

連続吊橋についての研究

倉 西 茂*

要 旨 本論文は線型化されたたわみ度理論により連続吊橋、変断面連続吊橋および斜張ケーブルを持った連続吊橋の応力解析を行ない、それぞれについて比較検討したものである。

1. 連続吊橋について

(1) 連続吊橋の理論について

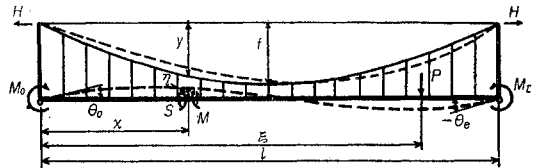
たわみ度理論による3径間連続吊橋の理論的解析はすでに D.B. Steinman によって各種載荷状態のものについて行なわれている。またケーブルの変形によって生じる復原力の項で、活荷重によるケーブル張力の変化を無視して、線型化されたたわみ度理論の基礎微分方程式は張力を受けているはりの方程式と同一であることより、D.J. Peery によって影響線による連続吊橋の解析が行なわれている。結局、線型化されたたわみ度理論による連続吊橋の解析はつぎの微分方程式を解くことによって

* 行なわれる。

$$EI \frac{d^4 \eta}{dx^4} - H_d \frac{d^2 \eta}{dx^2} - y'' H = p(x) \dots\dots\dots (1)$$

上式で EI は補剛桁の曲げ剛性、 η はたわみ、 H_d は死荷重によるケーブルの水平反力、 H は活荷重による水平反力、 y はケーブルの垂距である。 $p(x)$ が集中荷重であるときラプラス変換が便利に利用できるので、それによって上式の解を求めると、当然 Peery の解と一致し補剛桁のたわみ、端部のたわみ角、補剛桁に働く曲げモーメント、およびせん断力は次式で与えられる(図-1.1 参照)。

図-1.1



$$\eta = \left\{ \left(1 - \frac{x}{l}\right) - \frac{\sinh C \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\sinh C} \right\} M_0 + \left\{ \frac{x}{l} - \frac{\sinh C \frac{x}{l}}{\sinh C} \right\} M_1 + \frac{Pl}{H_d} \left\{ \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \frac{x}{l} - \frac{\sinh C \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)}{C \sinh C} \sinh C \frac{x}{l} \right. \\ \left. - \left[\left(\frac{x}{l} - \frac{\xi}{l}\right) - \frac{1}{C} \sinh C \left(\frac{x}{l} - \frac{\xi}{l}\right) \right]_{x=\xi} \right\} + \frac{y'' l^2}{H_d} H \left\{ \frac{\left(\frac{x}{l}\right) - \left(\frac{x}{l}\right)^2}{2} + \frac{\sinh C \frac{x}{l} + \sinh C \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{C^2 \sinh C} - 1 \right\} \dots\dots\dots (1.2)$$

$$\theta_0 = \left(\frac{C \cosh C}{\sinh C} - 1 \right) \frac{M_0}{l H_d} + \left(1 - \frac{C}{\sinh C} \right) \frac{M_1}{l H_d} - \frac{P}{H_d} \frac{\sinh C \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) - \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) \sinh C}{\sinh C} + \frac{H}{H_d} y'' l \cdot \frac{1 + \frac{C}{2} \frac{\sinh C - \cosh C}{C \sinh C}}{\dots\dots\dots (1.3)}$$

$$\theta_1 = - \left(\frac{C \cosh C}{\sinh C} - 1 \right) \frac{M_1}{l H_d} - \left(1 - \frac{C}{\sinh C} \right) \frac{M_0}{l H_d} + \frac{P}{H_d} \left\{ \frac{\sinh C \frac{\xi}{l}}{\sinh C} - \xi \right\} - \frac{H}{H_d} y'' l \cdot \frac{1 + \frac{C}{2} \frac{\sinh C - \cosh C}{C \sinh C}}{\dots\dots\dots (1.4)}$$

$$M = \frac{\sinh C \frac{x}{l}}{\sinh C} M_1 + \frac{\sinh C \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\sinh C} M_0 + P \frac{l}{C} \left\{ \frac{\sinh C \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)}{\sinh C} \sinh C \frac{x}{l} - \left[\sinh C \left(\frac{x}{l} - \frac{\xi}{l}\right) \right]_{x=\xi} \right\} \\ + H \cdot \frac{y'' l^2}{C^2} \left\{ 1 - \frac{\sinh C \frac{x}{l} + \sinh C \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\sinh C} \right\} \dots\dots\dots (1.5)$$

$$S = \frac{C \cosh C \frac{x}{l}}{l \sinh C} M_1 + \frac{C \cosh C \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{l \sinh C} M_0 + P \left\{ \frac{\sinh C \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)}{\sinh C} \cosh C \frac{x}{l} - \left[\cosh C \left(\frac{x}{l} - \frac{\xi}{l}\right) \right]_{x=\xi} \right\} \\ - H \frac{y'' l}{C} \left\{ \frac{\cosh C \frac{x}{l} - \cosh C \left(1 - \frac{x}{l}\right)}{\sinh C} \right\} \dots\dots\dots (1.6)$$

上式で $[\]_{x=\xi}$ は $x \leq \xi$ のとき $[\]$ 内は 0 とする。また、 $C = l \sqrt{H_d / EI}$ 、端部のたわみ角は時計まわりを正とし、曲げモーメントは補剛桁を下方にたわむものを正とする。ケーブルの形は放物線であると仮定する。上式より任意長さの荷重列に対する解がほしいときは、 $P = q \cdot dx$ とおき積分すればよい。活荷重によって生じるケ

ーブルの水平反力はやはり線型化されたケーブル方程式

$$\frac{L_E}{E_c A_c} H \pm \alpha l L_t + y'' \int_L \eta dx = 0 \dots\dots\dots (1.7)$$

より求めることができる。ここで E_c 、 A_c 、 L_E 、 L_t はそれぞれケーブルのヤング率、断面積応力を受けるケーブルの全長温度変化を受けるケーブルの全長である。最後の項は (1.2) 式より次式で与えられる。

