0, & \beta_\zeta' \end{array}\right] \times \left(\begin{array}{c} Q_{fub} \\ Q_{fvb} \\ M_{fwb} \\ \hline M_{fub} \\ M_{fvb} \\ Q_{fwb} \end{array}\right)$$

$$[\alpha_\xi]=[\gamma_{q\xi\perp}\alpha],\cdots\cdots;\quad [\alpha_\xi']=[\gamma_{m\xi\perp}\alpha],\cdots\cdots$$
$$[\beta_\xi]=[\gamma_{q\xi\perp}\beta],\cdots\cdots;\quad [\beta_\xi']=[\gamma_{m\xi\perp}\beta],\cdots\cdots$$
$$[\delta_\xi]=[\alpha_\xi-\beta_\xi],\ \cdots;\quad [\delta_\xi']=[\alpha_\xi'-\beta_\xi'],\cdots$$
$$[\mu_\xi]=[\alpha_\xi+\beta_\xi],\ \cdots;\quad [\mu_\xi']=[\alpha_\xi'+\beta_\xi'],\cdots$$

式 (33), (34) の上半分は，平面構造物に面内荷重が作用したときの基本式であり，下半分は面外荷重が作用したときの基本式である。

3. 平面構造物

(1) 平面構造物の一般解

式 (33) の上半分を式 (34) の上半分に代入すると，つぎのごとき平面構造物に面内荷重が作用するときの解式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \delta_\xi C_{xu}, & \delta_\xi C_{xv}, & 0 \\ \delta_\eta C_{yu}, & \delta_\eta C_{yv}, & 0 \\ 0, & \mu_\zeta \dfrac{L}{2}, & \delta_\zeta \dfrac{L}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{1}{A} & & \\ & \dfrac{1}{12D} & \\ & & \dfrac{1}{4D} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} C_{xu}\bar{\delta}_\xi, & C_{yu}\bar{\delta}_\eta, & 0 \\ C_{xv}\bar{\delta}_\xi, & C_{yv}\bar{\delta}_\eta, & \dfrac{L}{2}\bar{\mu}_\zeta \\ 0, & 0, & \dfrac{L}{2}\bar{\delta}_\zeta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \eta_\xi \\ \eta_\eta \\ \theta_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} \cdots(35)$$

式 (35) の解は公式 (2) を参照すると，つぎのごとくなる。

$$\begin{pmatrix} \eta_\xi \\ \eta_\eta \\ \theta_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d^{-1}n_\zeta \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} E, & 0 \\ 0, & E \end{bmatrix} \\ d^{-1}\mu_\zeta 6\,DL[C_{xv}\bar{\delta}_\xi,\ C_{yv}\bar{\delta}_\eta] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left[-\begin{bmatrix} E, & 0 \\ 0, & E \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} \delta_\xi C_{xv} \\ \delta_\eta C_{yv} \end{bmatrix} 6\,DL\,\bar{\mu}_\zeta d^{-1} \right] \times \begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} \cdots\cdots(36)$$

ただし

$$\begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_\xi C_{xu}, & \delta_\xi C_{xv} \\ \delta_\eta C_{yu}, & \delta_\eta C_{yv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A, & 0 \\ 0, & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{xu}\bar{\delta}_\xi, & C_{yu}\bar{\delta}_\eta \\ C_{xv}\bar{\delta}_\xi, & C_{yv}\bar{\delta}_\eta \end{bmatrix}$$

$$[d]=[\mu_\zeta\,3\,DL^2\,\bar{\mu}_\zeta]+[\delta_\zeta\,DL^2\,\bar{\delta}_\zeta],$$
$$[e]=[12\,D]-[6\,DL\,\bar{\mu}_\zeta\,d^{-1}\mu_\zeta\,6\,DL]$$

$$\begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \\ n_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_\xi \\ q_\eta \\ m_\zeta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_\xi C_{xu}, & \alpha_\xi C_{xv}, & 0 \\ \alpha_\eta C_{yu}, & \alpha_\eta C_{yv}, & 0 \\ 0, & 0, & \alpha_\zeta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_{fua} \\ Q_{fva} \\ M_{fwa} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_\xi C_{xu}, & \beta_\xi C_{xv}, & 0 \\ \beta_\eta C_{yu}, & \beta_\eta C_{yv}, & 0 \\ 0, & 0, & \beta_\zeta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_{fub} \\ Q_{fvb} \\ M_{fwb} \end{pmatrix}$$

