

円孔を有する直交異方性板の光弾性実験

丹 羽 義 次*
川 本 眺 万**

1. 緒 言

直交異方性材料に対する光弾性実験法は航空機、船体、建築などに現われる異方性材料や、それらによる構造物の応力解析に対して非常に有利な方法であると思われる。著者らは主として異方性弾性地山内の坑道応力状態を研究するために、直交異方性板が円孔を有する場合の応力集中を対象にして、異方性材料に対する光弾性実験を行なった。実験には後述するように光弾性皮膜法(photoelastic coating)が適用された。異方性材料の応力測定に関する実験法としては二、三の研究が行なわれている。すなわち林 毅¹⁾はポリエステル樹脂(リゴラック2004)とガラスクロスとの組合せで透明な直交異方性の光弾性材料を作製している。そしてこの直交異方性板ではそのひずみ分布をガラスクロスで支配させ、その光弾性効果を樹脂を通じて示させることにより、直接透過式の光弾性実験を行なっている。しかしこの実験法ではガラスクロスの縦横の繊維密度の相違に限度があり、またその弾性係数が樹脂のそれとあまり差異がないため、異方性の程度の大い、すなわち主弾性係数比の大い異方性材料をうることは困難である。市販のガラスクロスの種類が少ないことにより任意の異方性材料が得られないために、著者らはガラス繊維の素線を一方向に入れて材料の作製を試みたが、一樣にガラス繊維を入れることがきわめて困難なことや、透明度の高いものが得られなくて断念した。しかしこの方法では直接透過式で実験を行なうため実験結果の処理が容易である利点はある。

つぎに林 卓夫²⁾は少数の基本異方性板(等方性板をふくむ)を用いて実験を行ない、その結果を数学的に処理することによって任意の異方特性をもつ直交異方性板の平面応力を実験的に求めることについて述べている。しかしこの場合は一般に抵抗線ひずみ計を用いた応力測定による実験であり、特別な場合においてのみ等方性材料の光弾性実験による応力値を用いている。しかし基本異方性板としてききの林 毅氏のごとき透明な異方性光弾性材料を用いれば、光弾性実験を適用することができ有利となるであろう。

以上の異方性板に対する実験法に対して、著者らは光弾性皮膜法を用いて直交異方性板内の円孔周辺の応力分

布に対する基礎的実験を行なった。この場合には異方性板は透明である必要はないから、繊維や金属線を補強材とした合成樹脂板を作ればよい。あるいは木材などを用いることも考えられる。

2. 直交異方性弾性板に対する光弾性皮膜法の適用

光弾性皮膜法は最初弾性域内の解析のみを目標として Menager がその方法を提案したが、その後最近になって塑性領域での物体のひずみ状態を測定する目的で種々改良研究が行なわれてきており、河田氏はこの方法を実物光弾性実験法として詳細に紹介³⁾、特に皮膜に用いる光弾性材料としてエポキシラバーを作製して、その特性に関する研究や、実験に用いる反射式光弾性装置の試作などについて報告している⁴⁾。しかし現在では皮膜法がひずみの大きい領域において使用されることが通念のごとくなっているように思われるが、皮膜としてその感度が十分に大きい材料を用いれば、弾性領域内での測定も可能である。しかしこの場合皮膜材料としては“硬い”光弾性材料を用いることが必要になり、従って下地材料におよぼす皮膜の影響が問題になってくる。すなわち河田氏も指摘しているように、弾性係数の大きい皮膜は下地材料のひずみが大きい場合には、その応力に無視できないような影響を与えるが、下地材料が小さいひずみの範囲内(弾性領域内)で実験されるときには、その皮膜の影響は無視されうる。また最近では塑性領域におけるひずみばかりでなく、弾性応力、弾性ひずみについても測定が行なわれてきており、光弾性皮膜法を用いたひずみ計についても研究が行なわれている⁵⁾。

まず応力あるいはひずみを測定すべき下地材料が等方性体の場合を考えると、光弾性皮膜に生ずる等色線はまよりつぎのように下地材料の応力を求めることができる。皮膜と下地材料の表面との接着が完全であり、皮膜の厚み t が応力、ひずみの分布の勾配に対して小さい場合には、皮膜のひずみ状態は完全に下地材料表面のそれに等しいと考えられる。従って下地材料のひずみ状態 $(\epsilon_1 - \epsilon_2)_M$ と皮膜のひずみ状態 $(\epsilon_1 - \epsilon_2)_e$ とはまったく等しいから次式をうる。

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2)_M = (\epsilon_1 - \epsilon_2)_e \dots \dots \dots (1)$$

しかるにひずみと応力との関係より、下地材料に対して

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_M = (\epsilon_1 - \epsilon_2)_M \frac{E_M}{1 + \nu_M} \dots \dots \dots (2)$$

皮膜に対して、

* 正員 工博 京都大学教授 工学研究所

**正員 熊本大学助教授 工学部土木工学教室

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_c = (\epsilon_1 - \epsilon_2)_c \frac{E_c}{1 + \nu_c} \dots\dots\dots(3)$$

なる式が与えられるから、これらと(1)式よりつぎのようになる。

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_M = (\epsilon_1 - \epsilon_2) \frac{E_M}{1 + \nu_M} = (\sigma_1 - \sigma_2)_c \frac{E_M(1 + \nu_c)}{E_c(1 + \nu_M)} \dots\dots\dots(4)$$

一方下地材料表面の反射によって光弾性皮膜を2度通過する偏光の示す光弾性しま次数は、 α を光弾性感度とすると、

$$N = 2\alpha(\sigma_1 - \sigma_2)_c t \dots\dots\dots(5)$$

であるから、つぎのように下地材料の主応力差 $(\sigma_1 - \sigma_2)_M$ が得られる。

$$(\sigma_1 - \sigma_2)_M = \frac{N}{2\alpha t} \cdot \frac{E_M(1 + \nu_c)}{E_c(1 + \nu_M)} \dots\dots\dots(6)$$

実験を行なう対象物および皮膜の弾性性質すなわち弾性係数 E_M, E_c ポアソン比 ν_M, ν_c 、皮膜の光弾性感度 α およびその厚み t などはあらかじめ測定されているから、皮膜に生ずる光弾性しま次数 N を測定することにより、ただちに主応力差を得ることができる。なおそれぞれの主応力値あるいは応力成分(たとえば $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$)を得るためには、等傾曲線を求めて通常の光弾性実験法で行なわれるのと同様の図式積分法を用いればよい。とくに自由境界上では σ_1 あるいは σ_2 のいずれかが0であるから、しま次数からただちに主応力値をうることができる。