* 正員 東大工博 東北大学助教授 工学部土木工学科

$$\int_0^l \eta dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{C \sinh C} \frac{\cosh C}{C \sinh C} \right) \frac{l(M_0 + M_l)}{H_d} + \frac{Pl}{H_d} \left\{ \frac{\left(\frac{\xi}{l}\right) - \left(\frac{\xi}{l}\right)^2}{2} + \frac{\sinh C \left(1 - \frac{\xi}{l}\right) + \sinh C \frac{\xi}{l}}{C^2 \sinh C} - \frac{1}{C^2} \right\} + \frac{H}{H_d} \cdot y'' \cdot \left\{ \frac{2(\cosh C - 1)}{C \sinh C} + \frac{1}{12} \frac{1}{C^2} \right\} \dots (1.8)$$

いま、図-1.2 に示したように3径間連続吊橋の各径間

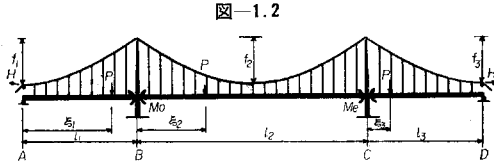


図-1.2

長を l_1, l_2, l_3 とし、それぞれの径間に関する諸量にはそれぞれ1,2,3を付す。各径間ともケーブルは放物線をなすものとすれば y'' は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \text{側径間で} \\ y_{1,s}'' &= -\frac{2}{\nu_{1,s}^2} \frac{f_{1,s}}{l_2} \frac{1}{l_2} \\ \text{中央径間で} \\ y_2'' &= -8 \frac{f_2}{l_2} \frac{1}{l_2} \quad \nu_1 = \frac{l_1}{l_2}, \quad \nu_3 = \frac{l_3}{l_2} \end{aligned} \right\} \dots (1.9)$$

支点 BC で補剛桁は連続ケーブルは塔頂で自由に左右に動けるものとすれば

$$\left. \begin{aligned} \theta_{11} = \theta_{02} \quad \theta_{12} = \theta_{03} \\ M_{11} = M_{02} = M_0, \quad M_{12} = M_{03} = M_l, \quad M_{01} = M_{13} = 0 \\ H_1 = H_2 = H_3 = H \end{aligned} \right\} \dots (1.10)$$

より次の連立方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 M_0 + B M_l = P l_2 \mathfrak{M}_0 + H l_2 \mathfrak{H}_1 \\ B M_0 + A_3 M_l = P l_2 \mathfrak{M}_0 + H l_2 \mathfrak{H}_3 \end{aligned} \right\} \dots (1.11)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{C_2 \cosh C_2}{\sinh C_2} + \frac{C_1 \cosh C_1}{\nu_1 \sinh C_1} - 1 - \frac{1}{\nu_1} \\ A_3 &= \frac{C_3 \cosh C_3}{\sinh C_3} + \frac{C_2 \cosh C_2}{\nu_3 \sinh C_2} - 1 - \frac{1}{\nu_3} \\ B &= \left(1 - \frac{C_2}{\sinh C_2} \right) \\ \mathfrak{M}_0 &= - \left\{ \frac{\xi_1}{l_1} - \frac{\sinh C_1 \frac{\xi_1}{l_1}}{\sinh C_1} \right\} - \left\{ \left(1 - \frac{\xi_2}{l_2} \right) - \frac{\sinh C_2 \left(1 - \frac{\xi_2}{l_2} \right)}{\sinh C_2} \right\} \\ \mathfrak{M}_l &= - \left\{ \frac{\xi_3}{l_3} - \frac{\sinh C_3 \frac{\xi_3}{l_3}}{\sinh C_3} \right\} - \left\{ \left(1 - \frac{\xi_3}{l_3} \right) - \frac{\sinh C_3 \left(1 - \frac{\xi_3}{l_3} \right)}{\sinh C_3} \right\} \\ -\mathfrak{H}_1 &= l_1 y_1'' \frac{1 + \frac{C_1}{2} \sinh C_1 - \cosh C_1}{C_1 \sinh C_1} \\ &\quad + l_2 y_2'' \frac{1 + \frac{C_2}{2} \sinh C_2 - \cosh C_2}{C_2 \sinh C_2} \\ -\mathfrak{H}_3 &= l_3 y_3'' \frac{1 + \frac{C_3}{2} \sinh C_3 - \cosh C_3}{C_3 \sinh C_3} \end{aligned} \right\} \dots (1.11.1 \sim 7)$$

よって、塔での支点モーメントは両側径間が等しい場合次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_0 &= \frac{A \mathfrak{M}_0 - B \mathfrak{M}_l}{A^2 - B^2} P l_2 + \frac{\mathfrak{H}}{A+B} H l_2 \\ M_l &= \frac{A \mathfrak{M}_l - B \mathfrak{M}_0}{A^2 - B^2} P l_2 + \frac{\mathfrak{H}}{A+B} H l_2 \end{aligned} \right\} \dots (1.12)$$

H の項は (1.8) 式より

$$dH = \frac{\alpha t L_l - \left(\sum_{i=1}^3 y_i'' d_{M \xi_i} + \sum_{i=1}^3 y_i'' d_{P \xi_i} \right) \cdot P l_2}{\frac{L_E H_d}{l_2 E_c A_c} + l_2 \sum_{i=1}^3 y_i'' d_{H \xi_i}} \dots (1.13)$$

で与えられる。ここで

$$\left. \begin{aligned} d_{M \xi_1} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh C_1}{C_1 \sinh C_1} \right) \nu_1 \mathfrak{M}_0 \\ d_{M \xi_3} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh C_3}{C_3 \sinh C_3} \right) \nu_3 \mathfrak{M}_l \\ d_{M \xi_2} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh C_2}{C_2 \sinh C_2} \right) (\mathfrak{M}_0 + \mathfrak{M}_l) \\ \mathfrak{M}_0 &= \frac{A \mathfrak{M}_0 - B \mathfrak{M}_l}{A^2 - B^2}, \quad \mathfrak{M}_l = \frac{B \mathfrak{M}_0 - A \mathfrak{M}_l}{A^2 - B^2} \\ d_{P \xi_i} &= \left\{ \frac{\xi_i - \left(\frac{\xi_i}{l_i}\right)^2}{2} + \frac{\sinh C_i \left(1 - \frac{\xi_i}{l_i}\right) + \sinh C_i \frac{\xi_i}{l_i}}{C_i^2 \sinh C_i} - \frac{1}{C_i^2} \right\} \nu_i^2 \\ d_{H \xi_{1,3}} &= l_{1,3} \nu_{1,3}'' \nu_{1,3}^2 \left\{ \frac{2(\cosh C_{1,3} - 1)}{C_{1,3}^2 \sinh C_{1,3}} + \frac{1}{12} - \frac{1}{C_{1,3}^2} \right\} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh C_{1,3}}{C_{1,3} \sinh C_{1,3}} \right) \frac{\nu_{1,3} \mathfrak{H}}{A+B} \\ d_{H \xi_2} &= l_2 \nu_2'' \left\{ \frac{2(\cosh C_2 - 1)}{C_2^2 \sinh C_2} + \frac{1}{12} - \frac{1}{C_2^2} \right\} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + \frac{1 - \cosh C_2}{C_2 \sinh C_2} \right) \frac{2 \mathfrak{H}}{A+B} \end{aligned} \right\} \dots (1.13.1 \sim 8)$$

