

# 曲線直交異方性扇形平板の曲げについて\*

芳 村 仁\*\*

2辺が放射方向の直線辺、他の2辺(または1辺)が半径の異なる2個の円弧で境せられている平板(おおよび▽のような形のものを)を扇形平板と称することにす。

**要 旨** 本論文は厚さが一定で極方向( $r$ 方向)と接線方向( $\theta$ 方向)とで弾性の性質の異なる平板の曲げの基本微分方程式を誘導し、これに $\theta$ に関する有限 Fourier Sine 変換を施すことにより、これを扇形平板の解法に適用した場合、2個の直線辺が単純支持の場合に他の円弧辺(Circular edge)がいかなる境界条件をもっている、またいかなる連続的な荷重が作用していても解き得ることを示した。また具体的な問題として扇形平板に等分布荷重が満載された場合および集中荷重が作用した場合について解式を示しあわせて数値計算を行なった。扇形平板の曲げにその異方性がおよぼす影響をみるため、板剛度の比  $N_0/N_r$  が 0.25, 1.0 および 4.0 のおのおの場合についてたわみおよび断面力を求めその影響を明らかにした。また辺比の等しい矩形平板との比較も行なった。

## 1. ま え が き

直橋や斜橋に対し矩形平板および平行四辺形板の曲げの問題を直交異方性板の立場から解析することが行なわれている。曲線橋を平板構造としてみると、これは扇形平板ともいべき形状をなしている。この扇形平板の曲げに関する研究は従来なされていないので筆者はまず極座標を採用した場合の曲線直交異方性板の曲げの基本微分方程式を誘導しそれを出発点としてこの平板を力学的に検討する。

## 2. 曲線直交異方性板の曲げの基本微分方程式の誘導

座標は極座標を採用する。 $r$ 方向と $\theta$ 方向とで弾性係数を異にする平板において、 $r, \theta$ 方向の弾性係数を  $E_r, E_\theta$ , ポアソン比を  $\nu_r, \nu_\theta$ , せん断弾性係数を  $G$  とすると次の関係が成立つ。

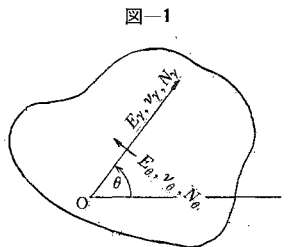


図-1

$$\frac{E_r}{\nu_r} = \frac{E_\theta}{\nu_\theta} \dots\dots\dots (1)$$

$r, \theta$  方向のひずみ  $\epsilon_r, \epsilon_\theta$  および  $r$  と応力度  $\sigma_r, \sigma_\theta$  および  $\tau_{r\theta}$  の間には

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_r}{E_r} - \nu_\theta \frac{\sigma_\theta}{E_\theta}, \epsilon_\theta = \frac{\sigma_\theta}{E_\theta} - \nu_r \frac{\sigma_r}{E_r}, \gamma_{r\theta} = \frac{\tau_{r\theta}}{G} \dots\dots\dots (2)$$

が成りたつので

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E_r}{1-\nu_r\nu_\theta} (\epsilon_r + \nu_\theta\epsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E_\theta}{1-\nu_r\nu_\theta} (\epsilon_\theta + \nu_r\epsilon_r) \\ \tau_{r\theta} &= G\gamma_{r\theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

他の平板の曲げの問題のときと同じように微少変形理論の範囲内で論ずることにし、板の厚さは他の寸法に比し非常に小であると、荷重は面に垂直に作用する場合のみを考え、また中立面ののり線上の点は変形後も弯曲した中立面ののり線上にあるという仮定を設ける。 $z$  を中立面からの距離、 $w$  をたわみとすると

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \epsilon_\theta = -z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ \gamma_{r\theta} &= -2z \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{z E_r}{1-\nu_r\nu_\theta} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ \sigma_\theta &= -\frac{z E_\theta}{1-\nu_r\nu_\theta} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ \tau_{r\theta} &= -G\gamma_{r\theta} = -Gz \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

曲げモーメントを  $M_r, M_\theta$ , ねじりモーメントを  $M_{r\theta}$  および  $M_{\theta r}$  とし  $h$  を板厚とするとこれらは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_r z dz, & M_\theta &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\theta z dz \\ M_{r\theta} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{r\theta} z dz, & M_{\theta r} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\theta r} z dz \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

これらの式に(5)式を代入すると

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N_r \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -N_\theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ M_{r\theta} &= M_{\theta r} = -(1-\nu) N \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

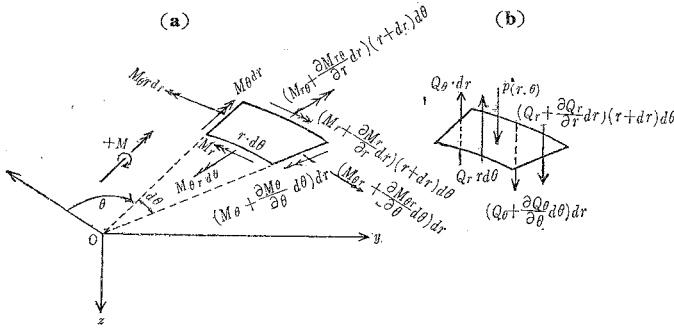
となる。ただし

$$N_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_r\nu_\theta)}, N_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r\nu_\theta)}, (1-\nu)N = \frac{Gh^3}{6} \dots\dots\dots (8)$$