また断面力は式 (33) および式 (30) の上半分を用いると，つぎのごとく表わされる。

$$\begin{pmatrix} Q_{ua}' \\ M_{wa}' \\ M_{wb}' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} 0 \\ \begin{bmatrix} 4\,DL^2, & 2\,DL^2 \\ 2\,DL^2, & 4\,DL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_\zeta d^{-1} \\ \bar{\beta}_\zeta d^{-1} \end{bmatrix} (n_\zeta) \end{array} \right) + \begin{bmatrix} [A][C_{xu}\bar{\delta}_\xi,\ C_{yu}\bar{\delta}_\eta] \\ \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_\zeta \\ \bar{\beta}_\zeta \end{bmatrix}_\perp [s^{-1}\omega_\zeta L^{-1}][C_{xv}\bar{\delta}_\xi,\ C_{yv}\bar{\delta}_\eta] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11}, & b_{12} \\ b_{21}, & b_{22} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \delta_\xi C_{xv} \\ \delta_\eta C_{yv} \end{bmatrix} [6\,DL\bar{\mu}_\zeta d^{-1}](n_\zeta) \right\} \cdots\cdots(37)$$

ただし $[\omega_\zeta]=[\alpha_\zeta,\ \beta_\zeta]_\perp \begin{bmatrix} E \\ E \end{bmatrix},$

$$[s]=[\alpha_\zeta,\ \beta_\zeta]_\perp \begin{bmatrix} \dfrac{1}{3DL^2}, & \dfrac{-1}{6DL^2} \\ \dfrac{-1}{6DL^2}, & \dfrac{1}{3DL^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_\zeta \\ \\ \bar{\beta}_\zeta \end{bmatrix}$$

$$[e]=[L^{-1}\,\bar{\omega}_\zeta s^{-1}\,\omega_\zeta\,L^{-1}]$$

(2) はりの場合

はりの場合には空間座標と部材座標を一致させることによって，$[C_{xu}]=[C_{yv}]=[E]$, $[C_{yu}]=[C_{xv}]=0$ とすることができる。ゆえに式 (36), (37) はつぎのごとくなる。

$$(\eta_\xi)=[\delta_\xi A\,\bar{\delta}_\xi]^{-1}(p_\xi) \cdots\cdots(38)$$

$$\left.\begin{aligned} (\eta_\eta)&=[\delta_\eta e\bar{\delta}_\eta]^{-1}\{(p_\eta)-[\delta_\eta 6\,DL\,\bar{\mu}_\zeta d^{-1}](n_\zeta)\} \\ (\theta_\zeta)&=-[d^{-1}\mu_\zeta 6\,DL\,\bar{\delta}_\eta](\eta_\eta)+[d]^{-1}(n_\zeta) \end{aligned}\right\}\cdots(39)$$

$$(Q_{ua}')=[A\,\bar{\delta}_\xi][\delta_\xi A\,\bar{\delta}_\xi]^{-1}(p_\xi) \cdots\cdots(40)$$

$$\begin{pmatrix} M_{wa}' \\ M_{wb}' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4\,DL^2, & 2\,DL^2 \\ 2\,DL^2, & 4\,DL^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_\zeta \\ \bar{\beta}_\zeta \end{bmatrix} [d]^{-1}(n_\zeta) + \begin{bmatrix} \bar{\alpha}_\zeta \\ \bar{\beta}_\zeta \end{bmatrix}_\perp [s^{-1}\omega_\zeta L^{-1}\bar{\delta}_\eta](\eta_\eta) \cdots\cdots(41)$$

(3) アーチ構造物の場合

普通に造られているアーチのごとく，ライズがスパンにくらべて小さな場合は，$[e]$, $[C_{xv}]$, $[C_{yu}]$ などは $[A]$, $[C_{xu}]$, $[C_{yv}]$ などにくらべて小さな値となり，それらの積は省略できる程度のものとなる。$(p_\xi)=0$,

$(n_\zeta)=0$ の場合について，上記の省略を行ないながら計算を進めると次式が得られる。

$$(\eta_\eta)=[[\delta_\eta C_{yv}{}^{-1}]\{[e]+[C_{xv}\bar{\delta}_{\xi\perp}][\delta_{\xi\perp}C_{xu}A^{-1}C_{xu}\bar{\delta}_{\xi\perp}]^{-1}[\delta_{\xi\perp}C_{xv}]\}[C_{yv}{}^{-1}\bar{\delta}_\eta]]^{-1}(p_\eta) \cdots\cdots(42)$$

$$\begin{pmatrix} M_{wa}' \\ M_{wb}' \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_\zeta \\ \bar{\beta}_\zeta \end{bmatrix}_\perp [s^{-1}\omega_\zeta L^{-1}C_{yv}{}^{-1}\bar{\delta}_\eta](\eta_\eta) \cdots(43)$$

（4） ラーメン構造物の場合

$$\begin{bmatrix} \delta_\xi C_{xu} \\ \delta_\eta C_{yu} \end{bmatrix}\equiv[\bar{\rho}],\quad \begin{bmatrix} \delta_\xi C_{xv} \\ \delta_\eta C_{yv} \end{bmatrix}\equiv[\bar{\sigma}],$$

$$\begin{pmatrix} \eta_\xi \\ \eta_\eta \end{pmatrix}\equiv(\eta),\quad \begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \end{pmatrix}\equiv(p)$$