(2) 連続吊橋の応力計算例

前節での定数 C は D.B. Steinman の補剛係数の逆数であり、式からもわかるように C が大きいということは死荷重による水平反力に比して補剛桁の曲げ剛性が小さいということである。普通長径間吊橋では C の値は 5~20 程度となるので C の値および各定数を次のようにとり、活荷重による水平反力、曲げモーメントなどを計算する。

$$\begin{aligned} C_2 &= 5, 10, 15, 20 \\ \nu_1 = \nu_3 &= 0.5, \quad C_1 = C_3 = 0.5 C_2, \quad f/l = 1/10 \\ L_E H/8 f E_c A_c &= 2 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

図-1.3 はケーブルの水平反力影響線縦距である。 C の値が大きくなると支点モーメントの影響はごく支点付近に限られるため3径間単純吊橋のそれと大きな差異はない。しかし、 C の値が小さくなると弾性理論による3径間連続吊橋のときのように支点モーメントがかなり影響し、側径間に載荷した場合ケーブルに圧縮力が働くようになる。

図-1.4 は支点モーメント影響線縦距である。 C の値

図-1.3 水平反力影響線

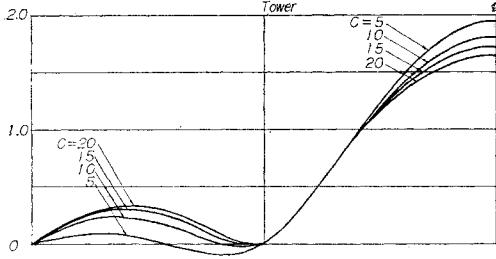


図-1.4 支点モーメント影響線

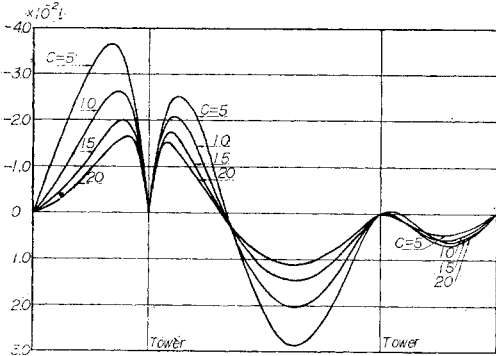


図-1.5 曲げモーメント影響線
(中央径間中央)

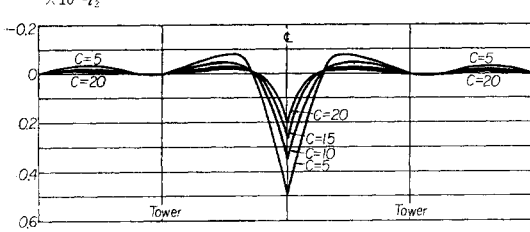
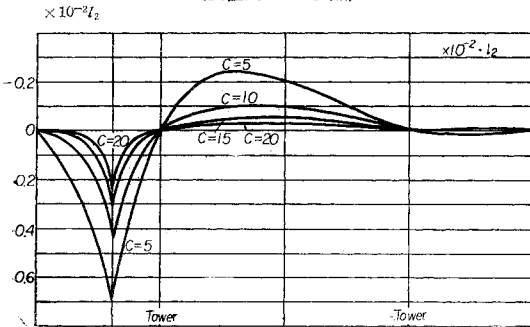


図-1.6 曲げモーメント影響線縦距
(側径間 0.6 l_1 点)



によってその形はあまり変化しないがその高さはCの値が小さくなるほど、すなわち曲げ剛性が大きくなるほど大きくなる。これは吊橋に働く曲げモーメント一般に通じることで支間死荷重による水平反力を一定にした場合、補剛桁の曲げ剛性を減少させると作用する曲げモーメントも減少する。従って、線型化されたたわみ度理論によって曲げモーメントを計算すれば一般に安全側にあることがうかがえる。図-1.5は中央径間中央、図-1.6

は側径間 0.6 l_1 点の曲げモーメント影響線縦距である。Cの値が大きくなるとその高さは減少するとともに集中荷重により直接影響を受ける範囲もせばまってくる。C=5の場合、側径間で曲げモーメントが比較的大きくなるのは側径間に荷重が載ったときケーブルに圧縮力が働くためである。

図-1.7は任意の長さの等分布荷重が載ったとき補剛桁に生じる最大曲げモーメント図である。この最大曲げモーメント図を見ると塔支点上でピーク状に曲げモーメントの値が大きくなっていることがわかる。Cが大

図-1.7 連続吊橋最大曲げモーメント図

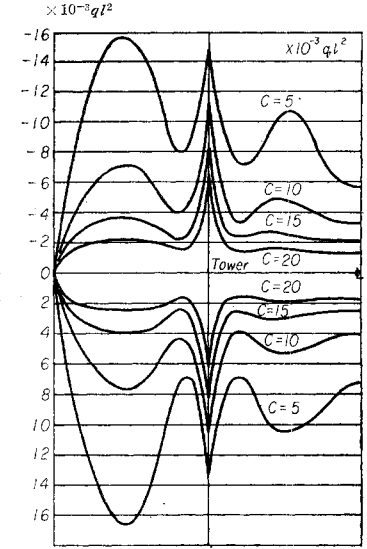
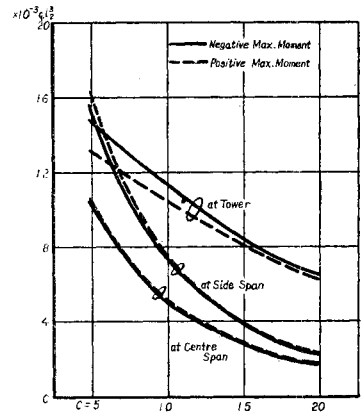