次に図-2のように極座標において平板の微小扇形部分をとりだして  $r$  方向と  $\theta$  方向および  $z$  方向の力の釣

\* 一部は土木学会北海道支部「技術資料」No. 17 (昭和36年2月)に発表  
\*\* 正員 工修 北海道大学助教授 工学部土木工学科

図-2



合い式を高次の微小項を無視して求めると結局、せん断力  $Q_r, Q_\theta$  は

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{M_r - M_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \\ Q_\theta &= \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} + \frac{M_{r\theta} + M_{\theta r}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(9)$$

$\alpha$  方向の釣合いは荷重を  $p$  とすると

$$-p = \frac{\partial Q_r}{\partial r} + \frac{1}{r} Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \dots\dots\dots(10)$$

(9) を (10) に代入すると

$$p = -\frac{\partial M_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} \dots\dots\dots(11)$$

これに (7) を代入すれば、途中の計算を省略し、結果のみかくと次のようになる。

$$p = N_r \left( \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} \right) + N_r \nu_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} \right) - \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + N_\theta \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) + \frac{2}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + N_\theta \nu_r \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \right) + N(1-\nu) \left( \frac{2}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} \right) \dots\dots\dots(12)$$

さらにかき直すと

$$p = N_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{(2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r)}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{[N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2N(1-\nu)]}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} - \frac{2[N_r \nu_\theta + N(1-\nu)]}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{2[N_\theta + N(1-\nu) + N_r \nu_\theta]}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{N_\theta}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{N_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{N_\theta}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \dots\dots\dots(13)$$

(13) 式が求める基本微分方程式である。これは直交曲線座標(この場合は極座標)の各軸がその点での直交異方性の軸と一致する場合で、いわゆる曲線直交異方性(Curvilinear orthotropy)の一例とみる事ができよう。

この微分方程式を解いてたわみ  $w(r, \theta)$  を求めると、断面力のうち、曲げモーメントおよびねじりモーメント  $M_r, M_\theta$  および  $M_{r\theta}$  は (7) 式から、せん断力  $Q_r, Q_\theta$

は (9) 式から、また反力  $V_r$  および  $V_\theta$  は次式から求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} V_r &= Q_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} \\ V_\theta &= Q_r + \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

なお、 $E_r = E_\theta = E, \nu_r = \nu_\theta = \nu, G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  とすると

$$N_r = N\theta = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = N$$

となり (12) 式は

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \Delta \Delta w = \frac{p}{N} \dots\dots\dots(15)$$

となり等方性板の曲げの微分方程式と一致する。

### 4. 有限 Fourier Sine 変換

変数  $x$  のある有限区間上で、部分的に連続な関数  $F(x)$  のその区間上 ( $0 < x < \pi$ ) の Fourier Sine 変換を  $S\{F(x)\}$  で表わすと、これは  $F(x)$  の有限 Fourier Sine 変換と呼ばれる関数  $f_s(n)$  を生ずる。すなわち、

$$S\{F(x)\} = \int_0^\pi F(x) \sin nxdx = f_s(n) \dots\dots\dots(16)$$

となる。区間  $0 < x < l$  上の関数の変換は  $\xi = \frac{\pi x}{l}$  を代入すれば得ることができる。

次に変換の演算子的特性は、偶数次の導関数については  $F(x)$  の微分は変換  $f_s(n)$  について簡単な代数的演算に対応する。例えば

$$\left. \begin{aligned} S\{F''(x)\} &= -n^2 S\{F(x)\} + n[F(0) - (-1)^n F(\pi)] \\ S\{F''''(x)\} &= n^4 S\{F(x)\} - n^2 [F(0) - (-1)^n F(\pi)] \\ &\quad + n[F''(0) - (-1)^n F''(\pi)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

### 5. 扇形平板の曲げ

(13) 式は  $r, \theta$  に関する 4 階の偏微分方程式であるから、これに区間  $0 < \theta < \alpha$  で  $\theta$  に関する有限 Fourier Sine 変換を適用する。 $w_s(r, \beta)$  を  $w(r, \theta)$  の有限 Sine 変換、

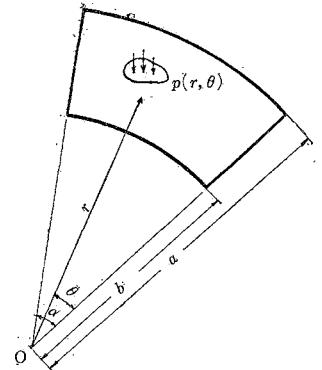
$$\beta = \frac{n\pi}{\alpha}$$

$\alpha$  = 中心角 (図-3)

とし、(12) 式の各項に変換を施すと結局次のようになる。

$$N_r \frac{d^4 w_s(r, \beta)}{dr^4} + \frac{[2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r]}{r} \frac{d^3 w_s(r, \beta)}{dr^3}$$