とおき，$[\rho]_\perp$ とこれに直交する行列 $[\rho]_{\parallel}$ との間にはつぎのごとき関係があることを考慮すると

$$[\bar{\rho}]_{\parallel}[\rho_{\parallel}\bar{\rho}_{\parallel}]^{-1}[\rho]_{\parallel}+[\bar{\rho}]_\perp[\rho_\perp\bar{\rho}_\perp]^{-1}[\rho]_\perp=[E]\cdots(44)$$

式 (36)，(37) はつぎのごとくなる。

$$(\eta)=\Big\{[\bar{\rho}]_\perp[\rho_\perp\bar{\sigma}\, e\, \sigma\bar{\rho}_\perp]^{-1}[\rho]_\perp+[\bar{\rho}_{\parallel},\rho_\perp]$$
$$\cdot\begin{bmatrix} -E \\ g_{22}{}^{-1}g_{21} \end{bmatrix}[g_{121}]^{-1}[-E,\ g_{12}g_{22}{}^{-1}]\begin{bmatrix} \rho_{\parallel} \\ \rho_\perp \end{bmatrix}\Big\}$$
$$\cdot\{(p)-[\bar{\sigma}\, 6\, DL\, \bar{\mu}_\zeta d^{-1}](n_\zeta)\}\cdots\cdots(45)$$

$$(\theta_\zeta)=[d]^{-1}(n_\zeta)+[d^{-1}\mu_\zeta\, 6\, DL\, \sigma](\eta)\cdots\cdots(46)$$

$$(Q_{ua}')=-[A\,\rho\bar{\rho}_{\parallel}][g_{121}]^{-1}[-\rho_{\parallel}+g_{12}g_{22}{}^{-1}\rho_\perp]$$
$$\{(p)-[\bar{\sigma}\, 6\, DL\, \bar{\mu}_\zeta d^{-1}](n_\zeta)\}\cdots\cdots(47)$$

$$\begin{pmatrix} M_{wa}' \\ M_{wb}' \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 4\,DL^2, & 2\,DL^2 \\ 2\,DL^2, & 4\,DL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_\zeta \\ \bar{\beta}_\zeta \end{bmatrix}[d]^{-1}(n_\zeta)$$
$$+\begin{bmatrix} \bar{\alpha}_\zeta \\ \bar{\beta}_\zeta \end{bmatrix}_\perp[s^{-1}\omega_\zeta L^{-1}\sigma](\eta)\cdots\cdots(48)$$

ただし

$$[g_{11}]=[\rho]_{\parallel}[\bar{\rho}\, A\, \rho+\bar{\sigma}\, e\, \sigma][\rho]_{\parallel},\quad [g_{22}]=[\rho_\perp\bar{\sigma}\, e\, \sigma\bar{\rho}_\perp]$$
$$[g_{12}]=[\rho_{\parallel}\bar{\sigma}\, e\, \sigma\rho_\perp],\quad [g_{21}]=[\bar{g}_{12}],$$
$$[g_{121}]=[g_{11}]-[g_{12}g_{22}{}^{-1}g_{21}]$$

特に部材の伸びが省略できるときには，$[A]\to\infty$，したがって $[g_{11}]\to\infty$，$[g_{121}]^{-1}\to 0$ となる。ゆえにこの場合は上の諸式において，(η) の第2項が消え $(Q_{ua}')=0$ となる。

（5） トラス構造物の場合

前節の初めに定義した記号を用い，解式 (35) の係数行列をつぎのごとく書き変え

$$\begin{bmatrix} \bar{\rho}A\rho, & 0 \\ 0, & \delta_\zeta DL^2\bar{\delta}_\zeta \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ \mu_\zeta\dfrac{L}{2} \end{bmatrix}[12D]\left[\sigma,\ \dfrac{L}{2}\bar{\mu}_\zeta\right]\cdots\cdots(49)$$

公式 (5) を用いて計算を進めると，つぎの各式が得られる。

$$(\eta)=[\bar{\rho}\, A\, \rho]^{-1}(p)-[\bar{\rho}\, A\, \rho]^{-1}[\bar{\sigma}\, h^{-1}]$$
$$\times\left\{[\sigma][\bar{\rho}A\,\rho]^{-1}(p)+\left[\frac{L}{2}\bar{\mu}_\zeta\right][\delta_\zeta DL^2\bar{\delta}_\zeta]^{-1}(n_\zeta)\right\}\cdots(50)$$