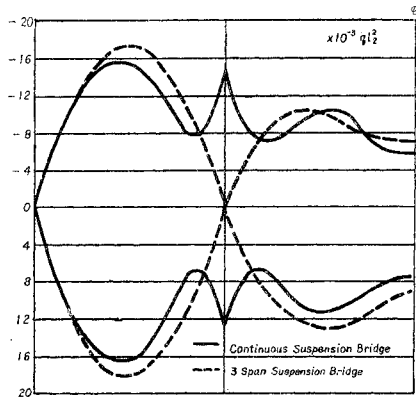
図-1.8



きいと径間での最大曲げモーメントと支点上の最大曲げモーメントの比は大きくなるが、Cが小さくなるとたとえばC=5の場合、側径間での最大曲げモーメントの方が大きくなる。側径間と中央径間と比較すると側径間の方が最大曲げモーメントは大きくなる。特にCが小さくなると側径間の最大曲げモーメントは大きくなる。今、側径間と中央径間の比は1/2に選んで計算したが、側径間の支間を短くしたり曲げ剛性を増加させても、それに従い作用する曲げモーメントの値も大きくなりその効果はあまり期待できないものと思われる。図-1.8は横軸にCの値をとり側径間、塔支点上中央径間での最大曲げモーメントを図示したものである。補剛桁が受ける正負の最大曲げモーメントの絶対値は大体において等しい。

3径間単純吊橋と比較すると、Cが大きい場合、支点モーメントの影響は前に述べたように支点付近しか受けないので、最大曲げモーメント図は支点付近を除いて3径間吊橋のそれと大きな差はない。Cが小さい場合、水平反力影響線の型は少し変わってくるが最大曲げモー

図-1.9 C=5の場合単純3径間吊橋と連続吊橋の最大曲げモーメントの比較



メント図はやはり大きな差はない。図-1.9はC=5の場合の連続吊橋と単純吊橋の最大曲げモーメントの比較したものである。図-1.7を見ると最大曲げモーメントの値は側径間、塔支点付近、中央径間でかなり異なるため設計が困難のようであるが、Cの値は断面を適当に選ぶことによりかなり自由に加減できるし補剛桁の受ける曲げモーメントとその応力度の関係も調整することができる。そこで最近の鋼材の進歩を考えると中央径間では安価な低張力鋼を使用し、側径間で中張力鋼を、塔付近だけ高張力鋼を使用することにより、この程度の作用モーメントの違いを十分カバーすることができるものと思われる。

2. 変断面連続吊橋の解析

1. 変断面吊橋の理論について

前章で述べたように一般に連続吊橋では塔付近の補剛桁に大きな曲げモーメントが働くので、特に付近の補剛桁の曲げ剛性を増加させたときの影響を調べてみることにする。

線型化されたたわみ度理論の基礎微分方程式(1.1)で

図-2.1

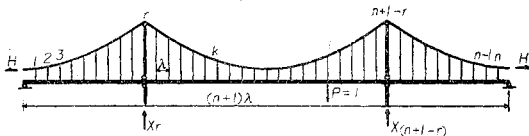
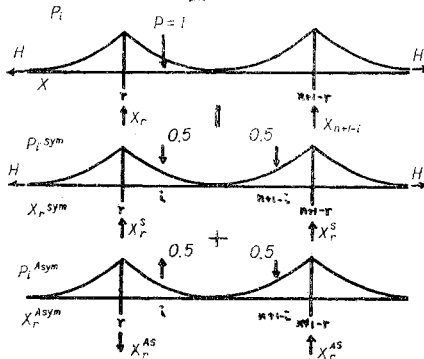


図-2.2



EIを任意に変化させるとその解はかなり面倒なものとなるので、このような場合には著者による「行列による吊橋の解析」が便利に利用できる。支点モーメントを不静定力に選んでもよいが、ここでは文献⁹⁾の式がそのまま使用できるように図-2.1に示したように塔に加わる反力を不静定力とする。計算の簡単化のため吊橋は対称とし、荷重および不静定力は図-2.2のように対称、逆対称のものにわけて考える。吊橋は全径間でn+1格間、塔は格点rおよびn+1-rのところにあるものとすれば格点モーメントと荷重、不静定力水平反力との間には次の関係がある。対称荷重に対しては

$$|M_{ki}|^{Sym} = \frac{\lambda_i G_i^{-1}}{H_d} (-|P_i|^{Sym} + |X_{ri}|^{Sym} + |S_k| |H_i|) \dots\dots\dots(2.1.1)$$

逆対称荷重に対しては

$$|M_{ki}|^{Asym} = \frac{\lambda_i G_i^{-1}}{H_d} (-|P_i|^{Asym} + |X_{ri}|^{Asym}) \dots\dots\dots(2.1.2)$$

ここで

$$|M_{ki}| = \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1n} \\ M_{21} & & & M_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ M_{k1} & & M_{ki} & M_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ M_{n1} & & & M_{nn} \end{vmatrix} \dots\dots\dots(2.2)$$

$$|S_k| = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_k \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{vmatrix} \dots\dots\dots(2.3)$$

$$S_k = \frac{-y_{k-1} + y_k - y_{k+1}}{\lambda} \dots\dots\dots(2.3.1)$$

|G|は補剛桁がプレート ガーダーの場合

$$|G| = \begin{vmatrix} -2(1+\mu_0 + \mu_1), & 1-\mu_1 & & & \\ 1-\mu_1, & -2(1+\mu_1 + \mu_2), & 1-\mu_2 & & 0 \\ & 1-\mu_2, & -2(1+\mu_2 + \mu_3), & 1-\mu_3 & \\ & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1-\mu_{n-1}, & -2(1+\mu_{n-1} + \mu_n) & \end{vmatrix} \dots\dots\dots(2.4)$$