図-3



$$\begin{aligned} & \frac{[N_\theta + \beta^2(N_r\nu_\theta + N_\theta\nu_r + 2N(1-\nu))]}{r^2} \frac{d^2 w_s(r, \beta)}{dr^2} \\ & + \frac{[N_\theta + \beta^2(2N_r\nu_\theta + 2N(1-\nu))]}{r} \frac{dw_s(r, \beta)}{dr} \\ & + \frac{[\beta^2 N_\theta - \beta^2[2N_\theta + 2N_r\nu_\theta + 2N(1-\nu)]]}{r^4} w_s(r, \beta) \\ = & S\{p(r, \theta)\} + \frac{[N_r\nu_\theta + N_\theta\nu_r + 2N(1-\nu)]}{r^2} \\ & \times \beta \left\{ (-1)^n \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]_{\theta=\alpha} - \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\theta=0} \right\} \\ & - \frac{2[N_r\nu_\theta + N(1-\nu)]}{r} \beta \left\{ (-1)^n \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\theta=\alpha} - \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\theta=0} \right\} \\ & + \frac{[2N_\theta + 2N_r\nu_\theta + 2N(1-\nu) - \beta^2 N_\theta]}{r^4} \beta \{ (-1)^n w(r, \alpha) - w(r, 0) \} \\ & - \frac{\beta}{r^4} \left\{ (-1)^n \left[ \frac{M_\theta}{N_\theta} \right]_{\theta=\alpha} + r \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\theta=\alpha} + \nu_r \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]_{\theta=\alpha} \right. \\ & \left. - \left[ \frac{M_\theta}{N_\theta} \right]_{\theta=0} + r \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\theta=0} + \nu_r \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]_{\theta=0} \right\} \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

(18)式の右辺第一項は与えられた荷重の有限 Fourier Sine 変換であり第二項以下には扇形平板の  $\theta=0$  および  $\theta=\alpha$  におけるそれぞれの境界条件が入っており、この2直線辺が単純支持の場合はすべて0となり第一項のみが残る。

(18)を解いて  $w_s(r, \beta)$  が求まれば求まるたわみ  $w(r, \theta)$  は  $w_s(r, \beta)$  の逆変換として次のように決定される。

$$w(r, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} w_s(r, \beta) \cdot \sin \beta \theta \dots\dots\dots(19)$$

ただし

$$\beta = \frac{n\pi}{\alpha}, \quad n=1, 2, 3, \dots\dots\dots$$

さてねじりモーメント  $M_{r\theta}$  は  $-N(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$  と表わされるが、この  $N, \nu$  の代りにそれぞれの直交軸方向に対する板剛度およびポアソン比で次のように表わす。

$$M_{r\theta} = -(1 - \sqrt{\nu_r\nu_\theta}) \sqrt{N_r N_\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots(20)$$

今

$$\begin{aligned} Q_r = & -N_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} (N_\theta \nu_r - N_r \nu_\theta - N_r) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} N_\theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^3} [N_\theta + N_r \nu_\theta + (1 - \sqrt{\nu_r \nu_\theta}) \sqrt{N_r N_\theta}] \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ Q_\theta = & -\frac{1}{r^2} N_\theta \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} [(1 - \sqrt{\nu_r \nu_\theta}) \sqrt{N_r N_\theta} + N_\theta \nu_r] \frac{\partial^2 w}{\partial r^2 \partial \theta} - \frac{1}{r^3} N_\theta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \\ V_r = & -N_r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} (N_\theta \nu_r - N_r \nu_\theta - N_r) \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} N_\theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} [-N_r \nu_\theta - 2(1 - \sqrt{\nu_r \nu_\theta}) \sqrt{N_r N_\theta}] \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta^2} \\ & + \frac{1}{r^3} [N_r \nu_\theta + N_\theta + 2(1 - \sqrt{\nu_r \nu_\theta}) \sqrt{N_r N_\theta}] \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ V_\theta = & -\frac{1}{r^2} [N_\theta - 2(1 - \sqrt{\nu_r \nu_\theta}) \sqrt{N_r N_\theta}] \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} [2(1 - \sqrt{\nu_r \nu_\theta}) \sqrt{N_r N_\theta} - N_\theta \nu_r] \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} \\ & - \frac{1}{r^3} N_\theta \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} - \frac{1}{r^3} [(1 - \sqrt{\nu_r \nu_\theta}) \sqrt{N_r N_\theta}] \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \dots\dots\dots(26)$$

またこれらに (21) の関係を考慮すると諸断面力は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} M_r = & -N_r \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + c^2 \nu_r \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta = & -N_r \left[ \frac{c^2}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + c^2 \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right] \\ M_{r\theta} = & -N_r \left[ -\frac{(c - c^2 \nu_r)}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{(c - c^2 \nu_r)}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{N_\theta}{N_r} = c^2 \dots\dots\dots(21)$$

とおくと (18) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{d^4 w_s}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_s}{dr^3} - \frac{[c^2 + 2c\beta^2]}{r^2} \frac{d^2 w_s}{dr^2} \\ & + \frac{[c^2 + 2c\beta^2]}{r^3} \frac{dw_s}{dr} + \frac{\beta^2[\beta^2 c^2 - (2c^2 + 2c)]}{r^4} w_s \\ = & \frac{S\{p(r, \theta)\}}{N_r} \dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

