

曲線直交異方性変厚扇形平板の曲げについて

芳 村 仁*

要 旨 本論文は極座標を採用して考えるとき、極方向 (r 方向) と接線方向 (θ 方向) とで弾性的性質を異にし、板厚が r 方向に変化する扇形平板の曲げについて論じたものである。はじめにその基礎微分方程式を誘導し、それを任意の荷重が作用する扇形平板に適用しその解を求めた。数値計算例として厚さが直線的变化をなし、梯形状分布荷重および等分布満載荷重が作用する場合についてたわみおよび曲げモーメントを求め、筆者が前論文で計算した等厚板のそれとも比較を行ない変厚板の特性を明らかにしたものである。

1. 緒 論

変厚板の曲げの問題は板の材料が等方性のものについては矩形板および円板について従来より研究されている。極座標を採用して取り扱ったものについては、等方性変厚円板を Otto Pichler¹⁾ が軸対称のものについて研究している。しかし極方向 (r 方向) と接線方向 (θ 方向) とで弾性的性質の異なる平板すなわち極座標で考えたときのいわゆる曲線直交異方性平板で板厚が変化する場合の研究はないので、ここにその基礎微分方程式を誘導しそれを二直線辺 (r 方向) が単純支持された扇形平板の曲げの問題に適用し解を求めた。 r 方向変厚扇形平板はその変厚の仕方により、つぎの2つの場合において考えることができる。すなわち

- (1) 変厚の始点が座標の原点と一致する場合
 - (2) 変厚の始点が座標の原点と一致しない場合
- である。本論文ではおもに(1)について検討した。

2. 基本微分方程式

たわみを w , E_r : r 方向のヤング係数, E_θ : θ 方向のヤング係数, ν_r, ν_θ : r および θ 方向のポアソン比とすると M_r ($r=\text{const.}$ の面に働く曲げモーメント), M_θ ($\theta=\text{const.}$ の面に働く曲げモーメント) およびねじりモーメント $M_{r\theta}, M_{\theta r}$ は扇形平板の r 方向の板厚が連続的に変化する場合を取り扱うので等厚板のときの式をこ

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N_r \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -N_\theta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ M_{r\theta} &= -C_1 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \quad M_{\theta r} = -C_2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

の場合も使用すると式(1)のようである。

ただし

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}, \quad N_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)} \\ C_1, C_2 &= \text{ねじり剛度} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

h は r の関数であり、したがって板剛度 N_r, N_θ , ねじり剛度 C_1, C_2 は r の関数として表わされる。

つぎに等厚の扇形平板を取り扱ったときと同様に²⁾, いま考えている平板の微小扇形要素を取りだし、荷重 $p(r, \theta)$ と断面力とのつりあいを考える。 $r=\text{const.}$ の面に働くせん断力を $Q_r, \theta=\text{const.}$ の面に働くせん断力を Q_θ とすると、それらは

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{M_r + M_\theta}{r} \\ Q_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{M_{r\theta} + M_{\theta r}}{r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

となる。 z 方向のつりあいから荷重と断面モーメントの関係は結局つぎのようになる。すなわち

$$p = -\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 M_{\theta r}}{\partial \theta^2} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial r \partial \theta} \dots(4)$$

式(4)に式(1)を代入すると $\frac{\partial N_r}{\partial \theta}, \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta}$ などは消失し、結局次式が得られる。

$$\begin{aligned} p &= N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^4} + \left[\frac{2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r}{r} + 2 \frac{dN_r}{dr} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial r^3} \\ &+ \left[\frac{N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r}{r^2} + 2 \frac{C_2}{r^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} \\ &+ \left[\frac{C_1 - 3C_2 - 2N_r \nu_\theta}{r^3} + 2 \left(\frac{dC_2}{dr} + \nu_\theta \frac{dN_r}{dr} \right) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta^2} \\ &+ \left[\frac{2N_r \nu_\theta + 2N_\theta + 3C_2 - C_1}{r^4} + \frac{1}{r} \left(-2 \frac{dC_2}{dr} \right. \right. \\ &- 2\nu_\theta \frac{dN_r}{dr} - \frac{dN_\theta}{dr} \left. \right) + \frac{\nu_\theta}{r^2} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \left. \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ &+ \left[\frac{N_\theta}{r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{dN_\theta}{dr} + \frac{\nu_r}{r^2} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \right] \frac{\partial w}{\partial r} \\ &+ \left[-\frac{N_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} (2(1+\nu_\theta) \frac{dN_r}{dr} - \nu_r \frac{dN_\theta}{dr}) \right. \\ &\left. + \frac{d^2 N_r}{dr^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{N_\theta}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^4} \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

これが極座標で考えた曲線直交異方性変厚板の曲げの基本微分方程式である。

なお、板厚が一定のときは $\frac{dN_r}{dr}$ 等が消失し、先に筆者が誘導した等厚板の微分方程式²⁾ と一致する。また $N_r = N_\theta = N, C_1 = C_2 = -(1-\nu)N$ とすると等方性変厚板の式になり O. Pichler の論文にある微分方程式と一

* 正員 工修 北海道大学助教授 工学部土木工学科

致する*。

3. 曲げモーメント、せん断力および反力

式(5)の微分方程式を解いて、たわみ $w(r, \theta)$ が求ま

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} (N_\theta \nu_r - N_r \nu_\theta - N_r) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{N_\theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^3} (N_r \nu_\theta + N_\theta + C_1) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{1}{r^2} (-N_r \nu_\theta - C_1) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{dN_r}{dr} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} \\ Q_\theta &= -N_\theta \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{(C_1 + N_r \nu_r)}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \theta} - N_\theta \frac{1}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^3} - \frac{dC_1}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

c) 反力 V_r, V_θ

$$\left. \begin{aligned} V_r &= -N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{(N_\theta \nu_r - N_r \nu_\theta - N_r)}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{N_\theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^3} (N_r \nu_\theta + N_\theta + 2C_1) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{(-N_r \nu_\theta - 2C_1)}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{dN_r}{dr} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right\} \\ V_\theta &= -\frac{(N_\theta \nu_r + C_1 + C_2)}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{(N_\theta - 2C_2)}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{2C_2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^3} \\ &\quad - \left\{ \frac{dC_1}{dr} + \frac{dC_2}{dr} \right\} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

4. 有限 Fourier Sine 変換

$w(r, \theta)$ を区間 $0 < \theta < \alpha$ で連続な関数とすると w の θ に関する有限 Fourier Sine 変換 $S\{w(r, \theta)\}$ は

$$S\{w(r, \theta)\} = \int_0^\alpha w(r, \theta) \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \cdot d\theta \dots\dots\dots (8)$$

$n=1, 2, 3, \dots\dots\dots$

と定義される。またその逆変換は式(9)のように書くことができる。

ると断面力は次式から得ることができる。

a) 曲げモーメントおよびねじりモーメントは式(1)より求まる。

b) せん断力 Q_r, Q_θ はつぎのようになる。

$$w(r, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,2,3,\dots} S\{w(r, \theta)\} \cdot \sin \frac{n\pi}{\alpha} \theta \dots\dots\dots (9)$$