ただし $\mu = \frac{H_d \lambda^2}{6 E J_k}$

で与えられる。荷重は単位荷重とすると対称荷重に対しては

$$|P_i|^{Sym} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1, 0, 0, \dots, 0, 0, 1 \\ 0, 1, 0, \dots, 0, 1, 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, 0, 1, \dots, 1, 0, 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & & & & & 1 \\ 1 & 0 & & & & 0 & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots(2.5.1)$$

逆対称荷重に対しては

$$|P_i|^{Asym} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1, 0, 0, \dots, 0, 0, -1 \\ 0, 1, 0, \dots, 0, -1, 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, 0, 1, \dots, -1, 0, 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & & & & 1 \\ -1 & 0 & & & & 0 & 1 \end{vmatrix} \dots\dots\dots(2.5.2)$$

$|X_{ri}|$ は対称荷重に対し

$$|X_{ri}|^{Sym} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{r1}^S & X_{r2}^S & \dots & X_{ri}^S & \dots & X_{rn}^S \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{r1}^S & X_{r2}^S & \dots & X_{ri}^S & \dots & X_{rn}^S \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots (2.6.1)$$

逆対称荷重に対しては

$$|X_{ri}|^{Asym} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{r1}^{AS} & X_{r2}^{AS} & \dots & X_{ri}^{AS} & \dots & X_{rn}^{AS} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -X_{r1}^{AS} & -X_{r2}^{AS} & \dots & -X_{ri}^{AS} & \dots & -X_{rn}^{AS} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \dots (2.6.2)$$

で与えられる。

各格点のたわみも同様に

$$|y_{ki}| = \lambda |K| \cdot \frac{G^{-1}}{H_d} (-|P_i| + |X_{ri}| + |S_k| |H_i|) \dots (2.7)$$

で与えられる。ここで K は補剛桁がプレート ガーダーの場合

$$K = \frac{1}{H_d} \begin{pmatrix} -2, & 1 \\ 1, & -2, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 \\ 1, & -2, & 1 \\ 1, & -2, & 1 \\ 0 & 1, & -2, & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2(\mu_0 + \mu_1), & \mu_1 \\ \mu_1, & 2(\mu_0 + \mu_2), & \mu_2 & 0 \\ \times & \mu_{k-1}, & 2(\mu_{k-1} + \mu_k), & \mu_k \\ 0 & \mu_{n-1}, & 2(\mu_{n-1} + \mu_n), & \mu_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n, & 2(\mu_n + \mu_{n+1}) \end{pmatrix} \dots (2.7.1)$$

で与えられる。水平反力 H は

$$|S_1, S_2 \dots S_{n-1}, S_n| |y_{ki}| = \frac{H_d}{E_c A_c \lambda} \sum_{k=1}^n l_k^3 \pm \alpha t \sum_{k=1}^n l_k^2 \dots (2.8)$$

より求めることができる。

いま,

$$|Y_{ki}| = |K| |G|^{-1} |C_k| = |S_1, S_2 \dots S_n| |Y_{ki}| \dots (2.9)$$

とすれば対称荷重の場合, 格点 (r) および ($n-r+1$) に塔がある場合その点でたわみが0であることより

$$k=r \text{ で } |y_{ki}| = |Y_{ki}| (-|P_i| + |X_{ri}| + |S_k| |H_i|) = 0 \dots (2.10)$$

すなわち

$$\eta_{ri}^{Sym} - \eta_{ri}^{Asym} X_{ri}^S - \frac{1}{\lambda} |\eta_{r1} \dots \eta_{r2} \dots \eta_{ri} \dots \eta_{rn}| |S_k| |H_i| = 0 \dots (2.10.1)$$

ただし

$$\eta_{ri}^{Sym} = |Y_{ki}| |P_i|^{Sym} \dots (2.10.2)$$

ケーブル方程式より

$$-|C_k| |P_i|^{Sym} + C_l X_{ri}^{Sym} - \frac{1}{\lambda} |C_k| \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_k \\ \dots \\ S_n \end{pmatrix} |H_i| = \frac{H_d}{E_c A_c \lambda} \sum_{k=1}^n l_k^2 = \alpha t \sum_{k=1}^n l_k^2 \dots (2.11)$$

が得られ, X_{ri}^S, H_i は求めることができる。逆対称荷重の場合は H は0となるので, より簡単に

$$\eta_{ri}^{Asym} - \eta_{ri}^{Asym} X_{ri}^{AS} = 0$$

より X_{ri}^{AS} を求めることができる。

(2) 計算例および等断面連続吊橋との比較

図-2.3 に示したように特に支点付近の補剛桁の曲げ剛性を4倍に増加させたものについて解析を行なう。支点付近以外は $C=20$ の等断面連続吊橋に相当する。格点の数は実際にはかなり多くなることが予想されるが, 文献⁴⁾でもわかるようにその数をそう多くとらなくても応力の傾向はわかるので, 計算費用も考え全径間を24格間にわけて計算を行なった。すなわち側径間6格間, 中央径間12格間である。そのほかの形状は前章で取り扱ったものと同一である。ただケーブルの伸びの項は省略した。

図-2.4 は水平反力影響線縦距である。支点付近で補剛桁を補強したため支点モーメントの影響は $C=20$ の場合より遠くまでおよんでいることがわかる。 図-2.5

