

弾性質量基礎にある橋脚の振動解析とその模型実験的考察<sup>1)</sup>

後 藤 尚 男\*  
西 頭 常 彦\*\*

**要 旨** 著者の1人は先に土の振動質量を考慮に入れた場合の構造物の振動解析を行なったが、本文はその理論的な取り扱いを橋脚の場合に適用するとともに、その妥当性を模型実験的に確かめようとしたものである。すなわち橋脚の底面下部あるいは側面側部に等価的な土の柱状体を仮想して、橋脚の1自由度振動と連成振動とを解き、実橋脚について若干の数値計算を行なった。一方模型実験を実施することによって、かかる土の柱状体を仮想することが、工学上おおむね是認されてもよからうということを実証した。

1. 緒 言

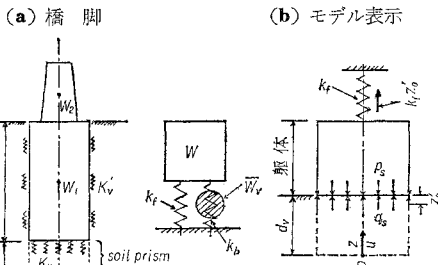
著者の1人が先に発表した論文<sup>2)</sup>においては、構造物の基礎に表面沈下量が等価である土の柱状体、いわゆる В.П. Викче 氏の考えにもとづく soil prism を仮想したのち、構造物を載荷したこの soil prism の系の振動を解くことによって、土の振動質量を計算式に取り入れることが主眼であった。本文ではこれを橋脚の場合に適用して、その1自由度振動と連成振動の理論解析を進める一方、模型実験を行なうことによって、かかる soil prism の工学的な意義の妥当性を実証的に究明しようとするものである。

2. 橋脚の1自由度振動の計算式

(1) 上下振動

図-1(a)の橋脚においてその根入部底面の下に前論文<sup>\*\*\*</sup>の考えにもとづく未定深さ  $d_v$  の soil prism を仮想する。 $a_0, L, d$  を順次橋脚根入部の底面積、側面の水平周辺長さおよび根入長、また  $K_v, K_v'$  を底面と側面における上下方向の地盤係数として、微小振動の範囲を

図-1 橋脚の上下振動



\* 正員 工博 京都大学教授, 工学部土木工学教室  
\*\* 正員 工修 国鉄大阪教習所講師  
\*\*\* 以後簡単のため、文献欄 2) を単に前論文と記す

対象とする。しからば 図-1(a) の橋脚は 図-1(b)のごとくモデル表示できる。ここに、

$$k_f = K_v' L d, k_b = K_v a_0, \bar{W}_v : \text{土の振動重量} \dots (1)$$

つぎに同図において等分布荷重  $p_s$  によって soil prism の表面が  $z_0'$  だけ沈下したとすると、

$$p_s a_0 = q_s a_0 + k_f z_0' = K_v a_0 z_0' + K_v' L d z_0'$$

しかるに  $z_0'$  は未定深さ  $d_v$  なる soil prism の  $q_s$  による圧縮量  $\Delta d_v$  に等しかるべきことから、 $E$  を土のヤング率とすると、

$$\frac{q_s}{K_v} = z_0' = \Delta d_v = \frac{q_s}{E} d_v \quad \therefore d_v = \frac{E}{K_v} \dots (2)$$

上式は前論文の式 (1.1) と同じで、いわゆる soil prism の等価深さを与える。かくして  $d_v$  が決定されたので 図-1(b) の右側下半のように座標軸  $0-z$  を選び、

$$z=0 : u=0, z=d_v : \frac{W}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -E a_0 \frac{\partial u}{\partial z} - k_f u \quad (3)$$

なる境界条件を用いて前論文と同様の計算を進めると、結局振動数方程式として次式が得られる ( $w$ : 単位体積当りの土の重量)。

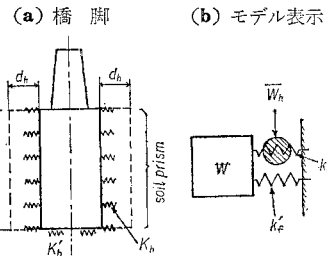
$$n_v^2(m) = \frac{g}{W} \frac{a_0 n_v(m) \sqrt{\frac{E w}{g}}}{\tan \left\{ \frac{n_v(m)}{K_v} \sqrt{\frac{E w}{g}} \right\}} + \frac{g}{W} k_f \dots (4)$$

この式で  $k_f=0$  のときは当然前論文の式 (1.4) に一致する。すなわち 図-1(b) からわかるように、 $k_f$  は計算上単なる並列バネとして  $k_b$  に付加されるにすぎない。これより式 (4) からくり返し試算法によって  $n_v(m)$  を算定できる。

(2) 水平並進振動

橋脚が回転運動をとまなうことなく、単に水平方向に並進的に振動する場合は、図-2のごとく図示できる(簡単のため前論文 2.(2)における底面深さ方向の  $d_h$  を無視)。ここに水平方向の soil prism のバネは引張りに

図-2 橋脚の水平並進振動



作用せず圧縮のみに作用するので、実質上は片側だけに圧縮・引張り両用のバネがあるのと同様である。従って図-1における添字  $v$  の代りに添字  $h$  を付し、 $k_b, k_f$  の代りに  $k_b', k_f'$  と書けば、図-2(b) は振動的に図-1(b) と等価となる。ただし

$$k_f' = K_h' a_0, k_b' = K_h b d, b: \text{橋脚根入部の奥行} \dots (5)$$

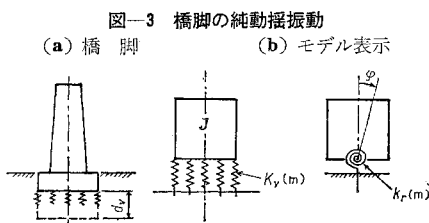
従ってこの場合の振動数方程式は式(4)と同じく次式で与えられる。

$$n_h^2(m) = \frac{g}{W} \frac{bdn_h(m) \sqrt{\frac{Ew}{g}}}{\tan \left\{ \frac{n_h(m)}{K_h} \sqrt{\frac{Ew}{g}} \right\}} + \frac{g}{W} k_f' \dots (6)$$

なお振動方向に平行な橋脚根入部側面のバネをも考えるときは、両側の面積  $2cd$  ( $c$ : 橋脚根入部の巾) を考慮して式(5)の  $k_f'$  の代りに  $k_f' = K_h'(a_0 + 2cd)$  と書けばよい。

(3) 純動揺振動

図-3 に見るごときフーティング基礎を有する橋脚の純動揺を考えると前論文の 2.(3) の結果をそのまま適用できる。すなわち動揺中心軸を便宜上橋脚底面の中心線と仮定することによって、図-3(a) を図-3(b) のごとくに表示できる。ただしこれらの図において  $K_v(m)$  は土の振動質量を考慮したときの上下方向地盤係数、 $k_r(m)$  は同じく回転全バネ係数、 $J$  は橋脚の慣性モーメントである。かくして前論文の式(1.21), (1.24) より結局振動数方程式として、



$$n_r^2(m) = \frac{k_r(m)}{J} = \frac{I_0}{J} K_v(m) = \frac{I_0}{J} \frac{n_r(m) \sqrt{\frac{Ew}{g}}}{\tan \left\{ \frac{n_r(m)}{K_v} \sqrt{\frac{Ew}{g}} \right\}} \dots (7)$$