つぎに、下地材料が直交異方性板の場合について考える。いま異方性の主軸が x, y 軸と一致するように座標軸をとれば、二つの主弾性係数は $E_1 = E_x, E_2 = E_y$ となる。まず異方性の対称軸(x, y 軸)と主応力 (σ_1, σ_2) の方向とが一致した場合には、応力-ひずみ関係は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= c_{11}\sigma_1 + c_{12}\sigma_2 \\ \epsilon_2 &= c_{12}\sigma_1 + c_{22}\sigma_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

従って主ひずみ差は、

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 = (c_{11} - c_{12})\sigma_1 - (c_{22} - c_{12})\sigma_2 \dots\dots\dots(8)$$

しかるに $c_{11} = 1/E_x, c_{22} = 1/E_y, c_{12} = c_{21} = -\nu_x/E_x = -\nu_y/E_y$ であるから、下地材料の主ひずみ差はつぎのようになる。

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2)_M = \frac{1 + \nu_x}{E_x} \sigma_{1M} - \frac{1 + \nu_y}{E_y} \sigma_{2M} \dots\dots\dots(9)$$

一方皮膜の主ひずみ差は(2)式より、

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2)_c = \frac{1 + \nu_c}{E_c} (\sigma_1 - \sigma_2)_c \dots\dots\dots(10)$$

皮膜が下地材料の表面に完全に付着し、正確に下地材料のひずみ状態に従うものと考えれば、 $(\epsilon_1 - \epsilon_2)_M = (\sigma_1 - \sigma_2)_c \times (1 + \nu_c)/E_c$ であるから、つぎの関係をうる。

$$\frac{1 + \nu_x}{E_x} \sigma_{1M} - \frac{1 + \nu_y}{E_y} \sigma_{2M} = \frac{1 + \nu_c}{E_c} (\sigma_1 - \sigma_2)_c \dots\dots\dots(11)$$

しかるに光弾性しま次数 N と主応力差との関係は(5)式で与えられるから、上式はつぎのように書ける。

$$\frac{1 + \nu_x}{E_x} \sigma_{1M} - \frac{1 + \nu_y}{E_y} \sigma_{2M} = \frac{N}{2tK} \dots\dots\dots(12)$$

ここに

$$K = \alpha \frac{E_c}{1 + \nu_c} \dots\dots\dots(13)$$

もし自由境界において、その接線方向が異方性の弾性主軸の一方と平行するときは、主応力のいずれかが0になる。しかるときは周辺応力 $\sigma_{1M}(\sigma_{2M} = 0)$ の場合は皮膜におけるしま次数 N から次式によって求まる。

$$\sigma_{1M} = \frac{E_x}{2tK} N = \frac{E_x(1 + \nu_c)}{E_c(1 + \nu_x)} \cdot \frac{N}{2t\alpha} \dots\dots\dots(14)$$

つぎに一般に下地材料に生ずる主応力の方向が異方性の対称軸と傾斜している場合を考える。いま主応力 σ_1 の方向が x 軸から φ だけ傾いた方向にあるものとする(図-1参照)。しかるときは主ひずみはつぎのように主応力 (σ_1, σ_2) で与えられる⁹⁾。

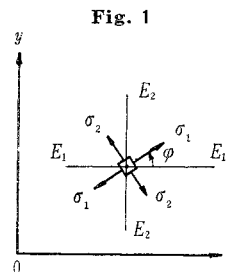


Fig. 1

$$\begin{aligned} \epsilon_1 &= [c_{11} \cos^4 \varphi + c_{22} \sin^4 \varphi + (2c_{12} + c_{66}) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi] \sigma_1 \\ &\quad + [c_{12} + \{c_{11} + c_{22} - (2c_{12} + c_{66})\} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi] \sigma_2 \\ &= \left\{ \frac{1}{E_x} \cos^4 \varphi + \frac{1}{E_y} \sin^4 \varphi - \left(\frac{2\nu_x}{E_x} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right\} \sigma_1 \\ &\quad + \left[-\frac{\nu_x}{E_x} + \left\{ \frac{1}{E_x} + \left(\frac{2\nu_x}{E_x} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right\} \sigma_2 \right. \\ \epsilon_2 &= [c_{12} + \{c_{11} + c_{22} - (2c_{12} + c_{66})\} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi] \sigma_1 \\ &\quad + [c_{11} \sin^4 \varphi + c_{22} \cos^4 \varphi + (2c_{12} + c_{66}) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi] \sigma_2 \\ &= \left[-\frac{\nu_x}{E_x} + \left\{ \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \left(\frac{2\nu_x}{E_x} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right\} \sigma_1 \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2\nu_x}{E_x} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right] \sigma_1 + \left\{ \frac{1}{E_x} \sin^4 \varphi + \frac{1}{E_y} \cos^4 \varphi \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{2\nu_x}{E_x} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right\} \sigma_2 \dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

従って下地材料の主ひずみ差は

$$\begin{aligned} (\epsilon_1 - \epsilon_2)_M &= \left[\frac{1}{E_x} \{ \cos^4 \varphi - \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi (1 + 4\nu_x) + \nu_x \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E_y} \{ \sin^4 \varphi - \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{G_{xy}} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right] \sigma_{1M} - \left[\frac{1}{E_x} \{ \sin^4 \varphi \right. \\ &\quad \left. - \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi (1 + 4\nu_x) + \nu_x \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{E_y} \{ \cos^4 \varphi - \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{G_{xy}} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right] \sigma_{2M} \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

とくに自由境界においては $\sigma_1 = 0$ あるいは $\sigma_2 = 0$ であるから、いま $\sigma_2 = 0$ とすれば、

$$\begin{aligned} (\epsilon_1 - \epsilon_2)_M &= \left[\frac{1}{E_x} \left\{ \frac{1}{2} (1 + 2\nu_x) \cos^2 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{E_y} \frac{(1 - \cos 2\varphi) \cos 2\varphi}{2} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{G_{xy}} \cdot \frac{\sin^2 2\varphi}{2} \sigma_{1M} \dots\dots\dots(17)$$