5. 変厚扇形平板の曲げ

扇形平板の中心角を α とする。微分方程式(5)の各項に $0 < \theta < \alpha$ の区間で θ に関する有限 Fourier Sine 変換を施すと計算の結果式(10)が得られる。なお、 $S\{w(r, \theta)\}$ を便宜上 w_s と記すことにする。

$$\begin{aligned} & N_r \frac{d^4 w_s}{dr^4} + \left[\frac{2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r}{r} + 2 \frac{dN_r}{dr} \right] \frac{d^3 w_s}{dr^3} + \left[\frac{-\beta^2 (N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2C_2)}{r^2} - \frac{N_\theta}{r^2} \right. \\ & + \frac{1}{r} \left\{ 2(1 + \nu_\theta) \frac{dN_r}{dr} - \nu_r \frac{dN_\theta}{dr} \right\} + \frac{d^2 N_r}{dr^2} \frac{d^2 w_s}{dr^2} + \left[\frac{-\beta^2 (C_1 - 3C_2 - 2\nu_\theta N_r) + N_\theta}{r^3} \right. \\ & - \frac{2\beta^2}{r^2} \left\{ \frac{dC_2}{dr} + \nu_\theta \frac{dN_r}{dr} \right\} - \frac{1}{r^2} \frac{dN_\theta}{dr} + \frac{\nu_\theta}{r} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \left. \right] \frac{dw_s}{dr} + \beta^2 \left[\frac{C_1 - 3C_2 - 2N_r \nu_\theta - 2N_\theta}{r^4} \right. \\ & + \frac{1}{r} \left\{ 2 \frac{dC_2}{dr} + 2\nu_\theta \frac{dN_r}{dr} + \frac{dN_\theta}{dr} \right\} - \frac{\nu_\theta}{r^2} \frac{d^2 N_r}{dr^2} + \frac{\beta^2 N_\theta}{r^4} \left. \right] w_s = S\{p(r, \theta)\} \\ & + \frac{1}{r^2} \{N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2C_2\} \beta [(-1)^n w''(r, \alpha) - w''(r, 0)] + \beta \left\{ \frac{1}{r^3} (C_1 - 3C_2 - 2N_r \nu_\theta) \right. \\ & + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dC_2}{dr} + \nu_\theta \frac{dN_r}{dr} \right) \left. \right\} [(-1)^n w'(r, \alpha) - w'(r, 0)] + \frac{\beta}{r^4} \left\{ \frac{1}{r^4} (2N_r \nu_\theta + 2N_\theta - C_1 + 3C_2) \right. \\ & - \frac{1}{r^3} \left(2 \frac{dC_2}{dr} + 2\nu_\theta \frac{dN_r}{dr} + \frac{dN_\theta}{dr} \right) + \frac{\nu_\theta}{r^2} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \left. \right\} \times [(-1)^n w(r, \alpha) - w(r, 0)] \\ & + \frac{N_\theta}{r^2} \left\{ \beta \left[(-1)^n \left(\frac{M_\theta}{N_\theta} \right)_{\theta=\alpha} + \frac{1}{r} w'(r, \alpha) + \nu_r w''(r, \alpha) \right] - \left(\frac{M_\theta}{N_\theta} \right)_{\theta=0} \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} w'(r, 0) + \nu_r w''(r, 0) \right\} + \frac{\beta^3}{r^2} [(-1)^n w(r, \alpha) - w(r, 0)] \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

上式中 $S\{p(r, \theta)\}$ は荷重 $p(r, \theta)$ の θ に関する有限 Sine 変換を表わす。中心角 α の扇形平板の $\theta=0, \theta=\alpha$

の二直線辺が単純支持であるとすると式(10)の右辺の第2項以下にふくまれている境界条件はすべて消失し、第1項の $S\{p(r, \theta)\}$ のみが残ることになる。以下放射方向の二直線辺が単純支持の場合を取り扱うことにする。この w_s に関する4階の微分方程式を与えられた二円弧辺での境界条件を満足するように解いて w_s を求めるとたわみ $w(r, \theta)$ は式(9)の逆変換公式から、また、その他の断面力、反力などは式(1),(6),(7)から得ることができる。

* 文献2)中にある等方性変厚円板の基本微分方程式には印刷の誤りと思われる箇所があるので、それらを訂正したものを示すとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} N \Delta \Delta w + \frac{dN}{dr} \left[2 \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{2+\nu}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} \right. \\ + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r \partial \theta} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \left. \right] + \frac{d^2 N}{dr^2} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right. \\ + \frac{\nu}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \left. \right] = p \end{aligned}$$

6. 境界条件

二円弧辺における境界条件はつぎのとおりである。内側の円弧までの距離を b ，外側の円弧までの距離を a とすると

a) $r=a$ または $r=b$ で完全固定の場合

$$w=0, \frac{\partial w}{\partial r}=0 \dots\dots\dots(11)$$

b) $r=a$ または $r=b$ が完全自由辺である場合

$$\left. \begin{aligned} M_r=0; \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) &= 0 \\ V_r=0; -N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^3} + \frac{(N_\theta \nu_r - N_r \nu_\theta - N_r)}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ &+ \frac{N_\theta}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^3} (N_r \nu_\theta + N_\theta + 2C_1) \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ &- \frac{(N_r \nu_\theta + 2C_1)}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r \partial \theta^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

c) $r=a$ または $r=b$ が単純支持された場合

$$\left. \begin{aligned} w=0 \\ M_r=0; \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

上の表現でわかるように完全自由な円弧辺の場合の条件には $\frac{dN_r}{dr}$ の項は消失し等厚板のときの境界条件と同じものになる。

7. 放射方向の二直線辺が単純支持された扇形平板

微分方程式 (10) には w_s の導関数の係数に平板の曲げ剛度およびねじり剛度 N_r, N_θ, C_1, C_2 が入っている。これらの値が考えている平板から直接与えられる場合は式 (10) からすぐ計算することができるが、ここでは一般的に取り扱うため、板厚が連続的に変化している場合を考えるので、等厚板のとき行なったようにねじりモーメントおよびねじり剛性について

$$\begin{aligned} M_{r,\theta} &= M_{\theta,r} = -C \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ &= -(1 - \nu_r \nu_\theta) \sqrt{N_r N_\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \dots\dots(14)$$

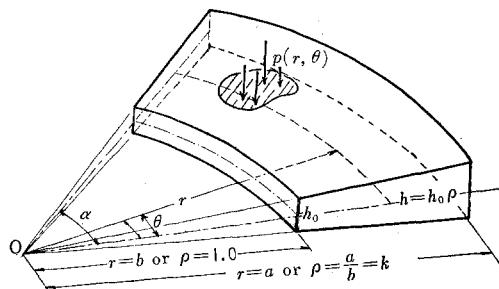
と表わし

$$\frac{N_\theta}{N_r} = c^2 \dots\dots\dots(15)$$

とおくと式 (10) はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} N_r \frac{d^4 w_s}{dr^4} + 2 \left[\frac{N_r}{r} + \frac{dN_r}{dr} \right] \frac{d^2 w_s}{dr^2} \\ + \left[\frac{-2c\beta^2 + c^2}{r^2} N_r + \frac{(2+c^2\nu_r)}{r} \frac{dN_r}{dr} \right] \\ + \frac{d^2 N_r}{dr^2} \frac{d^2 w_s}{dr^2} + \left[\frac{2c\beta^2 + c^2}{r^3} N_r \right. \\ - \left. \frac{(2c\beta^2 + c^2)}{r^2} \frac{dN_r}{dr} + \frac{c^2\nu_r}{r} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \right] \frac{dw_s}{dr} \\ + \beta^2 \left[\frac{-2c^2 - 2c + c^2\beta^2}{r^4} N_r + \frac{(2c+c^2)}{r^3} \frac{dN_r}{dr} \right. \\ - \left. \frac{c^2\nu_r}{r} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \right] w_s = S\{p(r,\theta)\} \end{aligned} \dots\dots\dots(16)$$

図一 厚さが直線的に変化する扇形平板の図



8. 板厚が $h=h_0'r$ の変化をなし分布荷重になう場合 (図一)

r 方向に板厚が直線の変化をなす場合を考える。微分方程式は式 (16) より、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_s}{dr^4} + \frac{8}{r} \frac{d^2 w_s}{dr^2} + \frac{(12-2c\beta^2-c^2+3c^2\nu_r)}{r^2} \\ \cdot \frac{d^2 w_s}{dr^2} + \frac{1}{r^3} [-2(2c\beta^2+c^2)+6c^2\nu_r] \frac{dw_s}{dr} \\ + \frac{\beta^2}{r^4} [c^2+4c+c^2\beta^2-6c^2\nu_r] w_s = \frac{S\{p(r,\theta)\}}{N_r(h_0'r)^3} \end{aligned} \dots\dots\dots(17)$$

式中 $\bar{N}_r = \frac{E_r}{12(1-\nu_r\nu_\theta)}$ である。ここで変数 r を無次元表示すると計算が便利なので r の代りに

$$\rho = \frac{r}{b}$$

を導入すると板厚 h は h_0' の代りに h_0 を用い

$$h = h_0\rho \text{ (} h_0 \text{ は } r=b \text{ すなわち } \rho=1 \text{ のところの板厚)}$$