を書くことができる。ここに  $I_0$  は橋脚底面の断面二次モーメントで、これまでと同様に試算法によって式(7)から  $n_r(m)$  を算定すればよい。

なお式(4), (6), (7) で  $w \rightarrow 0$  とすれば、当然土の振動質量を無視した通常に慣用される次式となる。

$$\left. \begin{aligned} n_v^2(m) \rightarrow n_v^2(o) &= \frac{g}{W} (a_0 K_v + k_f) = \{k_v(o) + k_f\} / M \\ n_h^2(m) \rightarrow n_h^2(o) &= \frac{g}{W} (bdK_h + k_f') = \{k_h(o) + k_f'\} / M \\ n_r^2(m) \rightarrow n_r^2(o) &= I_0 k_v / J = k_r(o) / J \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

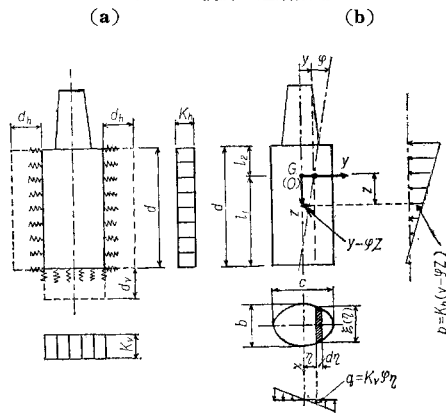
3. 橋脚の水平方向連成振動の解析

論旨を進める便宜上、まず土の振動質量を考慮しない場合を述べ、しかるのちこれを考慮した場合に論及する。

(1) 土の振動質量を考慮しない場合

土の振動質量を考慮しない場合の橋脚の動揺に関する連成振動については、すでに井上六郎氏が取り扱っている<sup>3)</sup>。図-1, 図-2 で  $K_v'$  と  $K_h'$  を省略して  $K_v$  と  $K_h$  を同時に考えるが、この場合井上氏の例を見るまでもなく  $K_h$  の分布は根入方向に一次的に増大する形などを採るべきである。しかし、かかる  $K_h$  分布に対して本文 2. で述べた土の振動質量を考慮した理論を適用することは困難であるので、ここでは図-4(a) のごとく一様分布とみなした  $K_h$  を仮定することにする。かくして図-4(b) のごとく橋脚全体の重心点  $G$  に座標原点を選べば、この橋脚の運動エネルギー  $T$  は次式で表わしうる。

図-4 橋脚の連成振動



$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \frac{W}{g} (y^2 + z^2) + \frac{1}{2} J_G \phi^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{W}{g} (y^2 + z^2 + r^2 \phi^2) \dots (9) \end{aligned}$$

ここに  $W$ : 橋脚全体の重量、 $J_G = Wr^2/g$ : 重心  $G$  のまわりの慣性モーメント、 $r$ : 回転半径。

つぎに位置のエネルギー  $V$  も水平・動揺・上下の3運動によるエネルギー  $V_h, V_r, V_v$  3者の和として与えられる。すなわち

$$V = V_h + V_r + V_v \dots (10)$$

ここで図-4(b) を参照して各エネルギーを算出すると

$$\begin{aligned} V_h &= \frac{b}{2} \int_{-l_2}^{l_1} p(y - \phi z) dz = \frac{bK_h}{2} \int_{-l_2}^{l_1} (y - \phi z)^2 dz \\ &= \frac{bK_h d}{2} \left\{ y^2 - (l_1 - l_2) y \phi + \frac{1}{3} (d^2 - 3l_1 l_2) \phi^2 \right\} \dots (10)_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_r &= \frac{1}{2} \int_{-c/2}^{c/2} q \phi r \xi(\eta) d\eta = \frac{K_v}{2} \phi^2 \int_{-c/2}^{c/2} \eta^2 \xi(\eta) d\eta \\ &= \frac{1}{2} K_v I_0 \phi^2 \dots (10)_2 \end{aligned}$$

$$V_v = \frac{1}{2} \int_A q x dA = \frac{K_v}{2} z^2 \int_A dA = \frac{1}{2} K_v a_0 z^2 \dots (10)_3$$

式(10)<sub>1</sub>, (10)<sub>2</sub>, (10)<sub>3</sub> を式(10)に入れたのち、式

(9) と式 (10) に周知の Lagrange の運動方程式を適用すると、つぎの連立方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{g} \ddot{y} + \frac{bK_h d}{2} \{2y - (l_1 - l_2)\varphi\} &= 0 \\ \frac{W}{g} r^2 \ddot{\varphi} + \frac{bK_h d}{3} \{d^2 - 3l_1 l_2\} \varphi - \frac{bK_h d}{2} (l_1 - l_2)y + K_v I_0 \varphi &= 0 \\ \frac{W}{g} \ddot{z} + a_0 K_v z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

式 (11) の第3式には  $y$  と  $\varphi$  がふくまれていないから、 $z$  成分すなわち上下振動のみは独立に起こり、第1式と第2式すなわち水平振動  $y$  と動揺振動  $\varphi$  とが連成することがわかる。従って次式を  $y$  と  $\varphi$  について常用手段によって解けばよいことになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{g} \ddot{y} + bK_h d y - \frac{bK_h d}{2} (l_1 - l_2)\varphi &= 0 \\ \frac{W}{g} r^2 \ddot{\varphi} + \left\{ \frac{bK_h d}{3} (d^2 - 3l_1 l_2) + K_v I_0 \right\} \varphi - \frac{bK_h d}{2} (l_1 - l_2)y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

(2) 土の振動質量を考慮する場合

本節では 図-1 と 図-2 における  $K_v'$  と  $K_h'$  とを無視しているので、式 (4)、式 (6) の右辺の第2項はいずれも 0 である。しかして土の振動質量を考慮した場合の固有振動数、全バネ係数および地盤係数をそれぞれ  $n(m)$ ,  $k(m)$  および  $K(m)$  とすれば、次式が書けるはずである。

$$n^2(m) = k(m)/M = aK(m)g/W \dots\dots\dots(13)$$

ただし  $M = W/g$  は橋脚の全質量、 $a$  は  $K(m)$  の作用面積である。しかして式 (4) では  $a_0 = a$ ,  $k_f = 0$ , 式 (6) では  $bd = a$ ,  $k_f' = 0$  であり、しかもかかる式 (4)、式 (6) が式 (13) と同等であるべきとの条件から、結局

$$K_v(m) = n_v(m) \sqrt{\frac{Ew}{g}} \cot \left\{ \frac{n_v(m)}{K_v} \sqrt{\frac{Ew}{g}} \right\} \dots\dots(14)$$

$$K_h(m) = n_h(m) \sqrt{\frac{Ew}{g}} \cot \left\{ \frac{n_h(m)}{K_h} \sqrt{\frac{Ew}{g}} \right\} \dots\dots(15)$$