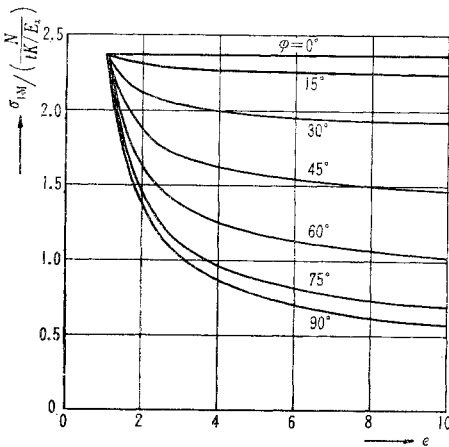
上式で E_x, E_y, ν_x, G_{xy} は直交異方性板に対してそれぞれ独立な弾性常数であり、各材料について実験的に決定されねばならないものであるが、一般に G_{xy} の測定は面倒であるので、その中せん断弾性係数がその方向に無関係であると仮定すれば、 $1/G_{xy}=1/E_x+1/E_y+2\nu_x/E_x$ で近似的に G_{xy} がほかの3つの常数で表わされる⁷⁾。この関係を用いると、(17)式で与えられている下地材料の主ひずみ差は光弾性皮膜のそれと等しくなることより、自由境界における主応力 σ_{1M} は次式のごとく光弾性し主次数より求められる。

$$\sigma_{1M} = \frac{N \cdot E_x}{tK} \left\{ \left[(1+2\nu_x) \cos^2 2\varphi + \cos 2\varphi \right] - \frac{1}{e} (1-\cos 2\varphi) \cos 2\varphi + \left(1 + \frac{1}{e} + 2\nu_x \right) \sin^2 2\varphi \right\} \dots\dots\dots(18)$$

ここに $e=E_y/E_x$

上式で K は (13) 式で与えられるものと同じである。従って K, t は使用する皮膜に対して定まる数であるから、しま次数の測定値 N より自由境界における応力を求めることができる。いま $\nu_x=0.18$ (実験に用いた模型に対する値) なる値を用いて (18) 式より $\sigma_{1M}/(NE_x/tK)$ と e との関係を計算し、主応力の x 軸に対する傾き φ をパラメーターとして図示すると 図-2 のようになる。

Fig. 2



3. 直交異方性材料および光弾性皮膜材料

異方性材料としては母材にエポキシ樹脂を用い、その中に一方向に金属線(鋼線あるいは真ちゅう線)を規則正しく入れたものを使用した。いま 図-3 のごとき合成材(異方性材)の断面を考え、母材部分の弾性係数および断面積を E_I, A 、金属線の弾性係数を E_{II} 、その1本の断面積を a とする。合成材の全断面積 $A_0=bd$ 中の金属線の本数を n 本とし、 $e=E_{II}/E_I$ とおくと金属線に平行

な方向 (y 軸方向) が一つの弾性主軸になり、 E_y はつぎのようになる。

$$E_y = E_I \left\{ 1 + \frac{na(e-1)}{bd} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

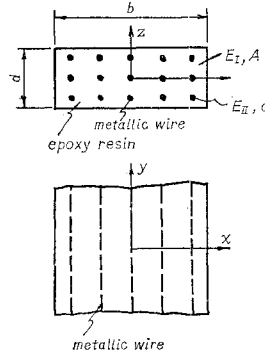
従って、

$$E_x = E_I \dots\dots\dots(20)$$

とみなすと、主弾性係数比 e はつぎのように与えられる。

$$e = E_y/E_x = 1 + \frac{na(e-1)}{bd} \dots\dots\dots(21)$$

Fig. 3



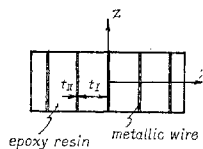
一方つぎのような異方性材料をつくり、実際にその試験片により測定を行なって主弾性係数 E_y を求めた。すなわち断面積 2.5×2.0 cm、長さ 21.0 cm の型わく内に直径 1 mm の鋼線をそれぞれ 10 本 (5 本 2 列)、 20 本 (10 本 2 列)、 30 本 (10 本 3 列) 規則正しく配列し、さらにその中に

エポキシ樹脂(アラルダイト type D) を注入して合成材(異方性材)の試験片を成型した。この場合 $E_I=4.2 \times 10^4$ kg/cm²、 $E_{II}=2.1 \times 10^6$ kg/cm² であって $e=50$ となった。この値を用いて (19) 式より計算した E_y の値と、上記の試験片より長さ 6 cm の圧縮試験片を切り出し、アムスラー型試験機によってその縦方向(金属線に平行な方向)に圧縮試験を行なって得た値を示せば表-1 のようになる。この場合弾性係数の測定には抵抗線ひずみ計が用いられ、同時に横方向のひずみも測定されてポアソン比が求められた。表-1 よりわかるように合成材の全断面積に対する金属線の全断面積の占める割合が大きいにかぎり、(19) 式あるいは (21) 式を用いて合成材の弾性係数を見ることが出来る。

Table 1

test piece	numbers of metallic wire	E_y (kg/cm ²)	
		value by test	value by calculation
No. 1	10	7.24×10^4	7.36×10^4
No. 2	20	1.059×10^5	1.066×10^5
No. 3	30	1.743×10^5	1.411×10^5

Fig. 4



つぎに 図-3 の断面図において金属線の x 方向の各列をそれらの面積に等しい帯状のものにおきかえ、図-4 のごとき考えると、ポアソン比 ν_y はつぎのような式で与えられる。

$$\nu_y = \frac{t_I \nu_I + t_{II} \nu_{II}}{t_I + t_{II}} \dots\dots\dots(22)$$

この式を用いて前記の3種の試験片に対するポアソン比を計算するとつぎのようになる。ただしこの場合エポキシ樹脂のポアソン比は $\nu_1=0.37$ であり、鋼線のそれは $\nu_{II}=0.20$ である。また同時にさきの圧縮試験片による実測によって得たポアソン比を記す(表-2)。ポアソン比に関しても金属線数が全断面積に対してあまり大きくない限り、測定値と計算値はかなりよく一致し、上記の計算によって求めた ν_y の値を実験において用いてもよく、また金属線が少ない場合には ν_y は母材のポアソン比とほとんど変わらないことがわかる。

Table 2

test piece	numbers of metallic wire	ν_y	
		value by test	value by calculation
No. 1	10	0.368	0.366
No. 2	20	0.357	0.361
No. 3	30	0.294	0.359

さて実験に用いられた異方性板はつぎのようにして作られた。まず(21)式より板がその中で成型されるべき型わく断面に対する金属線の直径および本数と主弾性係数比 $e=E_y/E_x$ の関係が求められる。この場合型わくには $15 \times 15 \times 1.3$ cm の鋼製のものが用いられ、金属線としては $\phi 1$ mm および $\phi 2$ mm の鋼線、 $\phi 2$ mm の真ちゅう線を用いて、 $e=2$ および 4 になるようにこれらの金属線を必要な本数だけ準備し、それらの表面をサンドペーパーで少し粗くするとともにアセトンで汚れをふき、その後型わく内に1列ないし3列に等分布に配置して固定し、その中へエポキシ樹脂(タイプD)を注入して常温(18~20°C)で成型した。つづいて十分に硬化した異方性板はさらに50~60°Cの恒温槽中で数時間キュアリングされた。