と表わすことができ、方程式 (16) の左辺は $r \rightarrow \rho$ に代りまた右辺は

$$\frac{S\{p(r,\theta)\}b^4}{\bar{N}_r h_0^3 \rho^3} = \frac{S\{p(r,\theta)\}b^4}{\bar{N}_{r0} \rho^3}$$

となる。ここに N_{r0} は、 $r=b$ のところの単位巾についての板剛度を表わすことになり、剛度の基準として用いることにする。 $S\{p(r,\theta)\}$ は前にも書いたように荷重の Sine 変換したものであり、

a) 荷重が梯形状分布をしている場合

すなわち

$$p(r,\theta) = q_0\rho \text{ (} q_0 \text{ は } M/L^2 \text{ の Dimension をもつ)}$$

のときには

$$S\{p(r,\theta)\} = S\{q_0\rho\} = \frac{q_0[1-(-1)^n]}{\beta} \rho \dots\dots(18)$$

$$n=1,2,3,\dots \quad \beta = \frac{n\pi}{\alpha}$$

b) 等分布満載荷重のときには

$$p(r,\theta)q_0 = \text{const. (} q_0 \text{ は } M/L^2 \text{ の Dimension をもつ)}$$

したがって

$$S\{p(r,\theta)\} = S\{q_0\} = \frac{q_0[1-(-1)^n]}{\beta} \dots\dots\dots(19)$$

$$n=1,2,3,\dots \quad \beta = \frac{n\pi}{\alpha}$$

となる。そのほか任意の分布荷重についてはその有限 Sine 変換の値を計算すればよい。

式 (16) の解は右辺が 0 の解 w_0 と特解 w_p との組合わせになるが、まず w_0 を求めることにする。 $w_s = w_0 = r^2$ において式 (16) に代入するとつぎのように 4 次の特性方程式が得られる。

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 - (1 + c^2 + 2c\beta^2)\lambda^2 - (2 + c^2 + 2c\beta^2)\lambda + \beta^2(c^2 + 4c + c^2\beta^2) = 0 \dots\dots\dots(20)$$

式 (20) から得られる 4 つの相異なる根を $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ とすると w_0 は、

$$w_0 = C_1\rho^{\lambda_1} + C_2\rho^{\lambda_2} + C_3\rho^{\lambda_3} + C_4\rho^{\lambda_4} \dots\dots\dots(21)$$

となり C_1, C_2, C_3, C_4 は任意定数である。式 (20) は実係数を有する 4 次式であるので、その根は一般につきのように 2 組の共役複素根で表わされる。すなわち

$$\left. \begin{matrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{matrix} \right\} = A_1 \pm B_1 i, \quad \left. \begin{matrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{matrix} \right\} = A_2 \pm B_2 i \dots\dots\dots(22)$$

A, B は実数であり $i = \sqrt{-1}$ である。

つぎに特解 w_p は

a) $p(r, \theta) = q_0 \rho$ の場合は式 (18) と (16) より

$$w_p = \frac{2q_0 b^4}{N_{r0}\beta} \frac{\rho^2}{G_I}, \dots\dots\dots(23)$$

$n=1, 3, 5$

ただし

$$G_I = c^2\beta^4 + (c^2 - 8c - 6c^2\nu_r)\beta^2 + (24 - 6c^2 + 18c^2\nu_r)$$

b) $p(r, \theta) = q_0 = \text{const.}$ の場合は式 (19) と (16) から

$$w_p = \frac{2q_0 b^4}{N_{r0}\beta} \frac{\rho}{G_{II}} \dots\dots\dots(24)$$

ただし

$$G_{II} = c^2\beta^4 + (c^2 - 6c^2\nu_r)\beta^2 + (6c^2\nu_r - 2c^2) *$$

$$w(\rho, \theta) = -\frac{2q_0 b^4}{N_{r0}\alpha} \sum_{n=1,3,5,\dots} \left\{ \rho^{A_1} \cos(B_1 \ln \rho) \cdot y_1 + \rho^{A_2} \sin(B_1 \ln \rho) \cdot y_2 + \rho^{A_2} \cdot \cos(B_2 \ln \rho) \cdot y_3 + \rho^{A_2} \cdot \sin(B_2 \ln \rho) \cdot y_4 - \frac{2\rho^2}{G_I \beta} \right\} \sin \beta \theta \dots\dots\dots(28)$$

$$M_r(\rho, \theta) = \frac{2q_0 b^2 c^2 \rho^3}{\alpha} \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ \rho^{A_1-2} \cdot K_1 \cdot y_1 + \rho^{A_1-2} \cdot K_2 \cdot y_2 + \rho^{A_2-2} \cdot K_3 \cdot y_3 + \rho^{A_2-2} \cdot K_4 \cdot y_4 - \frac{2[2 + (2-\beta^2)c^2\nu_r]}{G_I \beta} \right\} \sin \beta \theta \dots\dots\dots(29)$$

$$M_\theta(\rho, \theta) = \frac{2q_0 b^2 c^2 \rho^3}{\alpha} \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ E_1 \rho^{A_1-2} \cdot y_1 + E_2 \rho^{A_1-2} \cdot y_2 + E_3 \rho^{A_2-2} \cdot y_3 + E_4 \rho^{A_2-2} \cdot y_4 - \frac{2(2-\beta^2 + 2\nu_r)}{G_I \beta} \right\} \sin \beta \theta \dots\dots\dots(30)$$

$$M_{r\theta}(\rho, \theta) = \frac{2q_0 b^2 (c - c^2\nu_r) \rho^3}{\alpha} \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ F_1 \rho^{A_1-2} \cdot y_1 + F_2 \rho^{A_1-2} \cdot y_2 + F_3 \rho^{A_2-2} \cdot y_3 + F_4 \rho^{A_2-2} \cdot y_4 - \frac{6\beta}{G_I \beta} \cos \beta \theta \dots\dots\dots(31)$$

$$Q_r(\rho, \theta) = \frac{2q_0 b}{\alpha} \sum_{n=1,3,\dots} \left[\rho^3 \left\{ G_1 \rho^{A_1-3} \cdot y_1 + G_2 \rho^{A_1-3} \cdot y_2 + G_3 \rho^{A_2-3} \cdot y_3 + G_4 \rho^{A_2-3} \cdot y_4 - \frac{2\rho^{-1}(c-1)[c(\beta^2-2)-2]}{G_I \beta} \right\} + 3\rho^2 \left\{ K_1 \rho^{A_1-2} \cdot y_1 + K_2 \rho^{A_1-2} \cdot y_2 + K_3 \rho^{A_2-2} \cdot y_3 + K_4 \rho^{A_2-2} \cdot y_4 - \frac{2[2 + (2-\beta^2)c^2\nu_r]}{G_I \beta} \right\} \right] \sin \beta \theta \dots\dots\dots(32)$$

$$Q_\theta(\rho, \theta) = \frac{2q_0 b}{\alpha} \sum_{n=1,3,\dots} \left[\rho^3 \left\{ H_1 \rho^{A_1-3} \cdot y_1 + H_2 \rho^{A_1-3} \cdot y_2 + H_3 \rho^{A_2-3} \cdot y_3 + H_4 \rho^{A_2-3} \cdot y_4 - \frac{2\rho^{-1}[2c - \beta^2 c + 2]c\beta}{G_I \beta} \right\} + 3(c - c^2\nu_r) \rho^2 \left\{ F_1 \rho^{A_1-2} \cdot y_1 + F_2 \rho^{A_1-2} \cdot y_2 + F_3 \rho^{A_2-2} \cdot y_3 + F_4 \rho^{A_2-2} \cdot y_4 - \frac{6\beta}{G_I \beta} \right\} \right] \cos \beta \theta \dots\dots\dots(33)$$

$$V_r(\rho, \theta) = \frac{2q_0 b}{\alpha} \sum_{n=1,3,\dots} \left[\rho^3 \left\{ L_1 \rho^{A_1-3} \cdot y_1 + L_2 \rho^{A_1-3} \cdot y_2 + L_3 \rho^{A_2-3} \cdot y_3 + L_4 \rho^{A_2-3} \cdot y_4 - \frac{2\rho^{-1}[2(1-c^2) + \beta^2(c^2 - 2c + c^2\nu_r)]}{G_I \beta} \right\} + 3\rho^2 \left\{ K_1 \rho^{A_1-2} \cdot y_1 + K_2 \rho^{A_1-2} \cdot y_2 + K_3 \rho^{A_2-2} \cdot y_3 + K_4 \rho^{A_2-2} \cdot y_4 - \frac{2(2-\beta^2 + 2\nu_r)}{G_I \beta} \right\} \right] \sin \beta \theta \dots\dots\dots(34)$$