$$(\theta_\zeta)=[\delta_\zeta DL^2\bar{\delta}_\zeta]^{-1}(n_\zeta)-[\delta_\zeta DL^2\bar{\delta}_\zeta]^{-1}\left[\mu_\zeta\frac{L}{2}h^{-1}\right]$$
$$\times\left\{[\sigma][\bar{\rho}\, A\, \rho]^{-1}(p)+\left[\frac{L}{2}\bar{\mu}_\zeta\right][\delta_\zeta DL^2\bar{\delta}_\zeta]^{-1}(n_\zeta)\right\}\cdots(51)$$

$$(Q_{ua}')=[A\,\rho](\eta)\cdots\cdots(52)$$

$$\begin{pmatrix} M_{wa}' \\ M_{wb}' \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 6\,DL\,\sigma \\ 6\,DL\,\sigma \end{bmatrix}(\eta)+\begin{bmatrix} 4\,DL^2, & 2\,DL^2 \\ 2\,DL^2, & 4\,DL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_\zeta \\ \beta_\zeta \end{bmatrix}(\theta_\zeta)\cdots\cdots(53)$$

ただし

$$[h]=[e]^{-1}+[\sigma][\bar{\rho}\, A\, \rho]^{-1}[\bar{\sigma}]$$

式 (50)～(53) の近似式として，第1項のみを取ると（$[h]^{-1}=0$ とすると）

$$(\eta)=[\bar{\rho}\, A\, \rho]^{-1}(p)\cdots\cdots(54)$$

$$(Q_{ua}')=[A\,\rho][\bar{\rho}\, A\, \rho]^{-1}(p)\cdots\cdots(55)$$

$$(\theta_\zeta)=[\delta_\zeta DL^2\bar{\delta}_\zeta]^{-1}(n_\zeta)\cdots\cdots(56)$$

$$\begin{pmatrix} M_{wa}' \\ M_{wb}' \end{pmatrix}=\begin{bmatrix} 6\,DL\,\sigma \\ 6\,DL\,\sigma \end{bmatrix}[\bar{\rho}\, A\, \rho]^{-1}(p)$$
$$+\begin{bmatrix} 4\,DL^2, & 2\,DL^2 \\ 2\,DL^2, & 4\,DL^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_\zeta \\ \beta_\zeta \end{bmatrix}[\delta_\zeta DL^2\bar{\delta}_\zeta](n_\zeta)\cdots(57)$$

が得られる。上式のうち，式 (54)，(55) が一般に計算されているトラス構造物の解である。これに対して式 (56)，(57) は Manderla や Mohr によって提案された二次応力の計算法を行列によって表示したものとなっている。

4. 格子構造物

（1） 格子構造物の一般解

平面構造物に面外荷重が作用する場合を格子構造物とよぶことにする。この場合の解式は，式 (33) の下半分を式 (34) の下半分に代入することによって，つぎのごとく得られる。ただし簡単のために $[\delta_\xi']$，$[\delta_\eta']$，$[\delta_\zeta']$ などの $'$ は省略する（以下同様）。

$$\begin{bmatrix} \delta_\xi C_{xu}, & \mu_\xi C_{xv}, & \delta_\xi C_{xv} \\ \delta_\eta C_{yu}, & \mu_\eta C_{yv}, & \delta_\eta C_{yv} \\ 0, & -\delta_\zeta\dfrac{2}{L}, & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{J} & & \\ & \dfrac{1}{3B} & \\ & & \dfrac{1}{B} \end{bmatrix}$$
$$\times\begin{bmatrix} C_{xu}\bar{\delta}_\xi, & C_{yu}\bar{\delta}_\eta, & 0 \\ C_{xv}\bar{\mu}_\xi, & C_{yv}\bar{\mu}_\eta, & -\dfrac{2}{L}\bar{\delta}_\zeta \\ C_{xv}\bar{\delta}_\xi, & C_{yv}\bar{\delta}_\eta, & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \theta_\xi \\ \theta_\eta \\ \eta_\zeta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ p_\zeta \end{pmatrix}\quad(58)$$

式 (58) の解は

$$\begin{bmatrix} \delta_\xi C_{xu} \\ \delta_\eta C_{yu} \end{bmatrix}\equiv[\bar{\lambda}],\quad \begin{bmatrix} \mu_\xi C_{xv} \\ \mu_\eta C_{yv} \end{bmatrix}\equiv[\bar{\mu}],$$

$$\begin{bmatrix} \delta_\xi C_{xv} \\ \delta_\eta C_{yv} \end{bmatrix}\equiv[\bar{\nu}],\quad \begin{pmatrix} \theta_\xi \\ \theta_\eta \end{pmatrix}\equiv(\theta),\quad \begin{pmatrix} n_\xi \\ n_\eta \end{pmatrix}\equiv(n)$$

とおき，公式 (1) を参照するとつぎのごとくなる。

$$(\theta)=[d_{\mathrm{II}}]^{-1}\left\{(n)+\left[\bar{\mu}\frac{6B}{L}\bar{\delta}_\zeta\right](\eta_\zeta)\right\}\cdots\cdots(59)$$

$$(\eta_\zeta)=[\delta_\zeta e_{\mathrm{II}}\bar{\delta}_\zeta]^{-1}\left\{(p_\zeta)+\left[\delta_\zeta\frac{6B}{L}\mu\, d_{\mathrm{II}}^{-1}\right](n)\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(60)$$