光弾性皮膜材料としては、河田氏がその具備すべき性質について述べ、epoxy-polysulfide系共重合体(通称 epoxy rubber) がかなりすぐれていることを指摘している。そしてこの epoxy rubber の特性についての研究結果が報告されている。著者らは光弾性皮膜として厚み2 mm の epoxy rubber の薄板で、その共重合比がつぎのようなものを用いた。

epoxy prepolymer (Araldite Type D)	100	} 重量比
polysulfide (Tiokol)	50	
diethylene triamine (DTA)	8	

これら3つのものをあわが入れないようによく混合して、 $15 \times 15 \times 0.2$ cm の鋼製型わくの中に注入し、室内(15~20°C)に24時間放置し、十分に固まったあと型わくより取りはずし、その後40~50°Cの恒温そう中でガラス板上に水平においてキュアリングを完成させた。このようにして注型により薄板を作る場合には十分に均一な厚さの皮膜が作られるが、型わくの端縁部では収縮のためにいくぶん厚みを減ずるから、その部分はカットされて用いられた。

河田氏の測定結果によると、この材料の諸性質はつぎのごとく与えられている。しかし epoxy rubber を光弾

strain optical coefficient β (1/mm)	Young's modulus E (kg/mm ²)		maximum elongation ϵ_{max} (%)	
$T=16.5^\circ\text{C}$, $\lambda=5461 \text{ \AA}$	$T=18^\circ\text{C}$	$T=11.5^\circ\text{C}$	$T=18^\circ\text{C}$	$T=11.5^\circ\text{C}$
41.3	40	56	—	10

性皮膜として実際に使用した結果、epoxy rubber の弾性係数および光弾性感度が温度によってかなり変化を受けること、および Tiokol の性質が製品によってかなり異なることなどにより、epoxy rubber の特性がはっきり定められず、円孔周辺の応力の絶対値を正確につかむには各試験片のそれぞれについて、測定時と同じ条件のもとで弾性性質および感度を測定することが必要であった。

皮膜材料の弾性係数および光弾性感度はつぎのようにして測定された。まず弾性性質を測定するために、さきの異方性材料の場合と同様に断面積 2.5×2.0 cm、長さ21.0 cm の型わく内に前述の重量比で epoxy rubber を注型し、キュアリングを完成したのち抵抗線ひずみ計を用い、アムスラー型万能試験機で引張試験を行なって、弾性係数およびポアソン比を測定した。つぎに光弾性感度に対しては、厚み6 mm の板を鋼製型わくでキャストし、それより巾2 cm、長さ15 cm の試験片を作り、光弾性装置中で引張試験を行なって、皮膜の光弾性感度を測定した。なおこれらの測定は10~15°Cの温度の室内で行なわれた。本実験は10~15°Cの室温中で行なわれ、実験時における温度に多少の差異があったが、応力解析にはつぎの各定数が用いられた。

$$E_e = 5500 \text{ kg/cm}^2 \text{ (15}^\circ\text{C)}, \nu_e = 0.40 \text{ (15}^\circ\text{C)}, \\ \alpha = 1.90 \text{ mm/kg (11}^\circ\text{C)}$$

4. 実験方法および反射式光弾性装置

円孔を有する直交異方性板の模型はつぎのようにつくられた。まず上に述べたようにしてキャストされた異方性板より、荷重方向に対する主弾性係数の方向が種々異なるように、すなわち金属線の方向(大きい主弾性係数の方向)が水平方向(荷重線の方向)に対して、 0° , 22.5° , 45° , 67.5° , 90° になるようにして板を切り出し、1辺が約10 cmの正方形にミーリングカッターで仕上げた。ついでその中央にドリルで2, 3回にわたって直径12 mmの孔をあけ、その後その板の一方の表面にアルミはく(箔)および光弾性皮膜をはりつけ、その接着が完了したのち、異方性板の円孔をガイドにして皮膜のはられている面の反対側から皮膜に直径12 mmの孔をあけた。このようなさく孔方法を用いたのは、孔をあける以前に皮膜を下地材料に接着させておくと、さく孔時の熱によって皮膜に初期応力を生ぜしめるためである。このようにして作製された模型板はさらに下地材料、アルミはく

および皮膜などの接着を完全にするために約 50°C の恒温槽中に 4~5 時間入れ、その後載荷実験するまで室内に放置された。

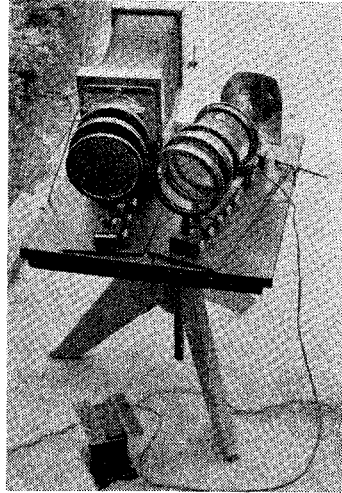
通常皮膜法が適用されている場合のごとく下地材料が金属の場合には、それらの金属表面を十分に磨いておけば、直接皮膜をはりつけても金属表面がよい反射面を作ってくれるが、下地材料が木材やコンクリートあるいはこの場合のごとくある程度透明なものである場合には、下地材料と皮膜の間には光を反射させる層が必要である。これには普通金属はくが用いられており、この実験においてもできるかぎり薄くてなるべく取り扱いの容易なものとして、厚さが 0.009 mm のアルミはくを選んだが、接着後はくのはわをある程度除くことができなかつた。皮膜は異方性板の中央の円孔をおおむに十分な大きさのものとして、7×7 cm の正方形のものが用いられた。つぎにアルミはくおよび皮膜の板への接着方法は、まず皮膜にアルミはくをエポキシ樹脂（アラルダイト・タイプ D）を用いて接着し、ガラス板上で皮膜上面より加圧して両者の間の気泡および余分の接着剤樹脂を排除し、しかるのちアルミはくと異方性板とを同じ要領で接着した。

この方法ではさきにも少し述べたように反射面として用いるアルミはくにいくぶんしわを生ずるから、等色線写真を多少見にくくする恐れはあるが、写真を見れば明らかに皮膜に現われる等色線しまをかくらんするほどの大きい影響を与えるものではない。反射面をさらに良好にするために皮膜裏面あるいは下地材料表面にアルミの真空定着を施すことが考えられるが、それらの過程において皮膜の弾性性質や光弾性感度および下地材