であることがわかる。すなわちすでに著者が前論文で強調したように土の振動質量を考慮するときは、これを考慮しないときの  $K_v, K_h$  の代りに上記の  $K_v(m)$  と  $K_h(m)$  とを用い、それ以後は形式上通常の  $K_v, K_h$  を取り扱うと全く同様に解析を進めて行けばよいわけである。事実式(14)、式(15)で土の振動質量を無視して  $w/g \rightarrow 0$  と置けば、 $K_v(m) \rightarrow K_v, K_h(m) \rightarrow K_h$  となる。かくして式 (12) に相当してただちに次式を書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{g} \ddot{y} + bK_h(m)d y - \frac{bK_h(m)d}{2} (l_1 - l_2)\varphi &= 0 \\ \frac{W}{g} r^2 \ddot{\varphi} + \left\{ \frac{bK_h(m)d}{3} (d^2 - 3l_1 l_2) + K_v(m)I_0 \right\} \varphi - \frac{bK_h(m)d}{2} (l_1 - l_2)y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(16)$$

この式 (16) に

$$y = y_0 \cos n(m)t, \varphi = \phi \cos n(m)t \dots\dots\dots(17)$$

を代入して計算を進めると、

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{W}{g} n^2(m) - bK_h(m)d \right\} y_0 + \frac{bK_h(m)d}{2} (l_1 - l_2)\phi &= 0 \\ \frac{bK_h(m)d}{2} (l_1 - l_2)y_0 + \left\{ \frac{W}{g} r^2 n^2(m) - k(m) \right\} \phi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

ただしここに、

$$k(m) = \frac{bK_h(m)d}{3} (d^2 - 3l_1 l_2) + K_v(m)I_0 \dots\dots\dots(18)_1$$

これより振動数方程式は式 (18) の左辺の行列式をとって演算整理することによって、

$$\left( \frac{W}{g} r \right)^2 n^4(m) - \frac{W}{g} \{k(m) + r^2 bK_h(m)d\} n^2(m) + k(m)bK_h(m)d - \left\{ \frac{bK_h(m)d}{2} (l_1 - l_2) \right\}^2 = 0 \dots\dots(19)$$

従って第1次、第2次の固有振動数  $n_1(m), n_2(m)$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} n_1^2(m) \\ n_2^2(m) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2J_G} \{B(m) \mp \sqrt{B^2(m) - 4r^2 C(m)}\}$$

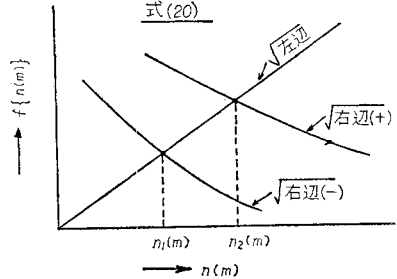
ここに、

$$\left. \begin{aligned} r^2 &= \frac{g}{W} J_G, B(m) = k(m) + r^2 bK_h(m)d, \\ C(m) &= k(m)bK_h(m)d - \left\{ \frac{bK_h(m)d}{2} (l_1 - l_2) \right\}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(20)$$

$n_v(m) \rightarrow n_1(m), n_2(m)$   
 $K_h(m) : \text{式 (15) で } n_h(m) \rightarrow n_1(m), n_2(m)$

しかして式 (14)、式 (15) に見るとおり、 $K_v(m)$  と  $K_h(m)$  には  $n(m)$  をふくむので、式(20)は結局 図-5 に略示したごとく、試算法によって、 $n_1(m), n_2(m)$  を算出することができる。

図-5 連成固有振動数の算定



式 (20) は前論文の式 (2.8) と同じ形であり、これより強制振動については同論文の 3.(3) と同様に解析を進めればよい。なお以上において、並進を無視するときは各式において  $y=0$ 、動揺を無視するときは同じく  $\varphi=0$  とおけばよいことはもちろんである。

4. 上下方向 Soil Prism の実験的考察

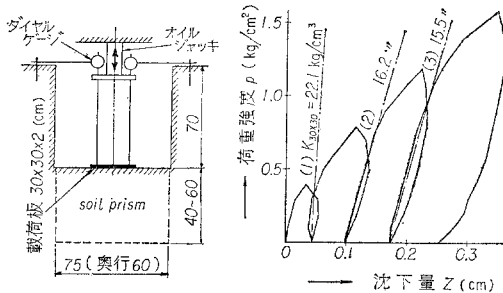
(1) 実験の概要

本論文の出発点は前論文と同様に、式 (2) で定義された soil prism の等価深さ  $d_0 = E/K_v$  の仮定にある。すなわち、図-2 の  $d_h$  は 図-1 の  $d_v$  を単に水平方向に回転させたものであり、図-3、図-4 ももっぱら

かる  $d_v, d_h$  に立脚している。従って  $d_v$  の工学的意義を明らかにし、かかる  $d_v$  の仮定の当否を検討するための実験的考察を行なった。

図-6 平板載荷上下方向試験

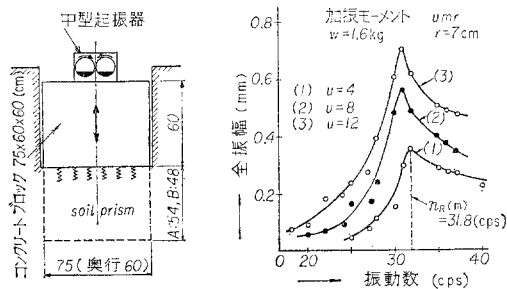
(a) 試験見取図とソイルプリズム (b) 荷重沈下曲線, ビット(A)



実験は京大土木工学教室敷地内に図-6(a)に見るごとく、深さ70cmで面積が70×85cm<sup>2</sup>なるテストピット(A),(B)2個を掘って、その底面で平板載荷試験を行ない図-6(b)より  $K_b$  値を求めた<sup>4)</sup>。一方テストピット底面にピックアップを配置して地盤の縦波伝播速度  $v_l$  を測定することによって土のヤング率  $E$  を推定し、かくして得られた  $K_v$  と  $E$  の両値で与えられる  $E/K_v=d_v$  を  $d_v$  の測定値とみなした。ついでテストピット内に図-7(a)に見るごとく、75×60×60(cm)のコンクリートブロックを打設して、中型起振器による上下方向の加振実験を行なった。これより図-7(b)のごとき共振振動数  $n_R(m)$  が求まったので、これが上記の  $K_v$  と  $E$  の両測定値を用いて式(4)から算出される  $n_v(m)$  とよく対応するかどうか、さらに実験振動数  $n_R(m)$  に合致する  $d_v$  の値などからして、本文における理論的取り扱いの根拠が妥当であるかどうかをそれぞれ検討した。

図-7 起振器による上下加振実験

(a) 実験見取図とソイルプリズム (b) 共振曲線, ビット(A)



(2)  $d_v$  の工学的意義とその計算値

$d_v$  はすでに式(2)で与えられたが、その工学的意義を別途に考えてみる。すなわち半無限弾性体上に等分布荷重  $p$  が加わった場合の平均たわみ  $z$  については、たとえば Timoshenko などによる結果<sup>5)</sup>から、

$$z = m \frac{(1-\nu^2)P}{E\sqrt{a_0}} = m \frac{(1-\nu^2)\sqrt{a_0}p}{E} \dots\dots\dots(21)$$