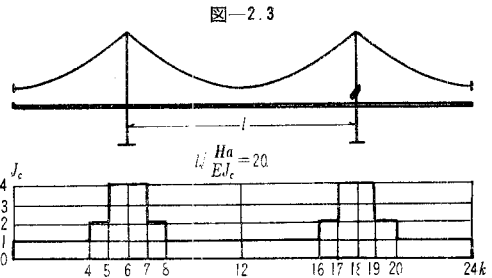


図-2.3

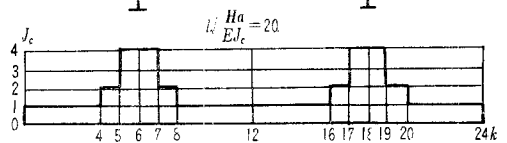


図-2.4

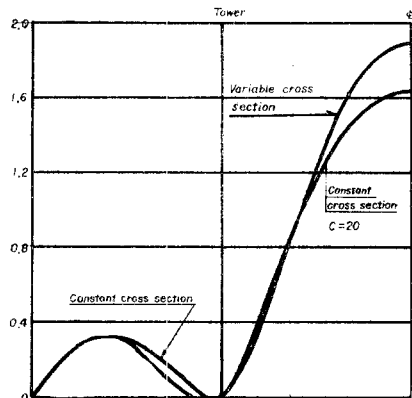


図-2.5 変断面吊橋支点モーメント影響線図

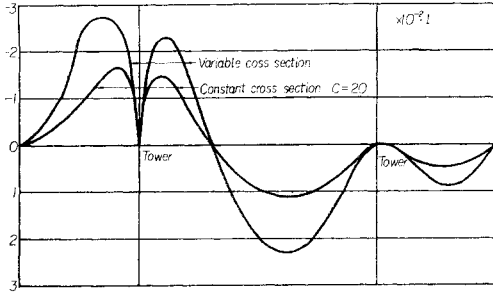
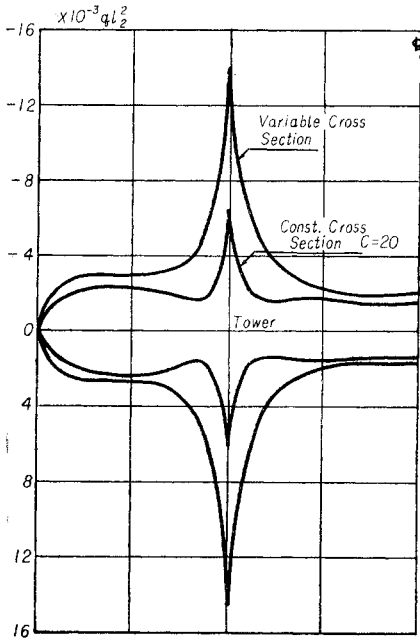


図-2.6



は支点モーメント影響線縦距である。支点付近の補剛桁の曲げ剛性が大きくなっているため支点モーメントの値も増加し、ちょうど支点での C の値 $C=10$ の等断面吊橋の支点モーメントの影響線の値に近くなっている。

図-2.6 は任意長さの等分布荷重が載ったときの最大曲げモーメント図である。支点付近の補剛桁を補強したところ以外は最大曲げモーメントの値は $C=20$ の場合とあまり変わらないが支点付近で曲げ剛性を4倍にしたため支点での平方根の約2倍に作用モーメントは増加している。このことから吊橋においては断面を大きくして曲げモーメントによる応力を軽減させるには思いきって断面の増強をはからなければならぬことがわかる。もちろん支点付近の断面を増加させることにより支点付近での補剛桁のたわみ曲線の急激な変化を緩和させることができる。

3. 斜張ケーブルを持った連続吊橋の解析

(1) 斜張ケーブルを持った連続吊橋の解析理論

図-3.1 に示したように塔を通して斜張ケーブルを設

図-3.1



図-3.2

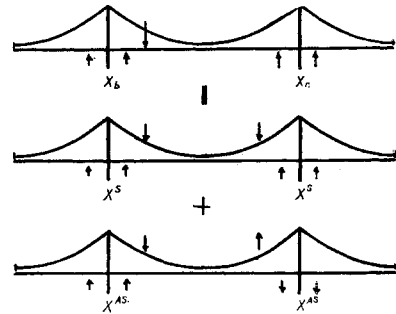
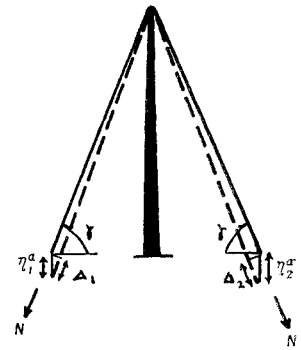


図-3.3



けた場合の影響を調べてみることにする。斜張ケーブルは塔より等距離の点で補剛桁に定着されているものとする。斜張ケーブルは塔上で自由に左右に移動できるものとする。ケーブルは一応引張力にも圧縮力にも抵抗できるものとする。ここでは簡単化のため各塔

に1本ずつの斜張ケーブルを持った連続吊橋を取り扱うがその性質は1本のもので予想できるものと思われる。図-3.2 に示したように吊橋は左右対称とし、荷重も対称荷重と逆対称荷重にわけて取り扱う。

塔は剛体としケーブルの定着部の水平変位を無視すれば 図-3.3 において

$$d_1 = r_1 \sin \gamma \quad d_2 = r_2 \sin \gamma \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

よってケーブルの伸びと補剛桁のたわみとの間には次の関係がある。

$$(r_1 + r_2) \sin \gamma = (d_1 + d_2) \quad \dots \dots \dots (3.2)$$

ケーブル張力を N としケーブルの全長を L_s 、断面積を A_s 、ヤング率を E_s とすればケーブルの伸びは

$$(d_1 + d_2) = \frac{L_s N}{A_s E_s} \quad \dots \dots \dots (3.3)$$

ケーブル張力と補剛桁に加わる垂直反力との間には

$$X = N \sin \gamma \quad \dots \dots \dots (3.4)$$

なる関係があるゆえ、結局、不静定力 X と補剛桁のたわみの間には次式が成立する。

$$r_1 + r_2 = \frac{L_s}{E_s A_s \sin^2 \gamma} X \quad \dots \dots \dots (3.5)$$

ここで r_1, r_2 は側径間および中央径間でのケーブル定着部補剛桁のたわみである。

荷重は対称荷重と逆対称荷重にわけて考え、それぞれのたわみには肩に Sym, Asym をつけて表わす。

対称荷重の場合ケーブルの定着部のたわみは側径間で

$$\eta_{1i}^a = -(\eta_{11}^a \text{Sym} + \eta_{12}^a \text{Sym}) X_i \text{Sym} + \eta_{1i}^a \text{Sym} \dots (3.6.1)$$

中央径間で

$$\eta_{2i}^a = -(\eta_{22}^a \text{Sym} + \eta_{21}^a \text{Sym}) X_i \text{Sym} + \eta_{2i}^a \text{Sym} \dots (3.6.2)$$

よって

$$\begin{aligned} \eta_{1i}^a + \eta_{2i}^a &= \eta_{1i}^a \text{Sym} + \eta_{2i}^a \text{Sym} \\ &\quad - (\eta_{11}^a \text{Sym} + \eta_{22}^a \text{Sym} + 2\eta_{12}^a \text{Sym}) X_i \text{Sym} \\ &= \frac{L_s}{E_s A_s \sin^2 \bar{r}} X_i \text{Sym} \dots (3.7) \end{aligned}$$