$$V_\theta(\rho, \theta) = \frac{2q_0 b}{\alpha} \sum_{n=1,3,\dots} \left[\rho^3 \left\{ J_1 \rho^{A_1-3} \cdot y_1 + J_2 \rho^{A_1-3} \cdot y_2 + J_3 \rho^{A_2-3} \cdot y_3 + J_4 \rho^{A_2-3} \cdot y_4 - \frac{2\rho^{-1}[2c - \beta^2 c]c\beta}{G_I \beta} \right\} + 3(c - c^2\nu_r) \rho^2 \left\{ F_1 \rho^{A_1-2} \cdot y_1 + F_2 \rho^{A_1-2} \cdot y_2 + F_3 \rho^{A_2-2} \cdot y_3 + F_4 \rho^{A_2-2} \cdot y_4 - \frac{6\beta}{G_I \beta} \right\} \right] \cos \beta \theta \dots\dots\dots(35)$$

ただし

$$\left. \begin{matrix} K_1 = K \sin(B_1 \ln \rho) + \bar{K} \cos(B_1 \ln \rho), & K_2 = \bar{K} \sin(B_1 \ln \rho) - K \cos(B_1 \ln \rho) \\ K_3 = K' \sin(B_2 \ln \rho) + \bar{K}' \cos(B_2 \ln \rho), & K_4 = \bar{K}' \sin(B_2 \ln \rho) - K' \cos(B_2 \ln \rho) \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

* w_s は $w_0 + w_p$ で得ることができ式 (21), (22), (23) および (9) から任意定数を改めて C_1, C_2, C_3, C_4 とすると a) の場合の $w(\rho, \theta)$ は

$$w\rho(\rho, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,3,5} \left\{ \rho^{A_1} [C_1 \cos(B_1 \ln \rho) + C_2 \sin(B_1 \ln \rho) + \rho^{A_2} [C_3 \cos(B_2 \ln \rho) + C_4 \sin(B_2 \ln \rho)] + \frac{2q_0 b^4}{N_{r0}\beta} \frac{\rho^2}{G_I} \right\} \sin \beta \theta \dots\dots(25)$$

また b) の場合の $w(\rho, \theta)$ は

$$w(\rho, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,3,\dots} \left\{ \rho^{A_1} [C_1 \cos(B_1 \ln \rho) + C_2 \sin(B_1 \ln \rho) + \rho^{A_2} [C_3 \cos(B_2 \ln \rho) + C_4 \sin(B_2 \ln \rho)] + \frac{2q_0 b^4}{N_{r0}\beta} \frac{\rho}{G_{II}} \right\} \sin \beta \theta \dots\dots\dots(26)$$

となる。

式 (25) または (26) で $w(\rho, \theta)$ が求まったので断面力、反力などは前述の公式から求めることができるが、いま $p(r, \theta) = q_0 \rho$ なる梯形形状の荷重が作用する a) の場合について考えると、つぎのように任意定数 $C_1 \rightarrow C_4$ を $y_1 \rightarrow y_4$ におきかえると計算上都合がよい。すなわち

$$\left. \begin{matrix} -\frac{N_{r0}}{q_0 b^4} C_1 = y_1, & -\frac{N_{r0}}{q_0 b^4} C_2 = y_2 \\ -\frac{N_{r0}}{q_0 b^4} C_3 = y_3, & -\frac{N_{r0}}{q_0 b^4} C_4 = y_4 \end{matrix} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

このようにおきかえてたわみ、断面モーメント、せん断力および反力を求めた結果を示すとつぎのようになる。

$$\begin{array}{ll}
 E_1 = E \sin(B_1 \ln \rho) + E \cos(B_1 \ln \rho) & E_2 = E \sin(B_1 \ln \rho) - E \cos(B_1 \ln \rho) \\
 E_3 = E' \sin(B_2 \ln \rho) + E' \cos(B_2 \ln \rho) & E_4 = E' \sin(B_2 \ln \rho) - E' \cos(B_2 \ln \rho) \\
 F_1 = F \sin(B_1 \ln \rho) + \bar{F} \cos(B_1 \ln \rho) & F_2 = \bar{F} \sin(B_1 \ln \rho) - F \cos(B_1 \ln \rho) \\
 F_3 = F' \sin(B_2 \ln \rho) + \bar{F}' \cos(B_2 \ln \rho) & F_4 = \bar{F}' \sin(B_2 \ln \rho) - F' \cos(B_2 \ln \rho) \\
 G_1 = G \sin(B_1 \ln \rho) + \bar{G} \cos(B_1 \ln \rho) & G_3 = \bar{G} \sin(B_1 \ln \rho) - G \cos(B_1 \ln \rho) \\
 G_2 = G' \sin(B_2 \ln \rho) + \bar{G}' \cos(B_2 \ln \rho) & G_4 = \bar{G}' \sin(B_2 \ln \rho) - G' \cos(B_2 \ln \rho) \\
 H_1 = H \sin(B_1 \ln \rho) + \bar{H} \cos(B_1 \ln \rho) & H_2 = \bar{H} \sin(B_1 \ln \rho) - H \cos(B_1 \ln \rho) \\
 H_3 = H' \sin(B_2 \ln \rho) + \bar{H}' \cos(B_2 \ln \rho) & H_4 = \bar{H}' \sin(B_2 \ln \rho) - H' \cos(B_2 \ln \rho) \\
 L_1 = L \sin(B_1 \ln \rho) + L \cos(B_1 \ln \rho) & L_2 = L \sin(B_1 \ln \rho) - L \cos(B_1 \ln \rho) \\
 L_3 = L' \sin(B_2 \ln \rho) + L' \cos(B_2 \ln \rho) & L_4 = L' \sin(B_2 \ln \rho) - L' \cos(B_2 \ln \rho) \\
 J_1 = J \sin(B_1 \ln \rho) + \bar{J} \cos(B_1 \ln \rho) & J_2 = \bar{J} \sin(B_1 \ln \rho) - J \cos(B_1 \ln \rho) \\
 J_3 = J' \sin(B_2 \ln \rho) + \bar{J}' \cos(B_2 \ln \rho) & J_4 = \bar{J}' \sin(B_2 \ln \rho) - J' \cos(B_2 \ln \rho)
 \end{array} \quad (37)$$

上式中

$$\begin{array}{ll}
 \left. \begin{array}{l} K \\ K' \end{array} \right\} = B_1(1-2A_1-c^2\nu_r) & \left. \begin{array}{l} \bar{K} \\ \bar{K}' \end{array} \right\} = A_1^2 - A_1 + c^2\nu_r(A_1^2 - \beta^2) - \beta_1^2 \\
 \left. \begin{array}{l} E \\ E' \end{array} \right\} = B_1(\nu_r - 2A_1\nu_r - 1) & \left. \begin{array}{l} E \\ E' \end{array} \right\} = A_1 - \beta^2 + \nu_r(A_1^2 - A_1 - B_1^2) \\
 \left. \begin{array}{l} F \\ F' \end{array} \right\} = -B_1 & \left. \begin{array}{l} \bar{F} \\ \bar{F}' \end{array} \right\} = A_1 - 1 \\
 \left. \begin{array}{l} G \\ G' \end{array} \right\} = B_1(4A_1 - 3A_1 - 1 + B_1^2 + c^2 + \beta^2 c) & \left. \begin{array}{l} \bar{G} \\ \bar{G}' \end{array} \right\} = A_1^2 - 2A_1^2 + (1 - 3B_1^2 - c^2 - \beta^2 c)A_1 + 2B_1^2 + \beta^2(c^2 + c) \\
 \left. \begin{array}{l} H \\ H' \end{array} \right\} = (1 - c - 2A_1)B_1 & \left. \begin{array}{l} \bar{H} \\ \bar{H}' \end{array} \right\} = A_1^2 + (c - 1)A_1 - B_1^2 - \beta^2 c \\
 \left. \begin{array}{l} L \\ L' \end{array} \right\} = B_1(B_1^2 - 3A_1^2 + 4A_1 - 1 + 2c\beta - c^2\nu_r\beta^2 + c^2) & \\
 \left. \begin{array}{l} L \\ L' \end{array} \right\} = A_1(A_1^2 - 2A_1 - 3B_1^2 + 2c\beta^2 - c^2\beta^2\nu_r + c^2) + 2B_1^2 + (c^2 + 2c - c^2\nu_r)\beta^2 & \\
 \left. \begin{array}{l} J \\ J' \end{array} \right\} = \beta c B_1[4 - c - 3c\nu_r - 2(2 - c\nu_r)A_1] & \\
 \left. \begin{array}{l} \bar{J} \\ \bar{J}' \end{array} \right\} = \beta[2(c - c^2\nu_r) - \beta^2 c^2 + A_1[c^2 - 4c + 3c^2\nu_r + A_1(2c - c^2\nu_r)]] - B_1^2(2c - c^2\nu_r) &
 \end{array} \quad (38)$$