と書ける。ここに  $a_0$ : 載荷面積,  $\nu$ : 土のポアソン比,  $m$ : 載荷面による係数。ここで  $p=q=K_v z$  なることを上式に入れて変形すると、

$$m(1-\nu^2)\sqrt{a_0}=E/K_v=d_v \text{ 式(2)} \dots\dots\dots(22)$$

が得られる。これより  $d_v$  は  $m, \nu$  のほか  $\sqrt{a_0}$  に比例することを知る。一方わが国の土質工学会でも式(21)とほとんど同一の式を示しており<sup>6)</sup>、これを上記と同様に変形すると、

$$C(1-\nu^2)D/2=E/K_v=d_v \text{ 式(2)} \dots\dots\dots(23)$$

となる。ここに  $D$ : 円の直径または正方形の辺長,  $C$ : 載荷面の形と剛性による係数。式(23)では載荷面が剛なるときを追加しているが、たわみ性の正方形載荷面については  $m\sqrt{a_0}=CD/2$  で式(22)と式(23)とが一致する。かくして図-7(a)のコンクリートブロックの底面積を対象として、 $75 \times 60 \text{ cm}^2 = a_0 = D^2$  をとって  $d_v$  の値を算出した結果が表-1である。

表-1 弾性理論による  $d_v$  の計算値

| 式 No.     | 係数の値         | $d_v(\text{cm})$ |           | 載荷面   |
|-----------|--------------|------------------|-----------|-------|
|           |              | $\nu=1/3$        | $\nu=1/4$ |       |
| (22),(23) | $m=C/2=0.95$ | 56.5             | 59.6      | たわみ性剛 |
| (23)      | $C/2=0.88$   | 52.4             | 55.2      |       |

(3)  $K_v$  と  $E$  による  $d_v$  の測定値

図-6(a)に見るようにテストピットの底面に30×30×2(cm)の正方形載荷板を用いて載荷試験を行ない、これより得られる図-6(b)のごとき荷重強度  $p$  と平均沈下量  $z$  のくり返し曲線の弾性勾配から、 $p/z=K_{30 \times 30}$  を求めた結果を表-2に記入した。つぎにこの  $K_{30 \times 30}$  をコンクリートブロックの底面積75×60cm<sup>2</sup>に対応する  $K_{75 \times 60}$  に換算するための係数  $\beta$  を算出する。Tschebotarioff 教授によってまとめられた固有振動数と基礎面積との関係からは、結局  $K_v$  値は  $a_0^{2/4} \sim a_0^{2/5}$  に逆比例することになるので<sup>7)</sup>、

表-2 平板載荷試験による  $K_v$  の測定値

| ピット | $K_{30 \times 30}(\text{kg/cm}^2)$ |      |      |      | $K_{75 \times 60}(\text{kg/cm}^2)$ |
|-----|------------------------------------|------|------|------|------------------------------------|
|     | (1)                                | (2)  | (3)  | 平均   |                                    |
| (A) | 22.1                               | 16.2 | 15.5 | 17.9 | 8.2                                |
| (B) | 17.3                               | 15.0 | 18.2 | 16.8 | 7.7                                |

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{(30 \times 30)^2}{75 \times 60}} = \frac{1}{2.2}, \quad \beta = \sqrt[5]{\frac{(30 \times 30)^2}{75 \times 60}} = \frac{1}{1.9}$$

となる。また載荷板の周辺長と面積の比に注目すると、<sup>8)</sup>

$$\beta = \frac{2(75+60)/(75 \times 60)}{4 \times 30/(30 \times 30)} = \frac{1}{2.2}$$

と算出される。これらより

$$K_{75 \times 60} = \beta \cdot K_{30 \times 30} = K_{80 \times 90}/2.2$$

として、表-2の最右欄にみる測定値が得られた。

一方相隣る(A),(B)2個のテストピットの底面にピックアップを配置して、衝撃による地盤の縦波伝播速

度  $v_f$  を測定したところ、 $v_f=160\sim 190$  m/sec でその平均値は 180 m/sec であった。これより周知の次式

$$v_f = \sqrt{\frac{gE}{w} \left(1 + \frac{2\nu^2}{1-\nu-2\nu^2}\right)}, \quad \text{ここに } w=1.6t/m^3$$

より  $E$  を逆算した値を表-3 に記入した。かくして表-2 の  $K_v$  と表-3 の  $E$  から直接に  $E/K_v=d_v$  の値を求めたのが表-3 の下半の値である。

表-3  $K_v$  と  $E$  から求めた  $d_v$  の測定値

|                     | $\nu=1/3$   |             | $\nu=1/4$ | $K_v(\text{kg/cm}^2)$ |
|---------------------|-------------|-------------|-----------|-----------------------|
|                     | $\nu=1/3$   | $\nu=1/4$   | $\nu=1/4$ |                       |
| $v_f(\text{m/sec})$ | 160~180~190 | 160~180~190 | —         | —                     |
| $E(\text{kg/cm}^2)$ | 280~350~390 | 350~440~490 | —         | —                     |
| $d_v$ (A)           | 34~42.7~48* | 43~53.7~60* | —         | 8.2                   |
| (B)                 | 36~45.5~51  | 45~57.2~64  | —         | 7.7                   |

\* 最小~平均~最大を示す

(4) 共振振動数とこれに合致する  $d_v$  および土の振動重量

コンクリートブロックの打設後、図-7(a)のごとく中型起振器を取り付けて上下に加振し、ブロック上面の上下動を動線輪型微動計 ( $n_0=15$  cps) で記録して、図-7(b)のごとき共振曲線を得た。これよりピット(A),(B)に対する共振振動数は  $n_R(m)=31.8, 31.2$  cps となった。そこで  $n_R(m) \cong n_v(m)$  として、これと表-2 最右欄の  $K_v$  値とを式(4) (ただし  $k_f=0$ ) に入れて、同式を満足する  $E$  の値を算出して、これより  $E/K_v=d_v$  を求めた値を  $n_R(m)$  とともに表-4 にかかげた。

表-4 共振振動数  $n_R(m)$  とこれに合致する  $d_v$  および土の振動重量

| ピット | $n_R(m)$ | $d_v$ | $n_v(m)$ | $n_v(o)$ | $n_R(m)/n_v(o)$ | $\bar{W}$ | $d_v(e)$ |
|-----|----------|-------|----------|----------|-----------------|-----------|----------|
|     | (cps)    | (cm)  | (cps)    | (cps)    | (%)             | (kg)      | (cm)     |
| (A) | 31.8     | 53.6  | 32.1     | 34.4     | 93.4            | 112       | 15.5     |
| (B) | 31.2     | 48.1  | 31.1     | 33.4     | 93.0            | 128       | 17.7     |

一方表-3 から  $E \cong 400$  kg/cm<sup>2</sup> とみなし、これと表-2 の  $K_v=8.2, 7.7$  kg/cm<sup>2</sup> とを式(4) ( $k_f=0$ ) に入れて  $n_v(m)$  を計算し、さらに土の振動質量を無視した場合の  $n_v(o)$  および土の振動重量  $\bar{W}$  をそれぞれ前論文の式(1.5), (1.6) から算出して表-4 に一括した。同表で  $d_v(e) = \bar{W}/a$  は土の振動重量を soil prism の深さに換算したもので、この場合  $d_v(e) = 15\sim 17$  cm  $\cong d_v/3$  の土が見かけ上振動質量としてブロックにそのまま付加されているとみなすことと振動的に等価であることを示している。