ただし

$$[d_{\mathrm{II}}]=[\bar{\lambda}J\lambda]+[\bar{\mu}3B\mu]+[\bar{\nu}B\nu]$$

$$[e_{\mathrm{II}}]=\left[\frac{12B}{L^2}\right]-\left[\frac{6B}{L}\mu\, d_{\mathrm{II}}^{-1}\bar{\mu}\frac{6B}{L}\right]$$

$$=\left[0,\ \frac{2}{L},\ 0\right]\begin{bmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{bmatrix}_{\perp}\left\{[\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu}]_{\perp}\begin{bmatrix}\frac{1}{J}&&\\&\frac{1}{3B}&\\&&\frac{1}{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{bmatrix}_{\perp}\right\}^{-1}[\bar{\lambda},\bar{\mu},\bar{\nu}]_{\perp}\begin{bmatrix}0\\ \frac{2}{L}\\ 0\end{bmatrix}$$

また断面力は式 (33) および式 (30) の下半分を用いて，つぎのごとく表わすことができる。

$$(M_{ua}')=[J\lambda](\theta)=[J\lambda\, d_{\mathrm{II}}^{-1}]\left\{(n)+\left[\bar{\mu}\frac{6B}{L}\bar{\delta}_\zeta\right](\eta_\zeta)\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(61)$$

$$\begin{pmatrix}M_{va}'\\ M_{vb}'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}1}\\ B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}2}\end{bmatrix}[d_{\mathrm{II}}]^{-1}(n)-\begin{bmatrix}\frac{6B}{L}-B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}1}d_{\mathrm{II}}^{-1}\bar{\mu}\frac{6B}{L}\\ \frac{6B}{L}-B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}2}d_{\mathrm{II}}^{-1}\bar{\mu}\frac{6B}{L}\end{bmatrix}[\bar{\delta}_\zeta](\eta_\zeta)\quad\cdots\cdots(62)$$

ただし，

$$[\vartheta_{\mathrm{II}1}]=[3\bar{\mu}+\bar{\nu}],\quad[\vartheta_{\mathrm{II}2}]=[3\bar{\mu}-\bar{\nu}]$$

特に各部材のねじり剛性が無視できる場合は，$[J]=0$ となるから，式 (59)～(62) にふくまれる $[d_{\mathrm{II}}]$，$[e_{\mathrm{II}}]$ などはつぎのごとく書きかえられる。

$$[d_{\mathrm{II}}]=\begin{bmatrix}\alpha_\xi C_{xv},\ \beta_\xi C_{xv}\\ \alpha_\eta C_{yv},\ \beta_\eta C_{yv}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}1}\\ B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}2}\end{bmatrix},$$

$$[e_{\mathrm{II}}]=[L^{-1},\ L^{-1}]\begin{bmatrix}\frac{6B}{L}-B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}1}d_{\mathrm{II}}^{-1}\bar{\mu}\frac{6B}{L}\\ \frac{6B}{L}-B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}2}d_{\mathrm{II}}^{-1}\bar{\mu}\frac{6B}{L}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}1}\\ B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4B,\ 2B\\ 2B,\ 4B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{xv}\bar{\alpha}_\xi,\ C_{yv}\bar{\alpha}_\eta\\ C_{xv}\bar{\beta}_\xi,\ C_{yv}\bar{\beta}_\eta\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\frac{6B}{L}-B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}1}d_{\mathrm{II}}^{-1}\bar{\mu}\frac{6B}{L}\\ \frac{6B}{L}-B\bar{\vartheta}_{\mathrm{II}2}d_{\mathrm{II}}^{-1}\bar{\mu}\frac{6B}{L}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{xv}\bar{\alpha}_\xi,\ C_{yv}\bar{\alpha}_\eta\\ C_{xv}\bar{\beta}_\xi,\ C_{yv}\bar{\beta}_\eta\end{bmatrix}_{\perp}$$

$$\times\left\{\begin{bmatrix}\alpha_\xi C_{xv},\ \beta_\xi C_{xv}\\ \alpha_\eta C_{yv},\ \beta_\eta C_{yv}\end{bmatrix}_{\perp}\begin{bmatrix}\frac{1}{3B},\ \frac{-1}{6B}\\ \frac{-1}{6B},\ \frac{1}{3B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_{xv}\bar{\alpha}_\xi,\ C_{yv}\bar{\alpha}_\eta\\ C_{xv}\bar{\beta}_\xi,\ C_{yv}\bar{\beta}_\eta\end{bmatrix}_{\perp}\right\}^{-1}$$

$$\times\begin{bmatrix}\alpha_\xi C_{xv},\ \beta_\xi C_{xv}\\ \alpha_\eta C_{yv},\ \beta_\eta C_{yv}\end{bmatrix}_{\perp}\begin{bmatrix}L^{-1}\\ L^{-1}\end{bmatrix}$$