料の弾性性質などに変化を生ずる場合には、その影響を測定する必要が生ずる。それでここでは一応アルミはくを用いることにした。

上述のごとく作られた円孔を有する異方性板の模型は、載荷板との接触が一樣になるようにその両荷重縁が十分に磨り合わされたのち、島津式 30 t アムスラー型

Photo. 1



万能試験機によって、上下縁に等分布荷重がかけられ、荷重時の光弾性応力しまが反射式光弾性装置を用いて撮影された。実験に用いられた反射式光弾性装置は河田氏⁹⁾の試作したものと同型のもので、とくに測定視野および倍率をなるべく大きくし、かつ装置の大きさおよび重量を

小さくするために、光学系の全長を小さくして、口径を大きくするようにした。製作した装置の概要を示せば図-5 および写真-1 のようである。

5. 実験結果およびその考察

実験によって得た等色線しま写真の二、三の例を示せば、写真-2 (a)~(e) および写真-3 (a)~(e) のようである。前者は真ちゅう線を用いた $E_z/E_1=2$ の模型に対するものであり、後者は鋼線および真ちゅう線を用いた $E_z/E_1=4$ の模型に対するものである。これらの等色線しまより各円孔の周辺におけるしま次数の分布を求め、(18)式あるいは図-2を用いて円孔周辺の応力値が算定されるが、この場合 $E_1=E_x=4.2 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $E_c=5.5 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$, $\nu_c=0.40$, $\alpha=1.90 \text{ mm/kg}$, $t=2 \text{ mm}$ の値を用いれば、 $tK=149.2$ であって、その結果円孔周辺応力分布は図-6 (a)~(e) および図-7 (a)~(e) のように求められる。ここでは皮膜の厚みをキャストされた薄板の厚みそのままの 2 mm にとって応力を算定しているが、緻密には皮膜を接着するときの接着剤層の厚みも光弾性効果を与えるであろう。従ってその層の厚みを考慮すべきであって、その厚さは通常 0.05~0.3 mm 程度になるようであるが、ここでは省略された。図-6 は $e=2$ の場合、図-7 は $e=4$ の場合である。なお比較のために Lechnizki, S.G. の与えている円孔周辺応力に対する理論式を用いて計算を行なった結果⁹⁾ も同時に示されている。ここに示されている理論計算による応力

Fig. 5 Reflection plariscopes.

- S: Source of light (Super high pressure mercury lamp SHL 100 V)
- R: Reflecting mirror (radius: 100 mm), L_1 : Condensing lens ($f=150 \text{ mm}$, $\phi 150 \text{ mm}$), P_1, P_2 : Polaroid ($\phi 150 \text{ mm}$), Q_1, Q_2 : A quarter wave plate ($\phi 150 \text{ mm}$),
- G: Heat-proof glass plate ($\phi 150 \text{ mm}$), F: Filter ($\phi 150 \text{ mm}$), L_2 : Camera lens ($f=300 \text{ mm}$, $F=4.5$),
- B: Camera

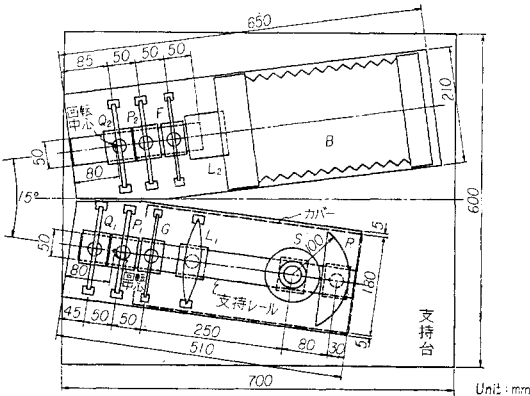
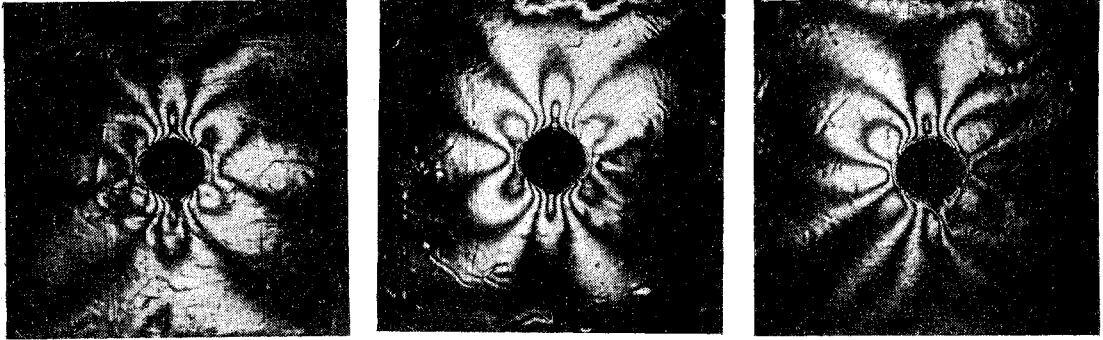
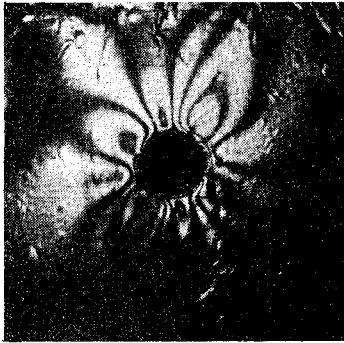
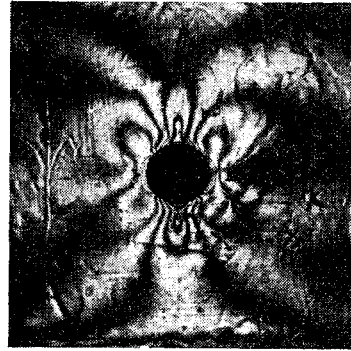
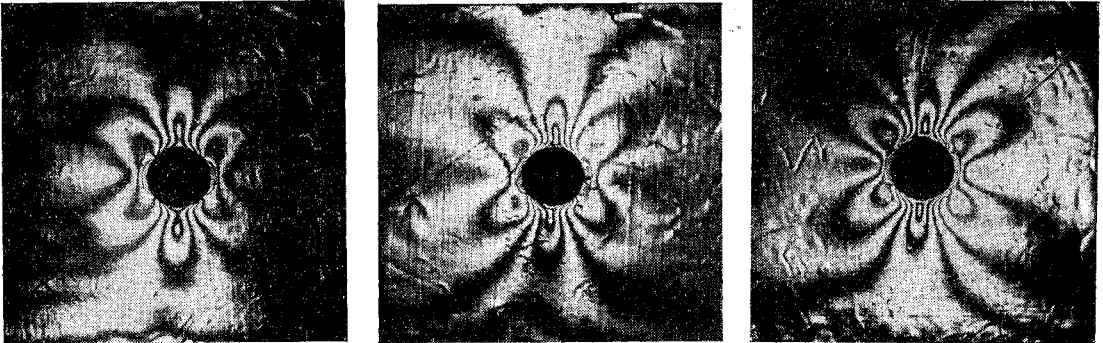
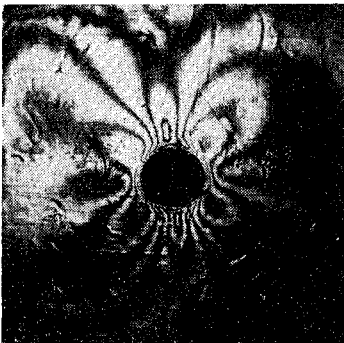
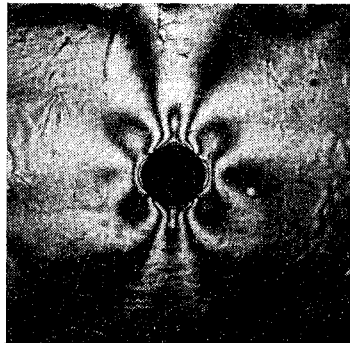