(5) 実験結果の考察

本節においては結局式(2)の  $d_v$  とこれによる  $n_v(m)$  の算定式(4)の妥当性を検討した。 $d_v$  については弾性理論よりの計算値:表-1, 実測値  $K_v$  と  $E$  よりの測定値:表-3, 実験値  $n_v(m)$  に合致する推定値:表-4, などの結果が求まったが、これらの代表的な値を一括対比したのが表-5 である。いずれの場合も  $d_v \cong 50$  cm に比較的近い値が得られ、土に関する弾性定数の値など

に不確実性の少なくないことを考えると、表-5 における各値は相接近して、実質的には十分満足すべき結果であるといえる。このことは式(2)の仮定が妥当であろうことを実証し、また式(4)が工学的に有意義であることを裏づけている。

表-5 各種方法によって求めた  $d_v$  の値の対比

| ピット | 表-1       |           | 表-3       |           | 表-4  |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|------|
|     | $\nu=1/3$ | $\nu=1/4$ | $\nu=1/3$ | $\nu=1/4$ |      |
| (A) | 52.4      | 55.2      | 42.7      | 53.7      | 53.6 |
| (B) | 52.4      | 55.2      | 45.5      | 57.2      | 48.1 |

さらに表-4 における実験共振振動数  $n_R(m)$  と計算固有振動数  $n_v(m)$  とが実際上一致していることは、上下方向に関する限り図-1,3 などに見た soil prism の仮定が工学的に妥当であることを実証できたものとして注目される。

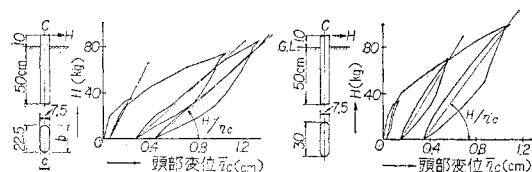
5. 模型橋脚による水平方向の実験

(1) 実験の概要

鉛直方向における soil prism の仮定が工学的に有意義なことはわかったが、これを図-2, 図-4 に見たごとく水平方向にも適用することについては若干の疑念がもたれる。そこで図-8 に見るごとく長径  $b$  と短径  $c$  の寸法比  $b/c=3$  および 4 である(A),(B) 2種の鉄筋コンクリート製模型橋脚をつくり、これらを前節における実験地点に接して埋設後実験を続行した。すなわち模型頭部の水平引張試験と小型起振器による水平振動実験を行なって、これらの結果から水平方向の soil prism の仮定の適否について考察を進めた。当初鋼製の中空角柱の模型を用いたが、これは側面摩擦の影響の大きいことが認められたので、図-8 に示した小判型断面の模型をその短径方向に供試したわけである。

図-8 模型橋脚の水平引張試験

(a) 模型(A):  $b/c=3$  (b) 模型(B):  $b/c=4$



(2) 水平引張試験とこれによる  $K_h$  の測定値

まず図-8(a),(b)のごとく模型橋脚の頂部 C に水平引張力  $H$  を与え、これと同点の水平変位量  $\eta_c$  についてのくり返し曲線を求めたのち、その弾性勾配  $H/\eta_c$  に注目した。ここでは  $K_h$  は深さ方向に一定とみなし、また模型橋脚自身の弾性変形は無視できることから、弾性変位  $\eta$  に関する力と変位のつりあい関係が図-9のごとくかける。しかして模型を表わす直線 ABC は  $\eta_A, \eta_B, \eta_C$  のうちのいずれか 2 者で決まるが、これは同図に対して  $\sum H=0$  と  $\sum M=0$  の両条件式を適用すれば

よい。かくして求まる  $\eta_c$  より逆に  $K_h$  が次式で与えられる<sup>9)</sup>。

$$\eta_c = \frac{4H}{bK_h d} f\left\{\frac{h}{d}\right\} \text{より}$$

$$K_h = \frac{4}{bd} \left\{3\left(\frac{h}{d}\right)^2 + 3\left(\frac{h}{d}\right) + 1\right\} \frac{H}{\eta_c} \dots\dots(24)$$

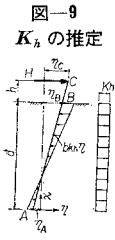


図-9  $K_h$  の推定

soil prism では弾性変位の部分が対象となり、しかも引続いて行なった(4),(5)に後述する振動実験の結果とも対比させるため、ここでは図-8(a),(b)における最終弾性勾配に相当する  $H/\eta_c$  をとった。かくして模型の寸法である  $b, d, h$  の各数値をそれぞれ上式に代入したところ、本実験の場合  $K_h$  の測定値としてつぎの

値が求まった。

模型(A):  $K_h = 6.1 \text{ kg/cm}^2$ , 模型(B):  $K_h = 7.0 \text{ kg/cm}^2$

(3)  $d_h$  の計算値と  $E$  の推定値

弾性理論にもつづいた  $d_v$  の簡易算定式として式(22), (23)をあげたが、これらの関係が便宜上水平方向にもそのまま適用できるものと仮定すれば、

$$\text{式(22): } m(1-\nu^2)\sqrt{a_0} \cong d_h = E/K_h \dots\dots(25)$$

$$\text{式(23): } C(1-\nu^2)D/2 \cong d_h = E/K_h \dots\dots(26)$$

また著者の1人がすでに円形載荷板を対象として引用した結果<sup>10)</sup>を変形して水平方向に改めると、

$$\frac{8D}{3\pi}(1-\nu^2) \cong d_h = \frac{E}{K_h} \dots\dots(27)$$

かくして図-8(a),(b)にみた模型橋脚の側方受圧面積  $b \times d$  の寸法から、 $a_0$  および  $D$  を求めて、上記3式の各左半の関係式に代入して  $d_h$  を算出した結果が表-6である。

つぎに本測定があまりにも狭小な地点であって、4.におけるように弾性波の測定より土のヤング率  $E$  を推定するために必要な精度が期待できなかったので、上記3式の右半における  $d_h K_h = E$  より直接に  $E$  を推定した。すなわち表-6で剛載荷面の場合を重視して同表下位の2欄における  $d_h$  の総平均値をとり、これと上記(2)で測定した  $K_h$  値とを相乗することによって表-7のごとき  $E$  の値が得られた。

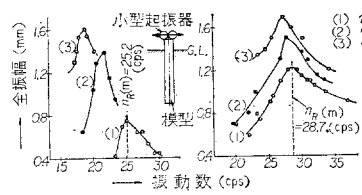
表-6 弾性理論による  $d_h$  の計算値

| 式 No.     | 係数の値          | 模型(A)の $d_h$ (cm) |           | 模型(B)の $d_h$ (cm) |           | 載荷面  |
|-----------|---------------|-------------------|-----------|-------------------|-----------|------|
|           |               | $\nu=1/3$         | $\nu=1/4$ | $\nu=1/3$         | $\nu=1/4$ |      |
| (25),(26) | $m=C/2=0.95$  | 27.9              | 29.4      | 32.2              | 33.8      | たわみ性 |
| (26)      | $C/2=0.88$    | 29.2              | 30.8      | 38.4              | 40.5      | 剛    |
| (27)      | $8/3\pi=0.85$ | 28.2              | 29.7      | 37.0              | 40.4      | 剛    |

表-7  $K_h$  と  $d_h$  から求めた  $E$  の推定値

| 模型  | $K_h$ 測定値 (kg/cm <sup>2</sup> ) | $d_h$ 計算値 (cm) | $E$ 推定値 (kg/cm <sup>2</sup> ) |
|-----|---------------------------------|----------------|-------------------------------|
| (A) | 6.1                             | 29.5           | 180                           |
| (B) | 7.0                             | 39.1           | 274                           |