この微分方程式の解は、右辺=0とした同次式の解  $w_\theta$  に特解  $w_p$  を加えたもので表わされる。 $w = r^\lambda$  において代入すると  $\lambda$  に関する次の特性方程式が得られる。

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + (5 - c^2 + 2c\beta^2)\lambda^2 + 2(c^2 - 2c\beta^2 - 1)\lambda + \beta^2[\beta^2 c^2 - (2c^2 + 2c)] = 0 \dots\dots\dots(23)$$

これを解いて4つの根  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  および  $\lambda_4$  を求めると次のようになる。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1-c}{2} + \sqrt{\frac{(1-c)^2}{4} + c\beta^2} \\ \lambda_2 &= \frac{1-c}{2} - \sqrt{\frac{(1-c)^2}{4} + c\beta^2} \\ \lambda_3 &= \frac{3+c}{2} + \sqrt{\frac{(1-c)^2}{4} + c\beta^2} \\ \lambda_4 &= \frac{3+c}{2} - \sqrt{\frac{(1-c)^2}{4} + c\beta^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

となり4個の相ことなる実根となる。

次に特解  $w_p$  は荷重が  $r$  と  $\theta$  に関して連続な関数で表わされればいかなる荷重でもその有限 Fourier Sine 変換を求めれば微分方程式 (22) の右辺が求まり従って特解が得られる。

結局解  $w_s(r, \beta)$  は  $C_1, C_2, C_3$  および  $C_4$  を任意定数とすると

$$w_s(r, \beta) = w_0 + w_p = C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} + C_3 r^{\lambda_3} + C_4 r^{\lambda_4} + w_p(r, \beta) \dots\dots\dots(25)$$

となり、その逆変換を (19) 式を求めるとたわみ  $w(r, \theta)$  が得られ、また断面力、反力等も (7), (9), (14) 等の諸式から得られせん断力、反力は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 Q_r &= -N_r \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{(c^2+c)}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{c}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right] \\
 Q_\theta &= -N_r \left[ \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{c}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{c^2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right] \\
 V_r &= -N_r \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{c^2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{(-c^2-2c+c^2\nu_r)}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{(2c-c^2\nu_r)}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \right] \\
 V_\theta &= -N_r \left[ \frac{2(c-c^2\nu_r)}{r^3} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{(c^2-2c+2c^2\nu_r)}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{(2c-c^2\nu_r)}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{c^2}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right]
 \end{aligned} \tag{27}$$

(25) の  $C_1, C_2, C_3$  および  $C_4$  の定数はそれぞれ2個の円弧辺での境界条件によって決定されるものである。なお、扇形平板の特別な場合として Circular Sector があるが、これは  $\lambda_1 \rightarrow \lambda_4$  の中  $\lambda_1$  と  $\lambda_3$  のみが残りをたわみの式の未定係数は2個となりこれらは Circular edge の境界条件から決定される。

6. 境界条件

(25) 式の中の4個の未定係数は(図-3)の  $r=a$  および  $r=b$  での境界条件から決まる。この条件は  $a$  を外側の半径  $b$  を内側の半径とすると

(1) 固定の場合

$$\left. \begin{aligned}
 r=a \text{ または } r=b \text{ にて } w &= 0 \\
 r=a \text{ または } r=b \text{ にて } \frac{\partial w}{\partial r} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

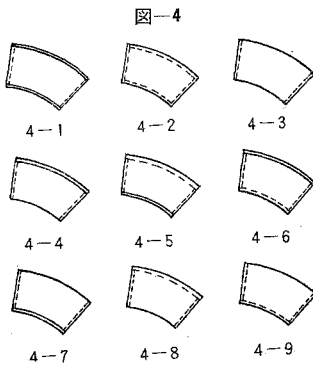
(2) 単純支持の場合

$$\left. \begin{aligned}
 r=a \text{ または } r=b \text{ にて } w &= 0 \\
 \text{ " } M_r &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

(3) 自由辺の場合

$$\left. \begin{aligned}
 r=a \text{ または } r=b \text{ にて } M_r &= 0 \\
 \text{ " } V_r &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

これらの境界条件の組み合わせは図-4のように9種類できそれぞれの条件によって4個の未定係数を決定すれば解が得られることになる。



7. 等分布荷重を担った扇形平板の曲げ

満載等分布荷重の場合

$$p(r, \theta) = q_0 \dots\dots\dots(31)$$

$q_0$ : 荷重強度  
となりその有限 Fourier Sine 変換は次のようになる。

$$S\{p(r, \theta)\} = \frac{q_0[1-(-1)^n]}{\beta} \dots\dots\dots(32)$$

( $n=1, 2, 3, \dots$ )

従って  $w_p$  は

$$w_p(r, \beta) = \frac{q_0[1-(-1)^n]r^4}{N_r \beta G} \dots\dots\dots(33)$$

ただし

$$G = c^2\beta^4 - (18c+2c^2)\beta^2 + (72-8c^2) \dots\dots\dots(34)$$

今  $r=a, r=b$  が単純支持された場合を考えると境界条件は 図-4(4-2) の場合になり、次のごとく表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 r=a \quad w_r(a, \beta) &= 0 \\
 r=b \quad w_r(b, \beta) &= 0 \\
 r=a \quad (M_r)_{r=a} &= 0 \\
 r=b \quad (M_r)_{r=b} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