Photo. 2

(a) $\delta=0^\circ$ $p=272.3 \text{ kg/cm}^2$ (b) $\delta=22.5^\circ$ $p=308.9 \text{ kg/cm}^2$ (c) $\delta=45^\circ$ $p=269.7 \text{ kg/cm}^2$ (d) $\delta=67.5^\circ$ $p=423.3 \text{ kg/cm}^2$ (e) $\delta=90^\circ$ $p=426.0 \text{ kg/cm}^2$ Photo. 3 $E_2/E_1=4$ (a) $\delta=0^\circ$ $p=267.6 \text{ kg/cm}^2$ (b) $\delta=22.5^\circ$ $p=269.4 \text{ kg/cm}^2$ (c) $\delta=45^\circ$ $p=310.4 \text{ kg/cm}^2$ (d) $\delta=67.5^\circ$ $p=383.8 \text{ kg/cm}^2$ (e) $\delta=90^\circ$ $p=543.3 \text{ kg/cm}^2$

分布は、いずれも計算の便宜上 $\nu_x=0$ と仮定され、従ってせん断弾性係数 G_{xy} が $1/G_{xy}=1/E_x+1/E_y$ で与

えられるような場合に対して行なわれているものである。

Fig. 6 $e=E_2/E_1=2.0, tK=149.2$

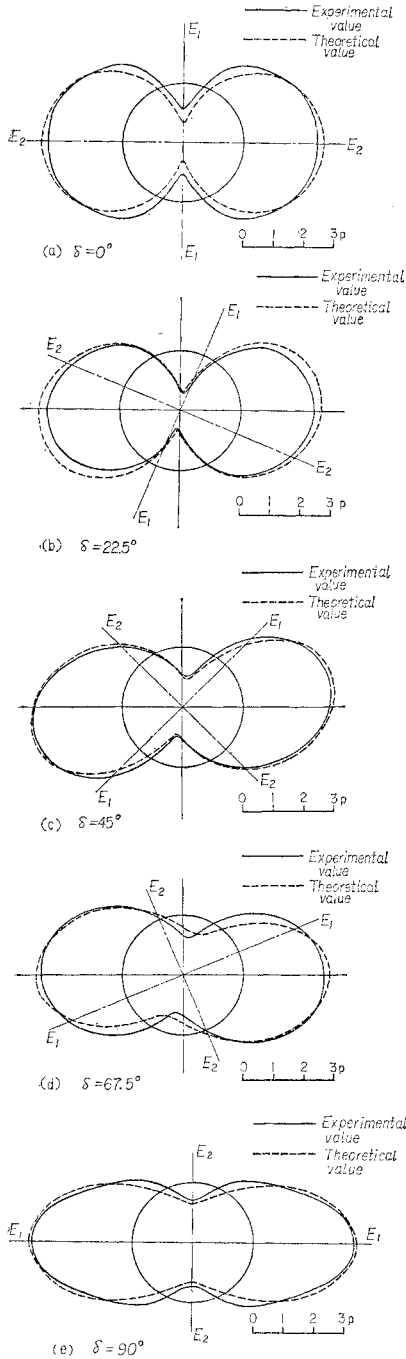
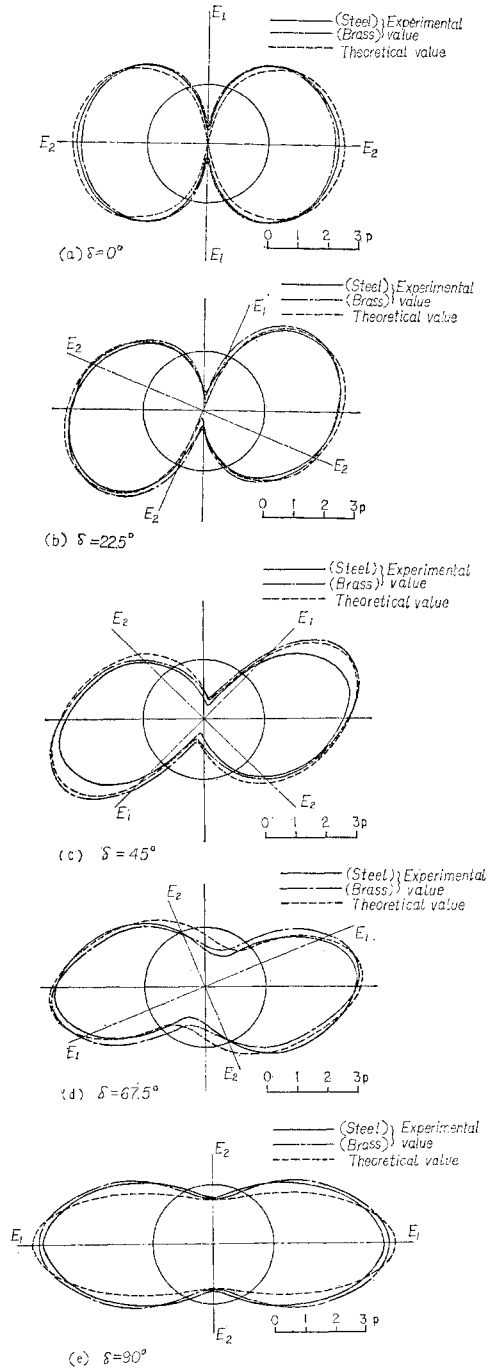