図-10 模型橋脚の水平振動実験  
(a) 模型(A) (b) 模型(B)  
起振力  $P_m = 0.82(2\pi n)^2 \times 10^{-3} \cos t$  : (kg)



(4) 実験共振振動数と連成1次の固有振動数計算値

前述(2)の静的実験終了より約2日間を経過したのち、図-10の中央に見るごとく模型橋脚の頂部に小型起振器を取りつけて、振動試験を行なって得られた共振曲線において、加振力の小さい場合を重視すると、図-10より模型(A),(B)の共振振動数は  $n_R(m) = 25.2, 28.7 \text{ cps}$  となる。しかしてこの場合の振動は図-4の連成振動に相当するが、図-10の共振曲線は当然連成1次の振動にもつづくものであるとみなされる。そこで式(20)において模型底面では  $K_v = 5/4 \cdot K_h^{11)}$  と仮定して、 $n_1(m)$  を試算法によって算出するとともに、振動質量を無視した場合の  $n_1(o)$  をも計算した。かくしてこれらの振動数を一括対比したのが表-8であって、振動数の低下率は数%程度となっている。

表-8 共振振動数  $n_R(m)$  と振動数の低下率

| 模型  | $n_R(m)$ (cps) | $n_1(m)$ (cps) | $n_1(o)$ (cps) | $n_R(m)/n_1(o)$ (%) | $n_1(m)/n_1(o)$ (%) |
|-----|----------------|----------------|----------------|---------------------|---------------------|
| (A) | 25.2           | 25.3           | 26.2           | 96.1                | 96.5                |
| (B) | 28.7           | 29.1           | 30.8           | 93.2                | 94.5                |

(5) 共振振動数に合致する  $d_h$  の近似計算

図-10で求めた共振振動数  $n_R(m) \cong n_1(m)$  に理論計算上合致するような  $d_h$  を算出するには、式(20)において  $n_1(m) = n_R(m)$ , および  $K_v(m)$  と  $K_h(m)$  を表わす式(14),(15)の中で  $E = d_h K_h$  とおき、これに既知量を入れることによって得られる未知量  $d_h$  に関する数値式を満足するように  $d_h$  を算定すればよい。しかしこれは簡単ではなく、しかも模型底面における  $E = d_v K_v$  による  $d_v$  も未知数として入ってくる。そこでいま  $d_h$  を概算する手段として、便宜上  $n_1(m) \cong n_h(m)$  と仮定して、式(15)または式(6) (ただし  $k_f' = 0$ ) に  $E = d_h K_h$  を入れかつ  $n_h(m)$  の代わりに実験値  $n_R(m)$  を用いて、未知量  $d_h$  の近似値を算出した結果が表-9

表-9 Soil Prism 深さ  $d_h, d_v$  の計算値と実験推定値の比較

|               | 供試種別   | (1) 計算値  | (2) 実験推定値 | 比率 (2)/(1) |
|---------------|--------|----------|-----------|------------|
|               |        | $d$ (cm) | $d$ (cm)  |            |
| 水平方向 {<br>(h) | 模型(A)  | 29.5     | 32.5*     | 1.10*      |
|               | 模型(B)  | 39.1     | 49.6*     | 1.27*      |
| 上下方向 {<br>(v) | ピット(A) | 51.5     | 53.6      | 0.96       |
|               | ピット(B) | 54.3     | 48.1      | 1.13       |

\* 実際の値はこれ以下

の上半の実験推定値  $d_h$  であって、これは表-6.7における  $d_h$  の計算値とある程度対応している。

(6) 実験結果の考察

土の振動質量による固有振動数の低下が水平方向でも実証され、本実験の場合その低下率は表-8に見たごとく数%であった。しかし表-9上半の  $d_h$  の実験推定値を求めるに当っては、 $n_1(m) \cong n_h(m)$  と仮定したが実際には  $n_h(m) > n_1(m)$ <sup>12)</sup> であって、しかも  $d_h$  の大きいほど振動数  $n$  は一般に低下するので、結局、実際の  $d_h$  は表-9の上半のごとく推定した\*印の値より若干小となるべきである。従って  $d_h$  に関する計算値/実験値の比率が同表の 1.10, 1.27 より小となり、水平方向における soil prism の仮定も一応工学的に意義があることが明らかとなった。

なお表-9の下半は比較のため、表-1における式(23)による  $d_v$  および式(27)に相当する  $d_v$  の計算平均値と表-4で求めた実験推定値とを対比したものである。この表-9全体からして上下、水平両方向における soil prism の仮定とこれにもとづく著者の計算式の妥当性が割合よく実証されたわけである。

6. 実橋脚に対する数値計算適用例

(1) 計算資料

実橋脚に対する数値計算の適用例としては、国鉄東海道線瀬田川橋梁第9号橋脚の橋軸に平行方向を対象とした。同橋脚の主要寸法は図-11に見るとおりであって、これより図-4に対応する諸値がつきのごとく書かれる。 $d \cong 1890$  cm,  $h \cong 435$  cm,  $b = 680$  cm,  $c = 540$  cm,  $I_0 = 5255 \times 10^6$  cm<sup>4</sup>,  $l_1 = 1070$  cm,  $l_2 = 820$  cm,  $r^2 = J_{CG}/W = 54.2 \times 10^4$  cm<sup>2</sup>。また  $K_h$  値については、すでに著者の1人が提示した実用的な1自由度としての橋脚の固有周期  $T$  の計算式<sup>13)</sup>による計算周期がこの橋脚における実測周期 0.1 sec<sup>14)</sup> に合致するような  $K_h$  の値を求めたところ、 $K_h = 6.1$  kg/cm<sup>3</sup> となったので、これより  $K_h = 6$  kg/cm<sup>3</sup>,  $K_v = 5/4 \cdot K_h$ <sup>11)</sup> = 7.5 kg/cm<sup>3</sup> と仮定した。一方  $d_h$  の値については橋脚根入部(井筒)側面の  $d \times b$  を剛載荷面とみなして、これを円形に換算して式(26)を用いると  $\nu = 1/3$ ,  $\nu = 1/4$  に対して、 $d_h = 10.0$  m, 10.5 m, 同じく式(27)を用いると  $d_h = 9.7$  m, 10.2 m となったので、これらより  $d_h = 10$  m と推定した。従って必然的に  $E = K_h d_h = 6 \times 1000 = 6000$  kg/cm<sup>2</sup> となる。

(2) 計算結果とその考察

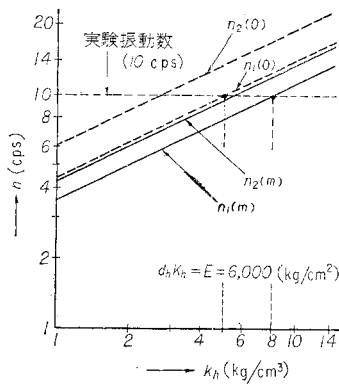
上記の各資料に従って式(20)により  $n_1(m), n_2(m)$

表-10 実橋脚における連成固有振動数の計算値とその低下率

|          | 計算値 (cps) | 比率 (%)                         | 比率 (%)                         |
|----------|-----------|--------------------------------|--------------------------------|
| $n_1(m)$ | 8.88      | $\frac{n_1(m)}{n_2(m)} = 81.8$ | $\frac{n_1(m)}{n_1(o)} = 84.3$ |
| $n_2(m)$ | 10.94     |                                |                                |
| $n_1(o)$ | 10.53     | $\frac{n_1(o)}{n_2(o)} = 70.2$ | $\frac{n_2(m)}{n_2(o)} = 72.9$ |
| $n_2(o)$ | 15.02     |                                |                                |