A_1, B_1 はたとえば K, \bar{K} のときは A_1, B_1 を K', \bar{K}' のときは A_2, B_2 をとるものとする。 界条件で決定されるものであり、いまその二辺が完全自由辺の場合を考えてみよう。式(12),(29),(34)を考慮

y_1, y_2, y_3 および y_4 なる未定係数は二円弧辺での境し、 $a/b=k$ とおくとつぎの連立方程式が得られる。

$\rho=1$ において $M_r=0$;

$$\bar{K}y_1 - Ky_2 + \bar{K}'y_3 - K'y_4 - \frac{2[2 + (2 - \beta^2)c^2\nu_r]}{\beta G_I} = 0 \quad (39.1)$$

$\rho=k$ において $M_r=0$;

$$\begin{aligned}
 & k^{4_1-2} [K \sin(B_1 \ln k) + \bar{K} \cos(B_1 \ln k)] y_1 + k^{4_1-2} [\bar{K} \sin(B_1 \ln k) - K \cos(B_1 \ln k)] y_2 \\
 & + k^{4_2-2} [K' \sin(B_2 \ln k) + \bar{K}' \cos(B_2 \ln k)] y_3 + k^{4_2-2} [\bar{K}' \sin(B_2 \ln k) - K' \cos(B_2 \ln k)] y_4 \\
 & - \frac{2[2 + (2 - \beta^2)c^2\nu_r]}{\beta G_I} = 0 \quad (39.2)
 \end{aligned}$$

$\rho=1$ において $V_r=0$;

$$Ly_1 - Ly_2 + L'y_3 + L'y_4 - \frac{2[2(1-c^2) + \beta^2 c(c-2+c\nu_r)]}{\beta G_I} = 0 \quad (39.3)$$

$\rho=k$ において $V_r=0$;

$$\begin{aligned}
 & k^{4_1-2} [L \sin(B_1 \ln k) + L \cos(B_1 \ln k)] y_1 + k^{4_1-2} [L \sin(B_1 \ln k) - L \cos(B_1 \ln k)] y_2 \\
 & + k^{4_2-2} [L' \sin(B_2 \ln k) + L' \cos(B_2 \ln k)] y_3 + k^{4_2-2} [L' \sin(B_2 \ln k) - L' \cos(B_2 \ln k)] y_4 \\
 & - \frac{2[2(1-c^2) + \beta^2 c(c-2+c\nu_r)]}{\beta G_I} = 0 \quad (39.4)
 \end{aligned}$$

この連立方程式を解いて y_1, y_2, y_3 および y_4 を求めるとつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 G_I \beta Dy_1 = & [(L'^2 + \bar{L}'^2) s_1 \{k^{4_1-2} (\bar{K} s_1 - K c_1) + K\} k^{4_2-2} + \{k^{4_2-2} (L \bar{L} c_2 - L \bar{L}' s_2) + k^{4_1-2} (L' L c_1 - L' \bar{L} s_1)\} \\
 & \cdot \{\bar{K}' - k^{4_2-2} (K' s_2 + \bar{K}' c_2)\} + \{k^{4_2-2} (-L L s_2 - L \bar{L}' c_2) - k^{4_1-2} (L' L' s_1 - \bar{L}' L c_1)\} \cdot \\
 & \cdot \{k^{4_2-2} (K' s_2 + \bar{K}' c_2) - K'\} P_M + [\{k^{4_2-2} (\bar{L}' s_2 - \bar{L} c_2) + L'\} \{k^{4_2-2} (-K K' s_2 - K \bar{K}' c_2) \\
 & - k^{4_1-2} (\bar{K}' \bar{K} s_1 - \bar{K} K c_1)\} + \{k^{4_1-2} (\bar{L} s_1 - L c_1) + L\} k^{4_2-2} (\bar{K}'^2 + K'^2) s_2 + \{k^{4_2-2} (L' s_2 + \bar{L}' c_2) - L'\} \\
 & \cdot \{k^{4_1-2} (L' L c_1 - L' \bar{L} s_1) + k^{4_2-2} (K \bar{K} s_2 - K \bar{K}' c_2)\}] P_V \quad (40.1)
 \end{aligned}$$

$$G_I \beta Dy_2 = [(\bar{L}'^2 + L'^2) s_2 \{ \bar{K} - k^{A_1-2} (K s_1 + \bar{K} c_1) + \bar{K} c_1 \} + \{ k^{A_2-2} (\bar{L} \bar{L}' s_2 - \bar{L} \bar{L}' c_2) + k^{A_1-2} (L' \bar{L} s_1 + L' \bar{L} c_1) \} \cdot \\ \cdot \{ k^{A_2-2} (K' s_2 + \bar{K}' c_2) - \bar{K}' \} - \{ k^{A_2-2} (\bar{L} \bar{L}' s_2 + \bar{L} \bar{L}' c_2) - k^{A_2-2} (\bar{L}' \bar{L} s_1 + \bar{L}' \bar{L} c_1) \} \cdot \\ \cdot \{ K' + k^{A_2-2} (\bar{K} s_2 - K' c_2) \} P_M + [\bar{K}'^2 + K'^2] s_2 \{ \bar{L} - k^{A_1-2} (L s_1 + \bar{L} c_1) \} k^{A_2-2} + \{ k^{A_2-2} (\bar{L}' s_2 + L' c_2) \\ + L' \} \{ k^{A_1-2} (\bar{K}' K s_1 + \bar{K}' \bar{K} c_1) k^{A_2-2} (\bar{K} K' s_2 + \bar{K} \bar{K}' c_2) \} + \{ k^{A_2-2} (L' s_2 + \bar{L}' c_2) - \bar{L}' \} \cdot \\ \cdot \{ k^{A_1-2} (\bar{K}' \bar{K}' s_2 - \bar{K}' K' c_2) + k^{A_1-2} (K' K s_1 + K' \bar{K} c_1) \}] P_V \dots \dots \dots (40.2)$$

$$G_I \beta Dy_3 = [(\bar{L}'^2 + L'^2) s_1 \{ k^{A_2-2} (\bar{K}' s_2 - K' c_2) + K' \} k^{A_1-2} + \{ k^{A_2-2} (L \bar{L}' c_2 - L \bar{L}' s_2) + k^{A_1-2} (L' \bar{L} s_1 - L' \bar{L} c_1) \} \cdot \\ \cdot \{ k^{A_1-2} (K s_1 + \bar{K} c_1) - \bar{K} \} - \{ k^{A_2-2} (\bar{L} \bar{L}' s_2 - \bar{L} \bar{L}' c_2) + k^{A_1-2} (L' \bar{L} s_1 + L' \bar{L} c_1) \} \cdot \\ \cdot \{ K + k^{A_1-2} (\bar{K} s_1 - K c_1) \}] P_M + [(K^2 + \bar{K}^2) s_1 \{ k^{A_2-2} (\bar{L} s_1 - \bar{L}' c_2) + L' \} k^{A_1-2} - \{ k^{A_2-2} (\bar{K} \bar{K} s_2 - \bar{K} K' c_2) \\ + k^{A_1-2} (K' K s_1 + K' \bar{K} c_1) \} \{ L + k^{A_2-2} (\bar{L} s_1 - L c_1) \} + \{ \bar{L} - k^{A_1-2} (\bar{L} \bar{L} s_1 - L c_1) \} \cdot \\ \cdot \{ k^{A_1-2} (K c_1 - K' \bar{K} s_1) - k^{A_2-2} (K K' c_2 - K \bar{K}' s_2) \}] P_V \dots \dots \dots (40.3)$$