（2） 格子桁の場合

主桁に関する量と横桁に関する量を分離し，横桁に関する量には ′ をつけ，主桁のあとにくるように配列する。また主桁の部材座標は空間座標と一致させ，横桁の部材座標は空間座標を z 軸のまわりに 90° 回転したものと一致させると，主桁および横桁の方向余弦行列はそれぞれ

$$\begin{bmatrix}E,\ 0,\ 0\\ 0,\ E,\ 0\\ 0,\ 0,\ E\end{bmatrix}\quad\text{および}\quad\begin{bmatrix}0,\ -E,\ 0\\ E,\ 0,\ 0\\ 0,\ 0,\ E\end{bmatrix}$$

となり前節の $[\bar{\lambda}]$，$[\bar{\mu}]$，$[\bar{\nu}]$ はつぎのごとくなる。

$$[\bar{\lambda}]=\begin{bmatrix}\delta_\xi,\ 0\\ 0,\ \delta_\xi'\end{bmatrix},\quad[\bar{\mu}]=\begin{bmatrix}0,\ -\mu_\xi'\\ \mu_\eta,\ 0\end{bmatrix},\quad[\bar{\nu}]=\begin{bmatrix}0,\ -\delta_\xi'\\ \delta_\eta,\ 0\end{bmatrix}$$

これらを用いて式 (59)～(62) を変形するとつぎの各式が得られる。

$$(\theta_\xi)=[d_G']^{-1}\left\{(n_\xi)-\left[\mu_\xi'\frac{6B'}{L'}\bar{\delta}_\zeta'\right](\eta_\zeta)\right\}\cdots(63)$$

$$(\theta_\eta)=[d_G]^{-1}\left\{(n_\eta)+\left[\mu_\eta\frac{6B}{L}\bar{\delta}_\zeta\right](\eta_\zeta)\right\}\cdots\cdots(64)$$

$$(\eta_\zeta)=\{[\delta_\zeta e_G\bar{\delta}_\zeta]+[\delta_\zeta' e_G'\bar{\delta}_\zeta']\}^{-1}\left\{(p_\zeta)+\left[\delta_\zeta\frac{6B}{L}\bar{\mu}_\eta d_G^{-1}\right](n_\eta)-\left[\delta_\zeta'\frac{6B'}{L'}\bar{\mu}_\xi' d_G'^{-1}\right](n_\xi)\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(65)$$

$$(M_{ua}')=[J\delta_\xi](\theta_\xi)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(66)$$

$$(M_{ua}'')=[J'\delta_\eta'](\theta_\eta)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(67)$$

$$\begin{pmatrix}M_{va}'\\ M_{vb}'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}B\bar{\vartheta}_{G1}\\ B\bar{\vartheta}_{G2}\end{bmatrix}[d_G]^{-1}(n_\eta)-\begin{bmatrix}\frac{6B}{L}-B\bar{\vartheta}_{G1}d_G^{-1}\mu_\eta\frac{6B}{L}\\ \frac{6B}{L}-B\bar{\vartheta}_{G2}d_G^{-1}\mu_\eta\frac{6B}{L}\end{bmatrix}[\bar{\delta}_\zeta](\eta_\zeta)\quad\cdots(68)$$

$$\begin{pmatrix}M_{va}''\\ M_{vb}''\end{pmatrix}=-\begin{bmatrix}B'\bar{\vartheta}_{G1}'\\ B'\bar{\vartheta}_{G2}'\end{bmatrix}[d_G']^{-1}(n_\xi)-\begin{bmatrix}\frac{6B'}{L'}-B'\bar{\vartheta}_{G1}'d_G'^{-1}\mu_\xi'\frac{6B'}{L'}\\ \frac{6B'}{L'}-B'\bar{\vartheta}_{G2}'d_G'^{-1}\mu_\xi'\frac{6B'}{L'}\end{bmatrix}[\bar{\delta}_\zeta'](\eta_\zeta)\quad\cdots(69)$$