従って前出の諸式を考慮してこれをかくと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
 C_1 a^{\lambda_1} + C_2 a^{\lambda_2} + C_3 a^{\lambda_3} + C_4 a^{\lambda_4} + \frac{2 q_0 a^4}{G \beta N_r} &= 0 \\
 C_1 b^{\lambda_1} + C_2 b^{\lambda_2} + C_3 b^{\lambda_3} + C_4 b^{\lambda_4} + \frac{2 q_0 b^4}{G \beta N_r} &= 0 \\
 C_1 [\lambda_1(\lambda_1-1) + c^2 \nu_r(\lambda_1-\beta^2)] a^{\lambda_1-2} + C_2 [\lambda_2(\lambda_2-1) + c^2 \nu_r(\lambda_2-\beta^2)] a^{\lambda_2-2} \\
 + C_3 [\lambda_3(\lambda_3-1) + c^2 \nu_r(\lambda_3-\beta^2)] a^{\lambda_3-2} + C_4 [\lambda_4(\lambda_4-1) + c^2 \nu_r(\lambda_4-\beta^2)] a^{\lambda_4-2} \\
 + \frac{2[12+c^2\nu_r(4-\beta^2)]q_0 a^2}{G \beta N_r} &= 0 \\
 C_1 [\lambda_1(\lambda_1-1) + c^2 \nu_r(\lambda_1-\beta^2)] b^{\lambda_1-2} + C_2 [\lambda_2(\lambda_2-1) + c^2 \nu_r(\lambda_2-\beta^2)] b^{\lambda_2-2} \\
 + C_3 [\lambda_3(\lambda_3-1) + c^2 \nu_r(\lambda_3-\beta^2)] b^{\lambda_3-2} + C_4 [\lambda_4(\lambda_4-1) + c^2 \nu_r(\lambda_4-\beta^2)] b^{\lambda_4-2} \\
 + \frac{2[12+c^2\nu_r(4-\beta^2)]q_0 b^2}{G \beta N_r} &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

( $n=1, 3, 5, 7, \dots$ )