$$G \beta Dy_4 = [(\bar{L}'^2 + \bar{L}'^2) s_1 \{ \bar{K}' - k^{A_2-2} (K' s_2 + \bar{K}' c_2) \} k^{A_1-2} + \{ k^{A_2-2} (\bar{L} \bar{L}' s_2 + \bar{L} \bar{L}' c_2) - k^{A_1-2} (\bar{L}' \bar{L} s_1 + \bar{L}' \bar{L} c_1) \} \cdot \\ \cdot \{ k^{A_1-2} (\bar{K} s_1 - K c_1) + K \} + \{ k^{A_2-2} (-L \bar{L}' s_2 - L \bar{L}' c_2) - k^{A_1-2} (\bar{L}' \bar{L} s_1 - \bar{L}' \bar{L} c_1) \} \cdot \\ \cdot \{ \bar{K}' - k^{A_1-2} (K s_1 + \bar{K} c_1) \}] P_M + [(K^2 + \bar{K}^2) s_1 \{ \bar{L}' - k^{A_2-2} (L' s_2 + \bar{L}' c_2) \} k^{A_1-2} + \{ \bar{L} - k^{A_1-2} (L s_1 + \bar{L} c_1) \} \cdot \\ \cdot \{ k^{A_2-2} (-K K' s_2 - K \bar{K}' c_2) - k^{A_1-2} (\bar{K}' \bar{K} s_1 - \bar{K}' K c_1) \} - \{ L + k^{A_1-2} (\bar{L} s_1 - L c_1) \} \cdot \\ \cdot \{ k^{A_1-2} (K \bar{K}' s_1 + \bar{K} \bar{K}' c_1) - k^{A_2-2} (\bar{K} K' s_2 + \bar{K} \bar{K}' c_2) \}] P_V \dots \dots \dots (40.4)$$

ただし

$$D = (K^2 + \bar{K}^2) (L^2 + \bar{L}'^2) s_1 \cdot s_2 \cdot k^{A_1+A_2-4} + (K'^2 + \bar{K}'^2) (L^2 + \bar{L}'^2) s_1 \cdot s_2 \cdot k^{A_1+A_2-4} \\ + \{ k^{A_2-2} (L \bar{L}' c_2 - L \bar{L}' s_2) - k^{A_1-2} (L' \bar{L} c_1 - L' \bar{L} s_1) \} \{ k^{A_1-2} (\bar{K}' K s_1 + \bar{K}' \bar{K} c_1) - k^{A_2-2} (\bar{K} K' s_2 - \bar{K} \bar{K}' c_2) \} \\ + \{ k^{A_2-2} (-L \bar{L}' s_2 - L \bar{L}' c_2) - k^{A_1-2} (\bar{L}' \bar{L} s_1 - \bar{L}' \bar{L} c_1) \} \{ k^{A_2-2} (\bar{K} \bar{K}' s_2 - \bar{K} K' c_2) + k^{A_1-2} (K' K s_1 + K' \bar{K} c_1) \} \\ + k^{A_2-2} (\bar{L} \bar{L}' s_2 - \bar{L} \bar{L}' c_2) k^{A_1-2} (L' \bar{L} s_1 + L' \bar{L} c_1) \} \{ k^{A_2-2} (-K K' s_2 - K \bar{K}' c_2) - k^{A_1-2} (\bar{K}' \bar{K} s_1 - \bar{K}' K c_1) \} \\ + \{ k^{A_2-2} (\bar{L} \bar{L}' s_2 + \bar{L} \bar{L}' c_2) - k^{A_1-2} (\bar{L}' \bar{L} s_1 + \bar{L}' \bar{L} c_1) \} \{ k^{A_1-2} (-K' \bar{K} s_1 + K' K c_1) - k^{A_2-2} (K K' c_2 - K \bar{K}' s_2) \} \\ \dots \dots \dots (41)$$

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= \sin(B_1 l_n k), & c_1 &= \cos(B_1 l_n k) \\ s_2 &= \sin(B_2 l_n k), & c_2 &= \cos(B_2 l_n k) \\ P_M &= 2[2 + (2 - \beta^2)c^2 \nu_r], & P_V &= 2[2(1 - c^2) + \beta^2 c(c - 2 + c \nu_r)] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (42)$$

つぎに b) $p = q_0$ (const.) なる等分布満載荷重のときは (28)→(35) 式中の { } 内の第 5 項がそれぞれ

$$w_\rho \rightarrow \frac{-2 \rho}{G_{III} \beta}, \quad M_r \rightarrow \frac{-2 \rho^2 c^2 \nu_r (1 - \beta^2)}{G_{II} \beta}, \\ M_\theta \rightarrow \frac{-2 \rho^2 (1 - \beta^2)}{G_{II} \beta}, \quad M_{r\theta} \rightarrow 0 \\ Q_r \rightarrow \frac{-2 \rho^2 c^2 (\beta^2 - 1)}{G_{II} \beta}, \quad Q_\theta \rightarrow \frac{-2 \rho^2 c^2 \beta (1 - \beta^2)}{G_{II} \beta}, \\ V_r \rightarrow \frac{-2 \rho^2 c^2 (\beta^2 - 1)}{G_{II} \beta}, \quad V_\theta \rightarrow \frac{-2 \rho^2 c^2 \beta (1 - \beta^2)}{G_{II} \beta}$$

とかわるだけであり、あとの式は a) の $p = q_0' r$ と全く同じである。

以上式 (20) の特性方程式の根が共役複素根の場合を扱ったが、もし 4 個の相異なる実根が得られるときは等厚板のときと同様に計算すればよい。

9. 板厚が $h = h_0' r^m$ ($m > 0$) の変化をする場合

r 方向の板厚が $h = h_0' r^m$ 、あるいは $r = b$ における板厚を h_0 として $h = h_0 \rho^m$ ($m > 0$) のように変化する場合は微分方程式は $r \rightarrow \rho$ に変換した形で示すと式 (16) より

$$\frac{d^4 w_s}{d \rho^4} + \frac{2(3m+1)}{\rho} \frac{d^3 w_s}{d \rho^3} \\ + \frac{[9m^2 + 3(1 + c^2 \nu_r)m - (2c\beta^2 + c^2)]}{\rho^2} \frac{d^2 w_s}{d \rho^2} \\ + \frac{[9c^2 \nu_r m^2 - 3(1 + c^2 \nu_r)m + (2c\beta^2 + c^2)]}{\rho^3} \frac{d w_s}{d \rho} \\ + \frac{\beta^2 [-9c^2 \nu_r m^2 + 3c(2 + c + c \nu_r)m + c(c\beta^2 - 2c - 2)]}{\rho^4} w_s$$

$$= \frac{S\{p(r, \theta)\} \cdot b^4}{N_{r0} \rho^{-m}} \dots \dots \dots (43)$$

となる。

前と同様に $w_s = \rho^\lambda$ において特性方程式を求めると

$$\lambda^4 + [6m - 4]\lambda^3 + [9m^2 + 3(c^2 \nu_r - 5)m + 5 - 2c\beta^2 + c^2]\lambda^2 \\ + [9(c^2 \nu_r - 1)m^2 + 6(1 - c^2 \nu_r) + 2(2c\beta^2 + c^2 - 1)]\lambda \\ + \beta^2 [-9m^2 c^2 \nu_r + 3(2c + c^2 + c^2 \nu_r)m + c^2 \beta^2 - 2c^2 - 2c] = 0 \\ \dots \dots \dots (44)$$