ただし

$$[d_G]=[\delta_\eta' J'\bar{\delta}_\eta'+\mu_\eta 3B\bar{\mu}_\eta+\delta_\eta B\bar{\delta}_\eta],$$

$$[d_G']=[\delta_\xi J\bar{\delta}_\xi+\mu_\xi' 3B'\bar{\mu}_\xi'+\delta_\xi' B'\bar{\delta}_\xi'],$$

$$[e_G]=\left[\frac{12B}{L^2}\right]-\left[\frac{6B}{L}\bar{\mu}_\eta d_G^{-1}\mu_\eta\frac{6B}{L}\right],$$

$$[e_G{}']=\left[\frac{12B'}{L'^2}\right]-\left[\frac{6B'}{L'}\bar{\mu}_{\xi}{}'d_G{}'^{-1}\mu_{\xi}{}'\frac{6B'}{L'}\right]$$

$$[\vartheta_{G_1}]=[3\,\mu_\eta+\delta_\eta],\quad [\vartheta_{G_2}]=[3\,\mu_\eta-\delta_\eta],$$

$$[\vartheta_{G_1}{}']=[3\,\mu_\xi{}'+\delta_\xi{}'],\quad [\vartheta_{G_2}{}']=[3\,\mu_\xi{}'-\delta_\xi{}']$$

特にねじり剛性が無視できる場合は $[J]=0$, $[J']=0$ となるから，上の諸式において $[d_G]$, $[e_G]$ などをつぎのごとくおきかえることができる。

$$[d_G]=[\alpha_\eta,\ \beta_\eta]\begin{bmatrix}4B, & 2B\\ 2B, & 4B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_\eta\\ \bar{\beta}_\eta\end{bmatrix},$$

$$[d_G{}']=[\alpha_\xi{}',\ \beta_\xi{}']\begin{bmatrix}4B', & 2B'\\ 2B', & 4B'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_\xi{}'\\ \bar{\beta}_\xi{}'\end{bmatrix},$$

$$[e_G]=[L^{-1}\bar{\omega}_\eta s_G{}^{-1}\omega_\eta L^{-1}],$$

$$[e_G{}']=[L'^{-1}\bar{\omega}_\xi{}'s_G{}'^{-1}\omega_\xi{}'L'^{-1}],$$

$$\begin{bmatrix}B\,\bar{\vartheta}_{G_1}\\ B\,\bar{\vartheta}_{G_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4B, & 2B\\ 2B, & 4B\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_\eta\\ \bar{\beta}_\eta\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}B'\bar{\vartheta}_{G_1}{}'\\ B'\bar{\vartheta}_{G_2}{}'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4B', & 2B'\\ 2B', & 4B'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_\xi{}'\\ \bar{\beta}_\xi{}'\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{6B}{L}-B\bar{\vartheta}_{G_1}d_G{}^{-1}\mu_\eta\dfrac{6B}{L}\\ \dfrac{6B}{L}-B\bar{\vartheta}_{G_2}d_G{}^{-1}\mu_\eta\dfrac{6B}{L}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_\eta\\ \bar{\beta}_\eta\end{bmatrix}_{\perp}[s_G{}^{-1}\omega_\eta L^{-1}]$$

$$\begin{bmatrix}\dfrac{6B'}{L'}-B'\bar{\vartheta}_{G_1}{}'d_G{}'^{-1}\mu_\xi{}'\dfrac{6B'}{L'}\\ \dfrac{6B'}{L'}-B'\bar{\vartheta}_{G_2}{}'d_G{}'^{-1}\mu_\xi{}'\dfrac{6B'}{L'}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_\xi{}'\\ \bar{\beta}_\xi{}'\end{bmatrix}_{\perp}[s_G{}'^{-1}\omega_\xi{}'L'^{-1}]$$

$$[\omega_\eta]=[\alpha_\eta,\beta_\eta]_{\perp}\begin{bmatrix}L^{-1}\\ L^{-1}\end{bmatrix},$$

$$[\omega_\xi{}']=[\alpha_\xi{}',\beta_\xi{}']_{\perp}\begin{bmatrix}L'^{-1}\\ L'^{-1}\end{bmatrix},$$

$$[s_G]=[\alpha_\eta,\ \beta_\eta]_{\perp}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{3B}, & \dfrac{-1}{6B}\\ \dfrac{-1}{6B}, & \dfrac{1}{3B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_\eta\\ \bar{\beta}_\eta\end{bmatrix}_{\perp},$$

$$[s_G{}']=[\alpha_\xi{}',\beta_\xi{}']_{\perp}\begin{bmatrix}\dfrac{1}{3B'}, & \dfrac{-1}{6B'}\\ \dfrac{-1}{6B'}, & \dfrac{1}{3B'}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\alpha}_\xi{}'\\ \bar{\beta}_\xi{}'\end{bmatrix}_{\perp}$$

(4) 結　論

1.(2) で定義した「直交する行列」,「広義の逆行列」および「形状行列」などを導入することによって，一般の立体構造物を解くための基本式および解式を求めることができた。特に平面構造物の場合には，荷重を面内荷重と面外荷重にわけると，それぞれを独立に解くことができることを示した。また著者が誘導した逆行列の公式を利用することによって，はり，アーチ構造物，ラーメン構造物，トラス構造物，格子桁などの解がどのような形になるかを示した。