よってケーブル反力は次式で与えられる。

$$X_i \text{Sym} = \frac{\eta_{1i}^a \text{Sym} + \eta_{2i}^a \text{Sym}}{\eta_{11}^a \text{Sym} + \eta_{22}^a \text{Sym} + 2\eta_{12}^a \text{Sym} + \frac{L_s}{A_s E_s \sin^2 \bar{r}}} \dots (3.7.1)$$

逆対称の場合も同様に

$$X_i \text{Asym} = \frac{\eta_{1i}^a \text{Asym} + \eta_{2i}^a \text{Asym}}{\eta_{11}^a \text{Asym} + \eta_{22}^a \text{Asym} + \eta_{12}^a \text{Asym} + \frac{L_s}{E_s A_s \sin^2 \bar{r}}} \dots (3.7.2)$$

補剛桁に働くケーブル反力は各点に単位荷重が載ったとき

$$X_{bi} = X_i \text{Sym} + X_i \text{Asym}, \quad X_{ci} = X_i \text{Sym} - X_i \text{Asym} \dots (3.8)$$

で与えられる。ここで η_{11}^a, η_{22}^a は側径間および中央径間の斜張ケーブル定着部に単位荷重が作用したときのそれぞれの点のたわみであり、 η_{21}^a は側径間の定着部に単位荷重が載ったときの中央径間での定着部のたわみを表わす。

(2) 計算例

基本となる連続吊橋は第1章で取り扱った $C=5, 10, 15, 20$ のものである。斜張ケーブルは塔より中央径間長の $1/10$ の距離に定着されているものとする。いま、ケーブルの伸び縮みの項を無視して斜張ケーブル反力 X_b を求めると図-3.4 が得られる。 C の値が大きくなると

図-3.4 ケーブルは圧縮力に耐えられないとしたときのケーブル反力

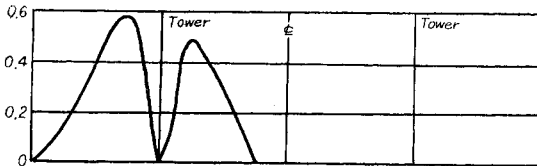
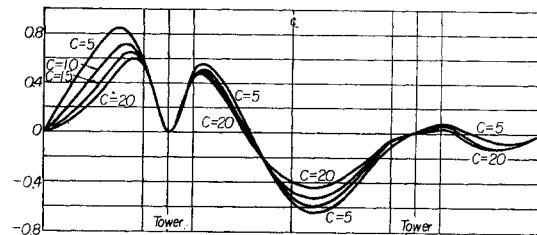


図-3.5 ケーブル反力影響線縦距



ケーブル反力は減少するが、その変化はあまり大きくない。いま、ケーブルは剛体として計算しているのだから期待できる最も大きな値である。ケーブルの伸びと補剛桁のたわみとの関係によってケーブル反力の値は減少するが、その形はあまり変わらない。図-3.4を見ると斜張ケーブルにはかなり大きな圧縮力が働くことが予想される。もし斜張ケーブルは圧縮力に耐えられないものとすればその反力は $C=20$ の場合図-3.5 のようになる。

図-3.6 は最大曲げモーメント図である。連続吊橋のとき塔支点上で生じていた最大曲げモーメントのピークは斜張ケーブルの定着部に移った形となっているが、その最大値はかなり減少している。この計算はケーブルの伸びを考慮していないので適当な伸びを有するケーブルを用いれば定着部のピークはさらに減少するとともに支点モーメントの大きさは増大してくるものと思われる。また斜張ケーブルの数を増加させると、このピークは台地状に広く分布されることも考えられ応力の均一化には大変有効と思われる。しかし斜張ケーブルは圧縮力を受けられないものとすれば図-3.7に示したように塔支点付近の最大曲げモーメントは、負側は斜張ケーブルによる曲げモーメントの減少が見られるが正側はかえって大きな値となっている。このような点を見ると斜張ケーブルはケーブルを使用するより圧縮力に耐える部材で構成させ、かなり支点に近い点で補剛桁に定着させるのがよいように思われる。また斜張ケーブルの塔上の支点にダンパーを入れ防振に役だたせることも考えられる。

図-3.6 斜張ケーブルを有する連続吊橋の最大曲げモーメント図

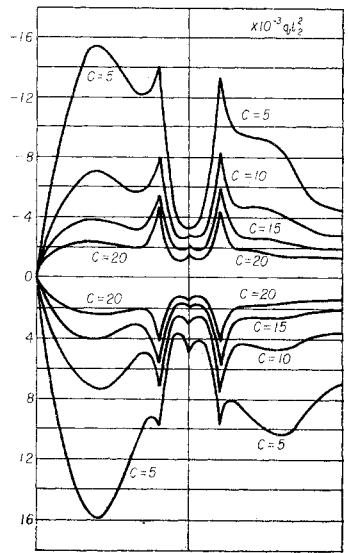
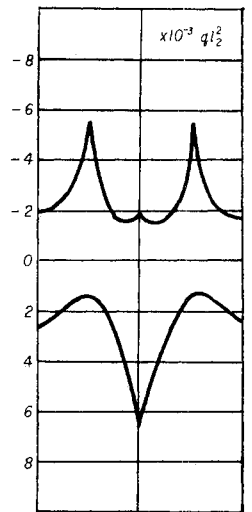


図-3.7



4. むすび

以上、静的問題、特に補剛桁に作用する曲げモーメントより見て連続吊橋の性質を論じてきた。ここで連続吊橋を取り上げて考えたのは橋架のたわみ曲線に不連続点を作らなければどうなるかということより出発したわけであるが、さらに静的問題のみならず連続にすることにより吊橋の振動にどのような影響を与えるかということも合わせて研究する必要があるものと思われる。

応力的に見て連続吊橋は決して実現不可能ではなく、さらに研究を進めいろいろの工夫をこらすことにより多くの長所を持ったものになる可能性も考えられる。ここでは温度応力および温度変化による変形のことには考えなかったが、少なくとも温度変化による補剛桁の伸び縮みに対応させるため橋軸方向には移動できるが、曲げモーメントに抵抗する模型的に書くと 図-4.1 のような装置を必要とすることも考えられる。また補剛桁の左右への移動を減少させるとともに温度変化にも対応する 図-4.2 のような二重ケーブルの連続吊橋といったものも考えられる。