便宜上、 $a/b=k$  として (34) を解いて  $C \rightarrow C_4$  を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 C_1 &= -2\{(k^{\lambda_4-4}-k^{\lambda_3-4})(k^{\lambda_2-4}-1)[[\lambda_3(\lambda_3-1)+c^2\nu_r(\lambda_3-\beta^2)][\lambda_4(\lambda_4-1)+c^2\nu_r(\lambda_4-\beta^2)]+[12+c^2\nu_r(4-\beta^2)][\lambda_2(\lambda_2-1)+c^2\nu_r(\lambda_2-\beta^2)]] \\
 &+ (k^{\lambda_4-4}-k^{\lambda_2-4})(1-k^{\lambda_3-4})[[\lambda_3(\lambda_3-1)+c^2\nu_r(\lambda_3-\beta^2)][\lambda_4(\lambda_4-1)+c^2\nu_r(\lambda_4-\beta^2)]+[12+c^2\nu_r(4-\beta^2)] \\
 &\cdot [\lambda_3(\lambda_3-1)+c^2\nu_r(\lambda_3-\beta^2)]] + (k^{\lambda_3-4}-k^{\lambda_2-4})(k^{\lambda_4-4}-1)[[\lambda_2(\lambda_2-1)+c^2\nu_r(\lambda_2-\beta^2)][\lambda_3(\lambda_3-1)+c^2\nu_r(\lambda_4-\beta^2)] \\
 &+ [12+c^2\nu_r(4-\beta^2)][\lambda_4(\lambda_4-1)+c^2\nu_r(\lambda_4-\beta^2)]]\} \frac{q_0 b^4 - \lambda_1}{N_r G \beta D} \dots\dots\dots(36.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 &= -2\{(k^{\lambda_4-4}-k^{\lambda_3-4})(1-k^{\lambda_1-4})[[\lambda_3(\lambda_3-1)+c^2\nu_r(\lambda_3-\beta^2)][\lambda_4(\lambda_4-1)+c^2\nu_r(\lambda_4-\beta^2)]+[12+c^2\nu_r(4-\beta^2)][\lambda_1(\lambda_1-1)+c^2\nu_r(\lambda_1-\beta^2)]] \\
 &+ (k^{\lambda_4-4}-k^{\lambda_1-4})(k^{\lambda_3-4})[[\lambda_1(\lambda_1-1)+c^2\nu_r(\lambda_1-\beta^2)][\lambda_4(\lambda_4-1)+c^2\nu_r(\lambda_4-\beta^2)] \\
 &+ [12+c^2\nu_r(4-\beta^2)][\lambda_3(\lambda_3-1)+c^2\nu_r(\lambda_3-\beta^2)]] + (k^{\lambda_3-4}-k^{\lambda_1-4})(1-k^{\lambda_4-4})[[\lambda_1(\lambda_1-1)+c^2\nu_r(\lambda_1-\beta^2)][\lambda_3(\lambda_3-1)+c^2\nu_r(\lambda_3-\beta^2)]] \\
 &+ [12+c^2\nu_r(4-\beta^2)][\lambda_4(\lambda_4-1)+c^2\nu_r(\lambda_4-\beta^2)]]\} \frac{q_0 b^4 - \lambda_2}{N_r G \beta D} \dots\dots\dots(36.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_3 &= -2\{(k^{\lambda_4-4}-1)(k^{\lambda_2-4}-k^{\lambda_1-4})[[\lambda_1(\lambda_1-1)+c^2\nu_r(\lambda_1-\beta^2)][\lambda_2(\lambda_2-1)+c^2\nu_r(\lambda_2-\beta^2)]+[12+c^2\nu_r(4-\beta^2)][\lambda_4(\lambda_4-1)+c^2\nu_r(\lambda_4-\beta^2)]] \\
 &+ (k^{\lambda_4-4}-k^{\lambda_2-4})(k^{\lambda_1-4}-1)[[\lambda_2(\lambda_2-1)+c^2\nu_r(\lambda_2-\beta^2)][\lambda_4(\lambda_4-1)+c^2\nu_r(\lambda_4-\beta^2)]]+[12+c^2\nu_r(4-\beta^2)] \cdot \\
 &[\lambda_1(\lambda_1-1)+c^2\nu_r(\lambda_1-\beta^2)]]\} \frac{q_0 b^4 - \lambda_3}{N_r G \beta D}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot [\lambda_1(\lambda_1-1) + c^2 \nu_r(\lambda_1 - \beta^2)] + (1 - k^{\lambda_2-4})(k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_1-4}) \{ [\lambda_1(\lambda_1-1) + c^2 \nu_r(\lambda_1 - \beta^2)] [\lambda_4(\lambda_4-1) + c^2 \nu_r(\lambda_4 - \beta^2)] \\
 & + [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] [\lambda_2(\lambda_2-1) + c^2 \nu_r(\lambda_2 - \beta^2)] \} \frac{q_0 b^4 - \lambda_3}{N_r G \beta D} \dots\dots\dots(36.3) \\
 C_4 = & -2 \{ (1 - k^{\lambda_3-4})(k^{\lambda_2-4} - k^{\lambda_1-4}) \{ [\lambda_1(\lambda_1-1) + c^2 \nu_r(\lambda_1 - \beta^2)] [\lambda_2(\lambda_2-1) + c^2 \nu_r(\lambda_2 - \beta^2)] + [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] [\lambda_3(\lambda_3-1) \\
 & + c^2 \nu_r(\lambda_3 - \beta^2)] \} + (1 - k^{\lambda_2-4})(k^{\lambda_1-4} - k^{\lambda_3-4}) \{ [\lambda_1(\lambda_1-1) + c^2 \nu_r(\lambda_1 - \beta^2)] [\lambda_3(\lambda_3-1) + c^2 \nu_r(\lambda_3 - \beta^2)] \\
 & + [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] [\lambda_2(\lambda_2-1) + c^2 \nu_r(\lambda_2 - \beta^2)] \} + (k^{\lambda_3-4} - k^{\lambda_2-4})(1 - k^{\lambda_1-4}) \{ [\lambda_2(\lambda_2-1) + c^2 \nu_r(\lambda_2 - \beta^2)] [\lambda_4(\lambda_4 - \beta^4) + c^2 \nu_r \\
 & (\lambda_3 - \beta^2)] + [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] [\lambda_1(\lambda_1-1) + c^2 \nu_r(\lambda_1 - \beta^2)] \} \} \frac{q_0 b^4 - \lambda_4}{N_r G \beta D} \dots\dots\dots(36.4)
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 D = & (k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_3-4})(k^{\lambda_3-4} - k^{\lambda_1-4}) \{ [\lambda_2(\lambda_2-1) + c^2 \nu_r(\lambda_2 - \beta^2)] [\lambda_4(\lambda_4-1) + c^2 \nu_r(\lambda_4 - \beta^2)] + [\lambda_1(\lambda_1-1) + c^2 \nu_r(\lambda_1 - \beta^2)] \cdot \\
 & \cdot [\lambda_2(\lambda_2-1) + c^2 \nu_r(\lambda_2 - \beta^2)] \} + (k^{\lambda_3-4} - k^{\lambda_2-4})(k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_1-4}) \{ [\lambda_2(\lambda_2-1) + c^2 \nu_r(\lambda_2 - \beta^2)] [\lambda_3(\lambda_3-1) + c^2 \nu_r(\lambda_3 - \beta^2)] \\
 & + [\lambda_1(\lambda_1-1) + c^2 \nu_r(\lambda_1 - \beta^2)] [\lambda_4(\lambda_4-1) + c^2 \nu_r(\lambda_4 - \beta^2)] \} + (k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_2-4})(k^{\lambda_1-4} - k^{\lambda_3-4}) \{ [\lambda_2(\lambda_2-1) + c^2 \nu_r(\lambda_2 - \beta^2)] \cdot \\
 & \cdot [\lambda_4(\lambda_4-1) + c^2 \nu_r(\lambda_4 - \beta^2)] + [\lambda_1(\lambda_1-1) + c^2 \nu_r(\lambda_1 - \beta^2)] [\lambda_3(\lambda_3-1) + c^2 \nu_r(\lambda_3 - \beta^2)] \} \dots\dots\dots(37)
 \end{aligned}$$