しからば，これらのどの段階で電子計算機にかけるべきかという問に対しては，「骨組構造物の複雑さの度合と電子計算機の能力によって異なる」といわざるを得ない。一般に節点の数を p，支点反力の数を r とすると，**2.(2)** の解式の係数行列は $(6p-r)$ 元の行列であるが，これを面内荷重と面外荷重にわけて求めた **3.(1)** および **4.(1)** の解式の係数行列は $(3p-r)$ 元の行列になる。さらにはり，アーチ構造物，ラーメン構造物，トラス構造物，格子桁などに細分した各節では $(p-r)\sim(2p-r)$ 元の行列を取り扱っている。一方，大型の電子計算機であれば，数百元の行列の逆行列でも比較的容易に，短時間に求めることができるが，小型の電子計算機では 30～40 元の行列の逆行列を求めることが限度で，しかも大型の 100 倍以上の時間を必要とする。たとえば柱の下端がヒンジになった箱形の立体ラーメンを考えると $p=4$, $r=4$, $6p-r=20$ である。したがって，この程度の構造物ならば，小型の電子計算機でも，**2.(2)** の解式で解くことができる。しかし 10 格間のフィレンデール桁の場合であると，$p=22$, $r=3$, $6p-r=129$ となり，小型の電子計算機では **2.(2)** や **3.(1)** の解式で解くことは困難である。したがって，**3.(4)** の方法によらなければならない。

最近では電子計算機で計算を行なったという論文が見られるようになったが，その多くは連立一次方程式の係数は手計算で求め，逆行列の計算だけに電子計算機を利用している。しかし，これでは電子計算機を逆行列計算機として利用しているだけで，その能力を十分に活用していないし，連立一次方程式の係数を求めるときに誤りが入る可能性がある。電子計算機で計算する場合は修正を加えないなまのデータを入れて，人間による手計算をできるだけ少なくすることが望ましい。この点でも本論文の方法は，一歩前進したものであると考える。

なお，**2.(2)** の解式を変断面部材や曲線部材をふくむ構造物に拡張すること，あるいは安定問題や振動問題に利用することは容易であり，特別な場合についてはすでに発表済であるが，本筋からそれるので割愛した。

参　考　文　献

1) 四野宮・大地：逆行列に関する二，三の公式，土木学会論文集 24,(1955) p.78～82
2) 大地：行列による平面骨組構造の解法，土木学会論文集 47,(1957) p.7～17
3) 大地：行列による梁および平板の解法，第 14 回土木学会年次学術講演会講演概要,(1955) p.49～50
4) 大地：行列によるトラス構造の解法，土木学会論文集 66,(1960) p.14～20
5) 大地：立体骨組構造物の解法，土木学会論文集 69,(1960) p.1～8
6) 大地：格子桁の行列論的解釈，第 10 回応用力学連合講演会論文抄録集第Ⅰ部,(1960) p.71～72
7) 大地：電子計算機とその応用 (7),土木学会誌 46-2(1961) p.49～53
8) 大地：行列による骨組構造物の解法，鉄道技術研究報告 No. 260,(1961)

(原稿受付：1962.4.10)

MATRIX SOLUTION OF FRAMED STRUCTURES

By Dr. Eng., Yohzoh Ochi, C.E. Member

The solution of a framed structure reduces to the formulation and solving of a linear equation. Up to now it has required many hours solve a linear equation, so the time to formulate a linear equation was out of the question. But now things are entirely different with the advent of electronic digital computers. The calculating speed of the electronic digital computers is so rapid that the time to solve a linear equation now is practically allmost negligible, but instead, a new problem has arisen about finding an accurate and speedy method to formulate a linear equation. The utilization of matrices will answer the purpose.

Many literatures which treat of the matrix soluton of framed structures have been published in Europe and America since about 1950. Papers of which the subject is the utilization of the electronic digital computer are published too, and most of them make use of matrices. But, as these papers state only the principle of the matrix handling, we must build a coefficient matrix to solve individual problems by means of repectively different operations, considering the connected states of members and the support conditions. Therefore the formulation of a common equation applicable to all of the framed structures has been desired.

As stated above the matrix is a useful means for electronic digital computers, but matrices having a high order cannot be handled at one time. An electronic digital computer has its given capacity (number of digits which can be memorized). So we must calculate a matrix which is beyond the capacity of electronic digital computer, dividing it into submatrices.

This paper solves the above mentioned two problems (the common equation and the operation of submatrices). First, the author defines a shape matrix peculiar to each framed structure, and derives a general equation which can be applied to almost all the framed structures. Next, the common matrix equation with reduced order of the general equation is introdused by means of an orthogonal matrix and a wide sense inverse matrixs which are defined by the author. The coefficient matrix of this common matrix equation is a positive-definite symmetric matrix. Finaly, the author derived formulas for obtaining the inverse of the coefficient matrix by means of the submatrix operation, and was able to make up the lack of the memory capacity in the electronic digital computer.

(Received by the Society April 10, 1962)