Fig. 7 $e=E_2/E_1=4.0, tK=149.2$



これらの図より実験値と理論値を比較すれば、いずれの場合にも応力分布の傾向はまったく類似しているが、一般に側方周辺の圧縮応力はかなりよく一致するのに対して、上下周辺における引張応力はその大きさおよび引張応力の生ずる範囲ともかなりの差異がある。そして側方周辺、上下周辺における最大応力は実験値の方が理論値より小さくでる傾向にある。この両者の応力分布の

差異を生ずる原因としてはいろいろのものが考えられる。すなわちまず理論計算では異方性材料のポアソン比 ν_x を 0 と仮定しているのに反して、実験に用いた材料は $\nu_x=0.18$ であること、皮膜材料の性質が温度に対して不安定であり、測定時の α, E_c, ν_c の正しい値をつかみにくく、従って応力解析に用いるべき係数 K の値に誤差が入りやすいこと、異方性材料の弾性係数として材

料作製時の値を用い、またせん断弾性係数も近似値を用いて、実際に作られた材料に対するそれらの測定値を用いていないことによる誤差が入ってくる、皮膜の弾性係数が板におよぼす影響（これは異方性板のひずみの程度によって異なり、弾性ひずみ領域では無視される）などが考えられる。従って図-6,7 に示した実験値と理論値とは直接定量的な比較をすることはできないが、定性的な応力分布の傾向を比較することはできるであろう。なお図-7で補強材として鋼線をを用いた場合と真ちゅう線を用いた場合の応力分布が比較されるが、ときにはかなりの相違もみられるが、大体において両者はよく一致していることがわかる。

6. 結 語

以上で光弾性皮膜法の直交異方性弾性板への適用について述べ、実験の一例として円孔を有する異方性板が一軸方向に等分布荷重を受ける場合についての結果を示した。すなわちまず円孔周辺におけるごとく自由境界上での応力値を光弾性皮膜におけるしま次数 N から算定するための式 (18) を導いた。つぎに直交異方性材料としてエポキシ樹脂を母材とし、金属線を補強材とする合成材を用いて、任意の主弾性係数比のものを作製しうることを示し、さらに光弾性皮膜の材料およびその弾性性質について言及した。また実験に用いた模型の作製方法が説明され、実験は $e = E_y/E_x = E_z/E_x = 2, 4$ の場合で、主弾性係数 E_1 の方向が荷重方向に対して $\theta = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ, 90^\circ$ 傾いた場合について行なわれ、反射式光弾性装置を用いて等色線しさを撮影した。

実験結果を解析して得た円孔周辺の応力分布を Lechnizki の理論式より求めた計算結果と比較してかなりよい結果を得た。図に示した実験および理論計算における応力分布は厳密には比較できないが、それぞれの場合の応力分布の傾向や荷重の方向（従って異方性の方向）が応力分布状態におよぼす影響はほとんど一致することから、このような実験が今後異方性板の応力解析に有効に利用され、とくに計算の困難な任意形状の孔の応力集中の問題にも適用されるものと思われる。なお著者らはすでに等大な2円孔をふくむ異方性板の応力集中に対する実験を行なっているので、あらためて報告する予定である。

しかしここに示した円孔周辺応力分布の差異について考察してみると、いろいろの点についてなお一層実験を進める必要があると考えられる。すなわち、(1)本実験で

は異方性板の応力-ひずみ曲線を降伏点まで求めなかったために、皮膜の弾性係数が下地材料の応力に影響をおよぼすひずみの限度を明らかにすることができなかった。従って各実験の載荷重（従ってひずみ）に対する皮膜の弾性係数の影響を明らかにするため、下地材料の応力-ひずみ曲線を降伏点以上まで求めること。(2) 光弾性皮膜の性質（弾性係数、ポアソン比および光弾性感度）が温度に対してかなり不安定であるため、測定時の値をできるかぎり正確につかむようにすること。(3) 異方性材料の弾性性質として、ここでは3で与えた計算式による値を用いたが、実際には作製された材料について測定を行なって得た値を用いれば誤差が小さくなるであろう。なおその場合しま次数よりの応力解析には (17) 式に示すように G_{xy} をふくんだ式を用いるようにすべきである。(4) 異方性材料として任意のものをうるための方法を示したが、主弾性係数比 e が大きくなって金属線数が多くなると e の測定値は理論値とかなり異なること、および極端に金属線数が少ない場合には金属線部分の応力集中が皮膜を通じて平均化されにくいことなどを考慮して、さらに良好な任意の異方性材料を作成することが必要である。これらのことについては今後さらに研究を進めるつもりである。

終りに本研究を行なうにあたりご助力いただいた日本保線協会に対して感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 林 毅 : 直交異方性材料の光弾性試験法と二、三の試験結果について、第3回材料試験連合講演会前副、昭34年9月、59 ページ
- 2) 林 卓夫 : 等価異方性板を用いる平面応力の実験、日本機械学会論文集 (第1部)、26-170、1320 ページ
- 3) 河田幸三 : 光弾性実験法、機械学会第118回講習会教材昭34年5月
- 4) 河田幸三・鈴木新副 : 実物光弾塑性解析用の光弾性皮膜について、科学研究所報告、33-4、昭32年7月
河田幸三・鈴木新副 : 実物光弾塑性解析用の光弾性カメラの試作について、科学研究所報告、33-4、昭32年7月
- 5) Oppel, G.U. : Photoelastic Strain Gages, Experimental Mechanics, March 1961, 65 ページ
- 6) 倉西正嗣 : 弾性学、日本機械学会、584 ページ
- 7) Sonntag, G. : Einfluß der Anisotropie auf die Beanspruchung des Gebirges in der Umgebung von Stollen, Der Bauingenieur 33, Heft 8, s. 288, 1958
- 8) 前出 3) 55 ページ
- 9) 前出 7),
川本脛夫 : 異方性弾性地山におけるずい道周辺応力状態および変形について、双設ずい道の離隔距離に関する研究報告、日本鉄道技術協会、昭35年3月
(原稿受付 : 1962.4.10)

A PHOTOELASTIC STUDY ON STRESS DISTRIBUTION AROUND A CIRCULAR HOLE IN ORTHOTROPIC PLATE

By Dr. Eng., Yoshiji Niwa, C.E. Member and Toshikazu Kawamoto, C.E. Member

Hitherto, Takeshi Hayashi reported the photoelastic method using some transparent orthotropic materials combined polyester resin and glass fiber and Takuo Hayashi explained some researches by the use of the equivalent orthotropic plate for the experimental studies on orthotropic plane stress. In this report, the authors mention the application of photoelastic coating method to the orthotropic plate and some experimental results on the states of stress around a circular hole in that plate. The practical technique of photoelastic coating method, first, was presented by M. Mesnager in 1930, and recently many investigators have studied to apply better this method for the purpose of measuring the states of strain of the specimen or the structural part within the plastic zone. In our country K. Kawata introduced in detail this method as a photoelasto-plastic analysis and reported the results of studying of the characteristics of epoxy-polysulfide copolymer (so called epoxy rubber) as the coating materials. In this method, coating*

*or membrane made of an optical strain-sensitive material is glued on the surface of the specimen of which states of strain should be transferred to the coating, and then the photoelastic fringe patterns are obtained by reflecting light on the surface of metallic foil between the specimen and the coating.