次に  $r=a, r=b$  が自由辺である場合には 図-4(4-3) になり条件は

$$\left. \begin{aligned}
 r=a & \quad [M_r]_{r=a} = 0 \\
 r=b & \quad [M_r]_{r=b} = 0 \\
 r=a & \quad [V_r]_{r=a} = 0 \\
 r=b & \quad [V_r]_{r=b} = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

同様に  $C_1 \rightarrow C_4$  に関する 4 元連立一次方程式が得られるがこれを解くとその結果は次のようである。

$$\begin{aligned}
 C_1 = & -2 \{ (k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_3-4})(k^{\lambda_2-4} - 1) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_2 \cdot K_4 \cdot L_3 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] K_3 \cdot K_4 \cdot L_2 \} \\
 & + (k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_3-4})(1 - k^{\lambda_1-4}) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_3 \cdot K_4 \cdot L_2 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] K_2 \cdot K_4 \cdot L_3 \} \\
 & + (k^{\lambda_4-4} - 1)(k^{\lambda_3-4} - k^{\lambda_2-4}) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_4 \cdot L_2 \cdot L_3 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] \cdot \\
 & \cdot K_2 \cdot K_3 \cdot L_4 \} \} \frac{q_0 b^4 - \lambda_1}{N_r G \beta D} \dots\dots\dots(39.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_2 = & -2 \{ (k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_3-4})(1 - k^{\lambda_1-4}) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_1 \cdot L_3 \cdot L_4 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] K_3 \cdot K_4 \cdot L_1 \} \\
 & + (k^{\lambda_3-4} - 1)(k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_1-4}) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_3 \cdot L_1 \cdot L_4 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] K_1 \cdot K_4 \cdot L_3 \} \\
 & + (k^{\lambda_4-4} - 1)(k^{\lambda_1-4} - k^{\lambda_3-4}) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_4 \cdot L_1 \cdot L_3 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] \cdot \\
 & \cdot K_4 \cdot L_1 \cdot L_3 \} \} \frac{q_0 b^4 - \lambda_2}{N_r G \beta D} \dots\dots\dots(39.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_3 = & -2 \{ (k^{\lambda_4-4} - 1)(k^{\lambda_2-4} - k^{\lambda_1-4}) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_4 \cdot L_1 \cdot L_2 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] K_1 \cdot K_2 \cdot L_4 \} \\
 & + (k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_3-4})(k^{\lambda_1-4} - 1) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_1 \cdot L_2 \cdot L_4 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] K_2 \cdot K_4 \cdot L_1 \} \\
 & + (1 - k^{\lambda_3-4})(k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_1-4}) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_2 \cdot L_1 \cdot L_4 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] \cdot \\
 & \cdot K_2 \cdot L_1 \cdot L_4 \} \} \frac{q_0 b^4 - \lambda_3}{N_r G \beta D} \dots\dots\dots(39.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_4 = & -2 \{ (1 - k^{\lambda_3-4})(k^{\lambda_2-4} - k^{\lambda_1-4}) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_1 \cdot K_2 \cdot L_3 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] \\
 & + (1 - k^{\lambda_2-4})(k^{\lambda_1-4} - k^{\lambda_3-4}) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_2 \cdot L_1 \cdot L_3 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] \} \\
 & + (k^{\lambda_3-4} - k^{\lambda_2-4})(1 - k^{\lambda_1-4}) \{ [12 + c^2 \nu_r(4 - \beta^2)] K_1 \cdot L_2 \cdot L_3 + [36 + 4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2 + c - c\nu_r)] \} \} \cdot \\
 & \cdot \frac{q_0 b^4 - \lambda_4}{N_r G \beta D} \dots\dots\dots(39.4)
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 D = & (k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_3-4})(k^{\lambda_2-4} - k^{\lambda_1-4})(K_1 K_2 L_3 L_4 + K_3 K_4 L_1 L_2) + (k^{\lambda_3-4} - k^{\lambda_2-4})(k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_1-4})(K_1 K_4 L_2 L_3 + K_2 K_3 L_1 L_4) \\
 & + (k^{\lambda_4-4} - k^{\lambda_2-4})(k^{\lambda_1-4} - k^{\lambda_3-4})(K_1 K_3 L_2 L_4 + K_2 K_4 L_1 L_3) \dots\dots\dots(40)
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 K_1 = & \lambda_1(\lambda_1-1) + c^2 \nu_r(\lambda_1 - \beta^2) \\
 K_2 = & \lambda_2(\lambda_2-1) + c^2 \nu_r(\lambda_2 - \beta^2) \\
 K_3 = & \lambda_3(\lambda_3-1) + c^2 \nu_r(\lambda_3 - \beta^2) \\
 K_4 = & \lambda_4(\lambda_4-1) + c^2 \nu_r(\lambda_4 - \beta^2)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

とおき、また

$$\left. \begin{aligned}
 y_1 = & -\frac{N_r}{q_0} C_1 b^{\lambda_1-4}, & y_2 = & -\frac{N_r}{q_0} C_2 b^{\lambda_2-4} y_2 \\
 y_3 = & -\frac{N_r}{q_0} C_3 b^{\lambda_3-4}, & y_4 = & -\frac{N_r}{q_0} C_4 b^{\lambda_4-4} y_4
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