本研究の一部は昭和 37 年度文部省科学研究費によって行なわれた。また各種の計算に東北大学工学部土木工学科学生 上田幸雄、小島 旭、樋渡 滋の諸君の世話になった。変断面吊橋の計算は伊藤忠電子計算サービスKKの世話になった。ここに感謝の意を表したい。

図-4.1

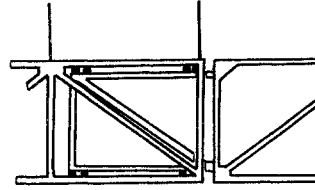


図-4.2



参考文献

- 1) Steinman, D.B. : "Deflection Theory for Suspension Bridges, I.A.B.S.E. Vol. 2, 1933~1934, p. 400
- 2) Peery, D.J. : "An Influence Line Analysis for Suspension Bridges" Proc. A.S.C.E. 1954, No. 558
- 3) 平井 敦 : "鋼橋 III" 1956, 技報堂
- 4) 倉西 茂 : "行列による吊橋の解析", 1962, 土木学会論文集 No. 80
- 5) Department of Commerce Bureau Public Roads : "The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges" 1950, U.S. Government Printing Office, Washington.
- 6) Frauland, F.H. : "Suspension Bridges of Short Span" 1934

(原稿受付: 1962. 3. 7)

A STUDY ON CONTINUOUS SUSPENSION BRIDGE

By Dr. Eng., Shigeru Kuranishi, C.E. Member

In this paper, the author treats statical problems of three-span continuous suspension bridge.

The basic differential equations of "linearized deflection theory," as well known, are given by

$$EI \frac{d^4 \eta}{dx^4} - H_d \frac{d^2 \eta}{dx^2} - y'' H = p(x) \dots \dots \dots (1.1)$$

for deflection of stiffening girder and

$$L_E / E_c A_c H \pm \alpha t L_t + y'' \int_L \eta dx = 0 \dots \dots \dots (1.7)$$

for deflection of cable. Now let us solve equations (1.1) and (1.7) with regard to the given boundary conditions, placing $p(x)$ to be an unit concentrated load and taking bending moments on the support at the tower (hereafter called tower support) as statically indeterminate forces. Then we have the deflection of stiffening girder and the bending moment and shearing force acting on the stiffening girder as expressed in equations (1.2) to (1.6) inclusive. From those equations we can analyze the three-span continuous suspension bridge with constant cross section. For example, the analysis of continuous suspension bridge is carried out for the value of the coefficient $c=5, 10, 15$ and 20 , and for span ratio $\nu_{1,3}=0.5$ and for sag span ratio $f/l_2=1/10$.

Figs. 1.5 and 1.6 show the influence lines of bending moment at the center of centre span and at the $0.6 l_1$ of the side span. The max. bending moment diagram due to uniformly distributed load over arbitrary length is shown in Fig. 1.7.

Generally speaking, when coefficient c becomes small, i.e. the bending rigidity of stiffening girder becomes large with regard to H_d and l , the bending moment acting at the tower support increases in a shape of peak. As compared the bending moments at the side span and at the centre span, the max. value of the max. bending moment of the side span shows larger value than that of the centre span. Fig. 1.8 shows the max. values of the max. bending moment at the side span, at the tower support

and at the centre span for various values of the coefficient c .

The difference of the max. bending moment diagram of the continuous suspension bridge and ordinary three-span suspension bridge is shown in Fig. 1.9 for $c=5$. The difference is fairly small excluding the neighbourhood of the tower and it becomes more insignificant, when coefficient c becomes larger.

In Chapter II, effects of reinforcement of stiffening girder in the neighbourhood of tower are discussed. The analysis of suspension bridge with variable cross section of stiffening girder, is carried out by the author using "analysis of suspension bridge by matrix operation," as expressed by equations (2.1) to (2.13) inclusive. By the reinforcement of stiffening girder, the bending moment acting on the stiffening girder also increases, at the reinforced section. The max. bending moment diagram of the three-span continuous suspension bridge with variable cross section is shown in Fig. 2.6. The section of stiffening girder, excluding the neighbourhood of the tower support, is equal to that of $c=20$. The bending rigidity of the stiffening girder is four times as large at the tower support as the nonreinforced parts of stiffening girder. The curve of the cross section variation is shown in Fig. 2.3.

The max. bending moment acting on the reinforced part of stiffening girder increases according to the reinforcement twice as much as that of the continuous suspension bridge with constant cross section of $c=20$ and the value approaches to that of $c=10$. The influence line of the bending moment at the tower support is drawn in Fig. 2.5 and the influence line of horizontal thrust of cable in Fig. 2.4.

In Chapter III, analysis of continuous suspension bridge equipped with tower stays is performed using the results of Chapter I. In the calculation, it is assumed that the tower stays are flexible but rigid for elongation and shrinkage

and they can travel freely on the tower. The max. bending moment diagram is shown in Fig. 3.6. The speak of the max. bending moment at the tower support of the continuous suspension bridge seems to be removed to the anchor pts. of the tower stays, but the height of the peak is reduced fairly. However, the tower stays may be subjected to an amount of compression force. Therefore if the tower stays cannot resist to compression forces, the max. bending moment at the neighbourhood of tower turns into as shown Fig. 3.7.

Notations

EI : Bending rigidity of stiffening girder.
 H_d : Horizontal thrust of cable due to dead load.
 H : Horizontal thrust of cable due to live

load.
 M_0, M_t : Tower Support moment.
 $p(x)$: Live load.
 P : Concentrated live load.
 l_1, l_3 : Length of side span.
 l_2 : Length of centre span.
 ν_1, ν_3 : l_1/l_2 and l_3/l_2
 c : $l\sqrt{H_d/EI}$
 η : Deflection of stiffening girder.
 ξ : Distance of live load from support.
 G : Matrix concern to the constants of suspension bridge.
 γ : Angle of tower stay to horizontal line.
 X : Reaction at the tower support in Chapter II and reaction due to tower stay in Chapter III.

The other notations are shown in figures.