を試算法によって算出し、また同式で  $(m) \rightarrow (0)$  とおいた式より  $n_1(o), n_2(o)$  を計算して一括したのが表-10である。同表より当然つぎの傾向が推察される。すなわち  $n(m) < n(o)$  であって、本計算例では  $n_1(m)/n_1(o) \cong 85\%$  となり、第1次連成振動数における土の振動質量による低下率は約 15% 程度という結果がでてい

図-12  $K_h$  に対する連成振動数  $n$  の計算例 ( $E = \text{一定}$ )



る。ついで  $d_h K_h = E = \text{const}$  (6000 kg/cm<sup>2</sup>) の条件のもとに  $K_h$  のみを変化させて  $n$  を算出して図示したのが図-12である。同図において  $\log K_h - \log n$  の関係が直線状であることは、橋脚の弾性変形を無視していることの影響であろうと考えられる。また図-12に記入した実験振動数  $n = 10$  cps = 0.1 sec<sup>14)</sup> は、大型起振器で実橋脚の頂部を加振することによって求めたもので連成1次とみなせるので、これは当然  $n_1(o), n_1(m)$  と対比させられるべきものである。従って図-12より明らかなおと  $n_1(o)$  が実験値の 10 cps に合致する  $K_h$  値は 5 kg/cm<sup>3</sup> であり、また  $n_1(m)$  のそれは 8 kg/cm<sup>3</sup> である。このことは  $K_h = 8$  kg/cm<sup>3</sup> でこれに土の振動質量を考慮した場合の固有振動数が、見かけ上は  $K_h = 5$  kg/cm<sup>3</sup> に引き下げて土の振動質量を無視した場合の固有振動数に相当することを表わしている。ところで図-12ではあくまでも  $E = \text{一定}$  という条件のもとで  $K_h$  のみを変えたものであるが、式(20), (14), (15) などからわかるように  $E$  が一定であることは土の振動質量を表わすこれらの式における  $\sqrt{\quad}$  内が一定であるので、結局同図における  $n(m)/n(o)$  の値は  $K_h$  の大小に影響されないという計算結果が出ているものと解釈される。

以上のように実橋脚に対しても式(26), (27) はほぼ妥当な  $d_h$  を与え、これに振動実験から推定された  $K_h$  を考慮して  $n(m), n(o)$  の値を算出した結果が、 $n$  の実験値と比較的よく対応していることを確かめた。この

ことは水平, 上下両方向における soil prism の仮定と, これを考慮に入れた本文における理論式が工学的にかなり妥当性のあることを立証しているものとして注目される。

## 7. 結 言

振動にともなう土の振動質量の理論式への導入については従来からあまり明示されなかったが, われわれは В.П. Викше 氏の上下方向における soil prism の仮定から出発して, これを水平方向にも拡張して橋脚の振動解析に適用するとともに, 模型実験と数値計算を行なうことによって, 本文における理論的取り扱いが工学的にかなり妥当なものであることを実証した。一般に構造物基礎の土については計算上明確でない値があるにもかかわらず, 本文の場合それぞれの実験値と計算値とが割合よく相接近するという結果が得られた。

かくして本文は前論文とともに土の振動質量を近似的ではあるが一応理論式に導入することができ, しかもその妥当性を実験などによって具体的に確認したものであって, その工学上における意義は小さくないことと考えられる。こうした取り扱いが橋脚のほかの土木構造物へも同様に適用されることを期待したい。

終りにのぞみ本文中における主として模型実験に少なからざるご助力をいただいた京大土木工学教室におけるわれわれ研究室の諸君に深謝する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) 後藤・西頭: 弾性質量地盤上にある橋脚の連成振動の計算法, 昭和35年度土木学会関西支部年次学術講演会, 昭35.11.13, 後藤・西頭: 弾性質量基礎上の橋脚の模型振動実験とその解析, 第16回土木学会年次学術講演会, 昭36.5.27, 28 これらの両講演会で講演したところをとりまとめたもの。
- 2) 後藤: 弾性質量基礎上にある構造物の振動解析について, 土木学会論文集, 72・別冊3-2, 昭和36.2.
- 3) 井上六郎: 橋脚のロッキング振動について, 日本国有鉄道における研修論文, 昭.30.
- 4) 株式会社応用地質調査事務所に委託, 同所が昭.35.12.26に実施, ビット(A),(B)の間隔は2.5m.
- 5) Timoshenko, S., Goodier, J. N.: Theory of Elasticity, p. 370, eq. (212). 1951.
- 6) 土質工学会: 土質試験法解説(第2集), p. 169-170, 昭.34.
- 7) G.P. チェボタリオフ原著, 石井靖丸訳: 土質工学(下), pp. 288-291, 昭.33, 畑中元弘: 基礎の振動, 土木学会関西支部, 基礎工学, pp. 61-62, 昭.31.3.
- 8) A.E. カミングス原著, 松尾新一郎訳: 基礎工学, pp. 13-14, 昭.29.
- 9) 後藤: 土木学会誌 39-7, 昭.29.7, p. 17, 式(20)において  $n=0, \beta=0$  とおく。
- 10) 小西, 後藤: 土木学会論文集, 第6号, 昭.26.8., p. 66, 式(33)<sub>1</sub>より。
- 11) 松平 精: 機械の基礎と防振支持, 日本機械学会編, 機械振動とその対策, p. 124 の欄外参照。
- 12) 一般に  $n_1 < n_2$  および  $n_r < n_2$ : たえば松平 精: 基礎振動学, p. 130, 昭.25.
- 13) 上掲9), p. 17, 式(22)において  $n=0$  とおく。
- 14) 小西・畑中・後藤: 土木学会誌 37-3, 昭 27.3, p. 12, 図-6 の(1):  $W=0$  に明示。

(原稿受付: 1962.2.19)



## VIBRATION ANALYSIS AND MODEL TESTS OF BRIDGE PIERS EMBEDDED IN AN ELASTIC FOUNDATION, TAKING VIBRATING MASS OF SOIL INTO CONSIDERATION

*By Dr. Eng., Hisao Goto, C.E. Member and Tsunehiko Saito, C.E. Member*

In this paper, the authors have advanced the theoretical investigation in the former paper<sup>1)</sup> to the bridge piers embedded in the elastic foundation, and by carrying out the model tests they tried to confirm whether it was adequate or not to assume that the embedded parts of structures were supported not only vertically but also horizontally by the so-called equivalent soil prisms.