となり、これより得られる 4 つの根は式 (22) と同じ形で与えられ、あとの計算は 8. の場合と全く同様である。なお式 (43) の特解は一例として $p(r, \theta) = q_0$ なる等分布荷重のときは式 (19) を考慮すれば

$$w_\rho = \frac{2 q_0 b^4}{N_{r0} \beta} \frac{\rho^{-3m+4}}{G_{III}} \dots \dots \dots (45)$$

ただし

$$G_{III} = [63 - 18c^2 \nu_r - 9c\beta^2(2 + c \nu_r) - c^2]m^2 \\ + [19c^2 + 44c\beta^2 + 3(1 + \nu_r)c^2 \beta^2 + 24c^2 \nu_r - 138]m \\ + [72 + \beta^2(c^2 \beta^2 - 2c^2 - 2c)]$$

そのほか任意の $p(r, \theta)$ に対しても $S\{p(r, \theta)\}$ を求めると式 (43) からその特解を容易に得ることができる。

10. 集中荷重の作用する場合

平板上の任意に P なる集中荷重が作用するとき、等厚板のときと同じように載荷点をとおる円弧で平板を切断し、同次微分方程式を 2 つの平板に適用し 4 個の境界条件のほかにも 4 個の連続条件から 8 個の未定係数を決定すれば、切断して考えた 2 つの平板のおのおのに対し解が得られる。

11. 数値計算例

板厚が r 方向に $h=h_0 \rho$ のように変化し、中心角 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ で二直線辺が単純支持、他の二円弧辺が完全自由辺をもつ扇形平板を例にとる。 $\nu_r=0$ とし荷重は等分布満載荷重と梯形状分布荷重の2つを与えよう。また辺比、すなわち $\frac{\text{中央円弧長} : l}{\text{巾} : d}$ の値は1.0とする。つぎに板剛度比の影響をみるため $N_\theta/N_r=c^2=1.0$ の場合と $c=2$ すなわち $N_\theta/N_r=4.0$ の2つの場合について、たわみ w 、曲げモーメント M_r および M_θ を求めることにする。 w, M_r, M_θ はいずれも級数で与えられるが平板の曲げの特性を知るにはその第1項をとれば十分であるので、ここではいずれも第1項を考え第三項以下は無視した。

得られた w, M_θ, M_r を

$$w = \alpha \frac{q_0 l^4}{N_r r^3}, \quad M_\theta = \beta q_0 l^2, \\ M_r = \gamma q_0 l^2$$

とし、 $\theta = \alpha/2$ の断面を8等分した各点における扇形平板のそれらの値を図示すると図-2(a),(b)のようである。このうち(a)は梯形状分布荷重の場合、(b)は等分布荷重が作用する場合である。

12. あとがき

平板の形状はいろいろ考えることができるが、工学上必要なもので従来から研究されているものでは矩形板、平行四辺形板、円板などがその代表的なものといえよう。このうち前二者は相対する二辺の長さが等しいという形の上からの特長であるが、本論文で取り扱った扇形平板では一对の直線辺の長さは等しいが他の二円弧辺の長さは異なっており、この点がほかのものとの特性上、いちじるしく異なる点の一つと思われる。計算例と

図-2 (a) α_1, β_1 および γ_1 の値

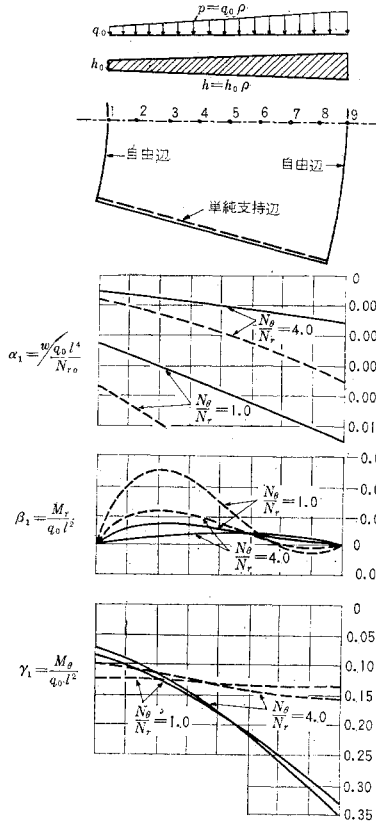
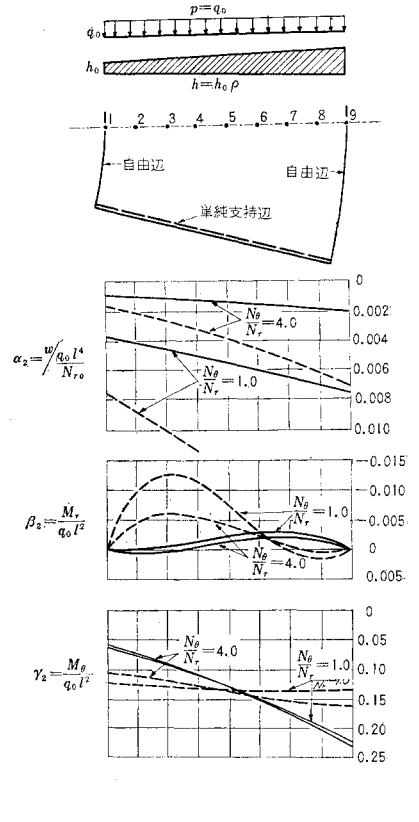


図-2 (b) α_2, β_2 および γ_2 の値



して二円弧辺が自由辺の場合を扱ったのは、一つはこの理由からである。

変厚板の基本式の表現からわかるように厚さ h が r の関数になり、したがって板剛度 N_r が r の関数として表わされることになり、本文で扱った基礎式は単に厚さが変化する平板に限らず板剛度そのものが r の関数で表わされるような平板構造に対しても当然拡張して適用することができる。

参考文献

- 1) Pichler, O: Die Biegung kreissymmetrischer Platten von veränderlicher Dicke. Verlag von Julius Springer.
- 2) 芳村 仁: 曲線直交異方性扇形平板の曲げについて, 土木学会論文集 第82号

(原稿受付: 1962.4.19)

THE BENDING OF CURVILINEAR ORTHOTROPIC CIRCULAR RING SECTOR PLATE WITH VARYING THICKNESS

By Jin Yoshimura, C.E. Member

The present paper deals with the bending of circular ring sector plate in which the thickness of the plate varies in the tangential direction r .

The studies were based on polar coordinates in which the elastic property differed in accordance with the radial direction (direction r) and the tangential direction (direction θ). First, the basic differential equation was derived.

This equation was applied to a circular ring sector plate which was affected by any load and the integral was obtained. As a numerical example, a case in which the thickness showed a linear variation was taken. In this the deflection and the bending moment were obtained under trapezoidally distributed load and full uniformly distributed load. This was compared with that of an constant thickness plate and the characteristics of varying thickness plate was elucidated.

In regards to the bending of the isotropic plate with varying thickness studies have been made on rectangular and circular plates. In isotropic varying thickness plates, Otto Pichler reported on an axial symmetry problem in polar

coordinates. However, since no work has been done on plates in which the nature of elasticity differed in accordance with the radial direction and the tangential direction, in other words, the curvilinear orthotropic plate when polar coordinates are considered and the thickness of the plate varies, in the present paper its basic differential equation was led forth and was applied to the bending of a circular ring sector plate in which two straight edges were simply supported and the integral was obtained. Circular ring sector plate with varying thickness in r direction may be divided into the following two cases by the mode of varying in thickness; namely

- (1) When the beginning point of variable thickness coincides with the origin of the coordinate.
- (2) When the beginning point of variable thickness does not coincide with the origin of the coordinate.