1. Application of Photoelastic Coating Method

The stresses of the specimen (the orthotropic plate) are obtained by the isochromatic fringe patterns produced in the coating as mentioned below. In general, we consider that the directions of principal stresses at a point of the plate are oblique to the principal axes of elasticity (in this case, we assume that these are agreed with the directions of x -and y -axes) and the angle between the direction of the principal stress σ_1 and x -axis is φ as Fig. 1, so the principal strains (ϵ_1, ϵ_2) are presented by the principal stresses (σ_1, σ_2) as follows,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \left\{ \frac{1}{E_x} \cos^4 \varphi + \frac{1}{E_y} \sin^4 \varphi - \left(\frac{2\nu_x}{E_x} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right\} \sigma_1 \\ &\quad + \left[-\frac{\nu_x}{E_x} + \left\{ \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \left(\frac{2\nu_x}{E_x} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \right\} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right] \sigma_2 \\ \epsilon_2 &= \left[-\frac{\nu_x}{E_x} + \left\{ \frac{1}{E_x} + \frac{1}{E_y} + \left(\frac{2\nu_x}{E_x} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right\} \sigma_1 \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{E_x} \sin^4 \varphi + \frac{1}{E_y} \cos^4 \varphi - \left(\frac{2\nu_x}{E_x} - \frac{1}{G_{xy}} \right) \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \right\} \sigma_2 \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2)_c = \frac{1 + \nu_c}{E_c} (\sigma_1 - \sigma_2)_c \dots\dots\dots (3)$$

where E_x and E_y are the principal modulus of elasticity; i.e., $E_1 = E_x$ and $E_2 = E_y$. Since σ_1 or σ_2 is equal to zero, particularly, on the boundary without external forces, now taking $\sigma_2 = 0$, the principal strain difference is given by Eq. (2) on the free boundary of the plate.

When the bond between the coating and the plate is enough and the thickness of the coating is small against the gradients of distribution of stress and strain, we can assume that the strain condition of the coating is all the same with the one on the surface of the plate, so we obtain the following relation for the principal strain differences,

$$\begin{aligned} (\epsilon_1 - \epsilon_2)_M &= \left[\frac{1}{E_x} \left\{ \frac{1}{2} (1 + 2\nu_x) \cos^2 2\varphi + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{E_y} \cdot \frac{(1 - \cos 2\varphi) \cos 2\varphi}{2} + \frac{1}{G_{xy}} \cdot \frac{\sin^2 2\varphi}{2} \right] \sigma_{1M} \end{aligned} \dots\dots\dots (2)$$

$$(\epsilon_1 - \epsilon_2)_M = (\epsilon_1 - \epsilon_2)_c \dots\dots\dots (4)$$

On the other hand, the principal strain difference in the coating is represented by the following expression :

The photoelastic fringe orders viewed by polarized light that is transmitted twice through the coating by reflecting on the surface of the plate,

taking that α (mm/kg) is optical sensitivity, are given as follows,

$$N = 2\alpha(\sigma_1 - \sigma_2)ct \dots\dots\dots (5)$$

and substituting Eqs. (2) and (3) in Eq. (4), and using Eq. (5), we find the expression for the principal stress $\sigma_{1,M}$ on the free boundary :

$$\sigma_{1,M} = \frac{N \cdot E_x}{tK} \sqrt{\left\{ (1 + 2\nu_x) \cos^2 2\varphi + \cos 2\varphi \right\} - \frac{1}{e} (1 - \cos 2\varphi) \cos 2\varphi + (1 + 1/e + 2\nu_x) \sin^2 2\varphi } \dots\dots\dots (6)$$

in which the approximate relation— $1/G_{xy} = 1/E_x + 1/E_y + 2\nu_x/E_x$ —is used, and taking $K = \alpha E_c / (1 + \nu_c)$. K is constant for the coating used, and e is the ratio of the principal moduli of elasticity; $e = E_y/E_x = E_y/E_x$. Now using $\nu_x = 0.18$ (a value to the plates used in experiments) and calculating the term in crotchets on the right side of Eq. (6), we find the relation as shown in Fig. 2.

2. Orthotropic Plate and Photoelastic Coating Material

The orthotropic plates are made of epoxy resin casted in the frame in which some metallic wires (steel or brass) are being set regularly in a fixed direction. We measured the elastic modulus and the Poisson's ratios of various test pieces for the orthotropic plates, and consequently we recognized that the tested values well agree with the theoretical values calculated by considering the composite materials, provided the ratio of the number of metallic wires to the sectional area of plate is not so large.

The epoxy rubbers, of which co-polymerized ratio is epoxy prepolymer (Araldyte Type D) : 100, polysulfide : 50, diethylene triamine : 8 in weight and thickness equals 2 mm, are used as

the coating. The characteristics of the coating are given by $E_c = 5\,500 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha = 1.90 \text{ mm/kg}$, $\nu_c = 0.40$ in this case.

3. Experimental Process and Consideration on Its Results

The square plates (10 cm \times 10 cm), in which $e = 2, 4$ and $\delta = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ, 90^\circ$ (δ is the inclination of E_x -direction to the loaded edge of the plate), are cut from the casted orthotropic materials, and the metallic foil and the coating are glued on the surface of the plates, and then a circular hole of radius 6 mm is made in the middle of each plate after getting firm bond. These plates are uniformly loaded by the universal testing machine (Amsler type 30 ton) and the isochromatic fringe patterns in the surroundings of the hole are photographed by the reflection polariscope.

Some examples of the isochromatic fringe pattern are shown in Photo. 2 (a)~(e) for $e = 2$ and in Photo. 3 (a)~(e) for $e = 4$. The stress distributions on the edge of the circular holes found by analyzing the fringe patterns are plotted as given in Figs. 6 and 7. Here, $E = 4.2 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $tK = 149.2$ and the theoretical results are shown together in order to compare. Comparing the experimental values of stress concentration with the theoretical ones, it can be explained that the effects of the orthotropic characteristics of the plates which act on the states of stress around the circular hole agree each other considerably well. Consequently, this experimental method will in future be able to be applied effectively to the stress analysis for the orthotropic plates with optional shaped hole.