### 1. Analysis of Horizontal Couple Vibration of Bridge Piers

The authors aimed to analyze the couple vibration of the bridge piers which consists of horizontal translation  $y$  and rocking vibration  $\varphi$ . For simplicity, if the vibrating mass of bed soil is neglected, a substitution of the potential energy and the kinetic energy in Fig. 1 (b) into the Lagrange's equation of motion gives us the following differential equations:

$$\left. \begin{aligned} \frac{W}{g} \ddot{y} + bK_h d y - \frac{bK_h d}{2} (l_1 - l_2) \varphi &= 0 \\ \frac{W}{g} r^2 \ddot{\varphi} + \left\{ \frac{bK_h d}{3} (d^2 - 3l_1 l_2) + K_v I_0 \right\} \varphi &\dots\dots(1) \\ - \frac{bK_h d}{2} (l_1 - l_2) y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

where  $W$  is a total weight of pier body itself,  $r$  is equal to  $\sqrt{J_G/gW}$ ,  $J_G$  is mass moment of inertia around a center of gravity  $G$ ,  $I_0$  is geometrical moment of inertia at the bottom of a pier body, and the other symbols may be seen in Fig. 1.

On the other hand, the natural frequency  $n(m)$ , considering that the vibrating mass of soil is to be written by the following eq. (2), because we can consider that the soil prisms whose depth  $d_v$  is equal to  $E/K_v$  and  $d_h$  is equal to  $E/K_h$  are added to the pier body as shown in Fig. 1 (a).

$$\left. \begin{aligned} n_v^2(m) &= \frac{k_v(m)}{M} = K_v(m) a_0 \frac{g}{W} \\ n_h^2(m) &= \frac{k_h(m)}{M} = K_h(m) a_0' \frac{g}{W} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

In eq. (2),  $a_0$  and  $a_0'$  are respectively the vertical and the horizontal contact area between the pier body and bed soil, and  $K_v(m)$  and  $K_h(m)$  means the vertical and the horizontal equivalent coefficient of foundation respectively, when the vibrating mass of bed soil is taken into considered. The differential equations of motion for Fig. 1 (a), therefore, could be written by substituting  $K_h(m)$  and  $K_v(m)$  in eq. (2) for  $K_h$  and  $K_v$  in eq. (1) respectively.  $K_h(m)$  and  $K_v(m)$ , however, contain the unknown terms of the natural frequency  $n(m)$  besides  $K_h$ ,  $K_v$ ,  $E$ , and  $w$  which means the weight of soil itself per unit volume, so it is to be borne in mind that the frequency equation and so on have to be calculated by using a trial-and-error method.

### 2. Consideration of the Results Obtained by the Model Tests

In order to clarify the suitability of the assumption concerning the soil prisms, we considered, first of all, the vertical soil prisms whose mechanisms are comparatively simpler than the horizontal ones. Transformation of the equation which represents the vertical displacement of the rigid plate rested on an elastic foundation having infinite depth gives us the following relationships between the vertical depth  $d_v$  of soil prism, Poisson's ratio  $\nu$  of soil, and equivalent side length  $D$  of a loading square

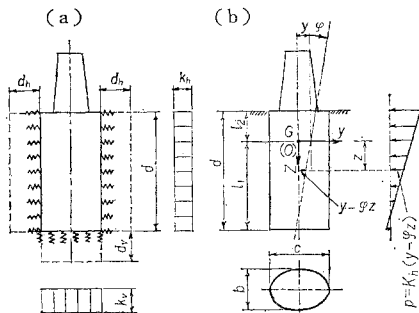


Fig. 1 Couple vibration of bridge pier.

plate.

$$\frac{E}{K_v} = d_v = \frac{C}{2}(1-\nu^2)D = 0.88(1-\nu^2)D \dots (3)$$

It was found that the values of  $E$  and  $K_v$  measured and those of  $\nu$  assumed on the actual ground closely satisfied the relation in eq. (3). After measuring the vertical resonance frequency  $n_R(m)$  of the two concrete blocks set up on the base of the two test pits, we obtained the value of  $d_v$  such as the computed natural frequency  $n_v(m)$  obtained from eq. (2) just agree with the above-mentioned resonance frequency  $n_R(m)$ , and we called this  $d_v$  the experimental assumed depth  $d_v(e)$ . Thus, at the upper part of Table 1, these  $d_v(e)$  values are compared with those  $d_v(c)$  values which were figured out above. It is seen in this table that the computed values  $d_v(c)$  are fairly close to the assumed values  $d_v(e)$  from the resonance frequency gotten by the vibration tests.

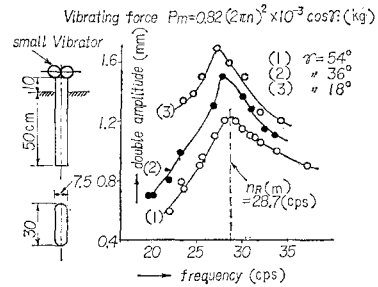
On the other hand, we carried out the horizontal tests by using two small model piers

**Table 1** Comparison of the computed values and the assumed values by the tests concerning the equivalent depth  $d_v$  and  $d_h$  of the soil prisms

|                             | Grouping of the objects tested | (1) Computed values $d(c)$ (cm) | (2) Assumed values by the tests $d(e)$ (cm) | Ratio (2)/(1) | Loading area $a_0, a_0'$ (cm <sup>2</sup> ) |
|-----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|---|---------------|---|
| In the vertical direction   | pit (A)                        | 51.5                            | 53.6  | 0.96          | 75×60                                       |
|                             | pit (B)                        | 54.3                            | 48.1  | 1.13          | 75×60                                       |
| In the horizontal direction | model pier (A)                 | 29.5                            | 32.5  | 1.10          | 50×22.5                                     |
|                             | model pier (B)                 | 39.1                            | 49.6  | 1.27          | 50×30                                       |

made of the concrete as shown in Fig. 2, first of all the horizontal foundation coefficient  $K_h$  was determined by analyzing the elastic relation between the horizontal loading force and the horizontal displacement at the top of the model pier, after that Young's modulus  $E$  of bed soil was expressed in terms of  $K_h \times d_h(c)$  in which  $d_h(c)$  was computed by using eq. (3) horizontally.

For the horizontal soil prism, furthermore, we decided the experimental assumed depth  $d_h(e)$  such as the first mode frequency  $n_1(m)$  calculated by eqs. (1) and (2) fairly well agreed with the resonance frequency  $n_R(m)$  found from the horizontal vibration test as shown in Fig. 2. These values of  $d_h(c)$  and  $d_h(e)$  obtained from the above tests are shown at the lower part of



**Fig. 2** Horizontal vibration test of the model pier. (model pier B)

Table 1, and we see that in the direction either vertical or the horizontal the computed value  $d(c)$  and the assumed value  $d(e)$  are comparatively close to each other. It is remarkable that the results shown in Table 1 support the assumptions on the soil prisms and that the vibration analyses in this paper are considerably significant and appropriate on the practical engineering point of view.

### 3. Example of Numerical Computation for the Actual Bridge Piers

The numerical computation was performed for the longitudinal direction of No. 9 Pier of the Setagawa Bridge which had been laid on the Tokaido

Line, belonging to the Japanese National Railways. From the results computed, it is noticed that, in this example, the decline of the natural frequency is about 16% for the first mode of couple vibration, and is about 27% for the second mode.

By summarizing this paper, the considerable results concerning the effect of the vibrating mass of soil were obtained, but we would say that these studies were to be continued still more.

- 1) Hisao Goto: Vibration Analysis of Structures Rested on an Elastic Foundation, Taking Vibrating Mass of Soil into Consideration, The Japan Society of Civil Engineers, No. 72, Extra Papers (3-2), February, 1961.