The present work mainly deals with an investigation of category (1). A fundamental differential equation is obtained as follows :

$$\begin{aligned}
 p = N_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \left[\frac{2 N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r}{r} + 2 \frac{dN_r}{dr} \right] \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \left[\frac{N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r}{r^2} + 2 \frac{C_2}{r^2} \right] \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} \\
 + \left[\frac{C_1 - 3 C_2 - 2 N_r \nu_\theta}{r^3} + \frac{2}{r^2} \left(\frac{dC_2}{dr} + \nu_\theta \frac{dN_r}{dr} \right) \right] \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \left[\frac{2 N_r \nu_\theta + 2 N_\theta + 3 C_2 - C_1}{r^4} \right. \\
 \left. + \frac{1}{r^3} \left(+ 2 \frac{dC_2}{dr} + 2 \nu_\theta \frac{dN_r}{dr} - \frac{dN_\theta}{dr} \right) + \frac{\nu_\theta}{r^2} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \left[\frac{N_\theta}{r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{dN_\theta}{dr} + \frac{\nu_\theta}{r} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \right] \frac{\partial w}{\partial r} \\
 + \left[- \frac{N_\theta}{r^2} + \frac{1}{r} \left(2(1 + \nu_\theta) \frac{dN_r}{dr} - \nu_r \frac{dN_\theta}{dr} \right) + \frac{d^2 N_r}{dr^2} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{N_\theta}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

Taking the finite sine transform with respect to θ , the differential equation (i) becomes :

$$\begin{aligned}
 N_r \frac{d^4 w_s}{dr^4} + \left[\frac{2 N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r}{r} + 2 \frac{dN_r}{dr} \right] \frac{d^3 w_s}{dr^3} + \left[\frac{-\beta^2 (N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2 C_2)}{r^2} - \frac{N_\theta}{r^2} \right. \\
 \left. + \frac{1}{r} \left\{ 2(1 + \nu_\theta) \frac{dN_r}{dr} - \nu_r \frac{dN_\theta}{dr} \right\} + \frac{d^2 N_r}{dr^2} \right] \frac{d^2 w_s}{dr^2} + \left[\frac{-\beta^2 (C_1 - 3 C_2 - 2 \nu_\theta N_r) + N_\theta}{r^3} \right. \\
 \left. - \frac{2 \beta^2}{r^2} \left\{ \frac{dC_2}{dr} + \nu_\theta \frac{dN_r}{dr} \right\} - \frac{1}{r^2} \frac{dN_\theta}{dr} + \frac{\nu_\theta}{r} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \right] \frac{dw_s}{dr} + \beta^2 \left[\frac{C_1 - 3 C_2 - 2 N_r \nu_\theta - 2 N_\theta}{r^4} \right. \\
 \left. + \frac{1}{r^3} \left\{ 2 \frac{dC_2}{dr} + 2 \nu_\theta \frac{dN_r}{dr} + \frac{dN_\theta}{dr} \right\} - \frac{\nu_\theta}{r^2} \frac{d^2 N_r}{dr^2} + \frac{\beta^2 N_\theta}{r^4} \right] w_s = S \{ p(r, \theta) \} \\
 + \frac{1}{r^2} \{ N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2 C_2 \} \cdot \beta [(-1)^n w''(r, \alpha) - w''(r, 0)] + \beta \left\{ \frac{1}{r^3} (C_1 - 3 C_2 - 2 N_r \nu_\theta) \right. \\
 \left. + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dC_2}{dr} + \nu_\theta \frac{dN_r}{dr} \right) \right\} \cdot [(-1)^n w'(r, \alpha) - w'(r, 0)] + \beta \left\{ \frac{1}{r^4} (2 N_r \nu_\theta + 2 N_\theta - C_1 + 3 C_2) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{r^2} \left(\frac{2 dC_2}{dr} + 2\nu_\theta \frac{dN_r}{dr} + \frac{dN_\theta}{dr} \right) + \frac{\nu_\theta}{r^2} \frac{d^2 N_r}{dr^2} \cdot [(-1)^n w(r, \alpha) - w(r, 0)] \\
 & + \frac{N_\theta}{r^2} \left\{ \beta \left[(-1)^n \left(\frac{\langle M_\theta \rangle_{\theta=\alpha}}{N_\theta} + \frac{1}{r} w'(r, \alpha) + \nu_r w''(r, \alpha) \right) - \left(\frac{\langle M_\theta \rangle_{\theta=0}}{N_\theta} + \frac{1}{r} w'(r, 0) + \nu_r w''(r, 0) \right) \right] \right. \\
 & \left. + \frac{\beta^3}{r^2} [(-1)^n w(r, \alpha) - w(r, 0)] \right\} \dots\dots\dots (2)
 \end{aligned}$$

In this expression, $\beta = \frac{n\pi}{\alpha}$ and α is the angle of sector. Now, let $\frac{N_\theta}{N_r} = c^2$ and we express the torsional moment as follows :

$$M_{r\theta} = -(1 - \sqrt{\nu_r \nu_\theta}) \sqrt{N_r N_\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \dots (3)$$

If edge conditions at $\theta=0$ and $\theta=\alpha$ are simply supported, Equ. (2) becomes :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^4 w_s}{dr^4} + \frac{8}{r} \frac{d^3 w_s}{dr^3} + \frac{(12 - 2c\beta^2 - c^2 + 3c^2\nu_r)}{r^2} \frac{d^2 w_s}{dr^2} \\
 & + \frac{1}{r^3} [-2(2c\beta^2 + c^2) + 6c^2\nu_r] \frac{dw_s}{dr} + \frac{\beta^2}{r^4} \\
 & \times [c^2 + 4c + c^2\beta^2 - 6c^2\nu_r] w_s = \frac{S\{p(r, \theta)\}}{N_r (h_0/r)^3} \dots (4)
 \end{aligned}$$

Solution of Equ. (4) is obtained as follows :

$$\begin{aligned}
 w(\rho, \theta) = & \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \\
 & \times \{ \rho^{A_1} [C_1 \cos(B_1 \ln \rho) + C_2 \sin(B_1 \ln \rho)] \\
 & + \rho^{A_2} [C_3 \cos(B_2 \ln \rho) + C_4 \sin(B_2 \ln \rho)] \\
 & + w_p \} \sin \beta \theta \dots\dots\dots (5)
 \end{aligned}$$

in which w_p = particular solution

A_1, B_1, A_2 and B_2 are real constants.

Fig. 1 shows the results in the case of a trapezoid distribution load, while Fig. 2 shows the case in which full uniform load acts on the plate.

Dotted lines show the result in the case of a constant thickness plate subjected to a uniform load.

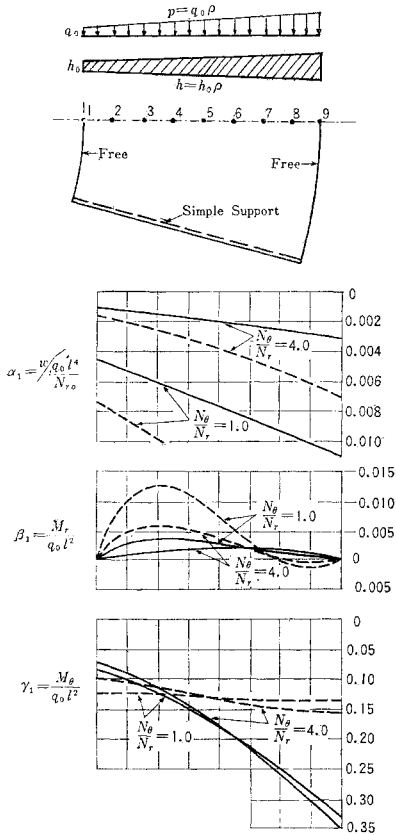


Fig. 1 Values of α_1, β_1 and γ_1

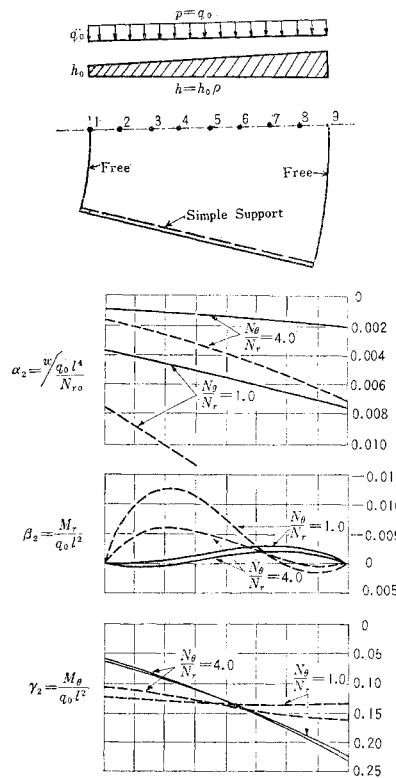


Fig. 2 Values of α_2, β_2 and γ_2

(Received by the Society April 19, 1962)