とおくと計算の結果、たわみの式は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 w(r, \theta) = & -\frac{2}{\alpha} \frac{q_0}{N_r} b^4 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \left\{ m_i^{\lambda_1} y_1 + m_i^{\lambda_2} y_2 \right. \\
 & \left. + m_i^{\lambda_3} y_3 + m_i^{\lambda_4} y_4 - \frac{2 m_i^4}{G \cdot \beta} \right\} \sin \beta \theta \dots\dots\dots(44)
 \end{aligned}$$

$G$  は (31) と同一のものである。

$$\left( \beta = \frac{n\pi}{\alpha} \right)$$

これらの未定係数が決定されると平板上の任意点のたわみ、断面力および反力などは (26) 式が求めることができる。今便宜上求める点の座標原点からの距離  $r$  を  $r = m \cdot b$

同様に点 ( $r = m \cdot b, \theta$ ) における曲げモーメント、ねじりモーメント、せん断力および反力を求めると

$$\left. \begin{aligned}
 M_r &= \frac{2}{\alpha} q_0 b^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \bar{M}_r \sin \beta \theta & M_\theta &= \frac{2}{\alpha} q_0 b^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \bar{M}_\theta \sin \beta \theta \\
 M_{r\theta} &= \frac{2}{\alpha} q_0 b^2 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \bar{M}_{r\theta} \cos \beta \theta & Q_r &= \frac{2}{\alpha} q_0 b \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \bar{Q}_r \sin \beta \theta \\
 Q_\theta &= \frac{2}{\alpha} q_0 b \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \bar{Q}_\theta \cos \beta \theta & V_r &= \frac{2}{\alpha} q_0 b \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \bar{V}_r \sin \beta \theta \\
 V_\theta &= \frac{2}{\alpha} q_0 b \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \bar{V}_\theta \cos \beta \theta
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (45)$$

となる。(45) 式中の  $\bar{M}_r, \bar{M}_\theta$  などは (44) 式の { } の中のような形で表わされるもので、それらをまとめて示すと次のようになる。

$$\left( \begin{array}{l} \bar{M}_r \\ \bar{M}_\theta \\ \bar{M}_{r\theta} \\ \bar{Q}_r \\ \bar{Q}_\theta \\ \bar{V}_r \\ \bar{V}_\theta \end{array} \right) = \left( \begin{array}{l} K_1 m_i^{\lambda_1-2}, K_2 m_i^{\lambda_2-2}, K_3 m_i^{\lambda_3-2}, K_4 m_i^{\lambda_4-2} - \frac{2[12+c^2 \nu_r(4-\beta^2)] m_i^2}{G \beta} \\ E_1 m_i^{\lambda_1-2}, E_2 m_i^{\lambda_2-2}, E_3 m_i^{\lambda_3-2}, E_4 m_i^{\lambda_4-2} - \frac{2[12 \nu_r + 4 - \beta^2] c^2 m_i^2}{G \beta} \\ F_1 m_i^{\lambda_1-2}, F_2 m_i^{\lambda_2-2}, F_3 m_i^{\lambda_3-2}, F_4 m_i^{\lambda_4-2} - \frac{6(c-c^2 \nu_r) \beta m_i^2}{G \beta} \\ G_1 m_i^{\lambda_1-3}, G_2 m_i^{\lambda_2-3}, G_3 m_i^{\lambda_3-3}, G_4 m_i^{\lambda_4-3} - \frac{[36-3c\beta^2-c^2(4-\beta^2)]}{G \beta} \\ H_1 m_i^{\lambda_1-3}, H_2 m_i^{\lambda_2-3}, H_3 m_i^{\lambda_3-3}, H_4 m_i^{\lambda_4-3} - \frac{2c[12+4c-c\beta^2]}{G \beta} \\ L_1 m_i^{\lambda_1-3}, L_2 m_i^{\lambda_2-3}, L_3 m_i^{\lambda_3-3}, L_4 m_i^{\lambda_4-3} - \frac{2[36+4c(c\beta^2 \nu_r - c - 2\beta^2) + \beta^2 c(2+c-c\nu_r)] m_i}{G \beta} \\ J_1 m_i^{\lambda_1-3}, J_2 m_i^{\lambda_2-3}, J_3 m_i^{\lambda_3-3}, J_4 m_i^{\lambda_4-3} - \frac{2[18c-6c^2 \nu_r - c^2(\beta^2-4)] \beta m_i}{G \beta} \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ 1 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned}
 E_1 &= c^2(\lambda_1 - \beta^2) + c^2 \nu_r \lambda_1 (\lambda_1 - 1) \\
 E_2 &= c^2(\lambda_2 - \beta^2) + c^2 \nu_r \lambda_2 (\lambda_2 - 1) \\
 E_3 &= c^2(\lambda_3 - \beta^2) + c^2 \nu_r \lambda_3 (\lambda_3 - 1) \\
 E_4 &= c^2(\lambda_4 - \beta^2) + c^2 \nu_r \lambda_4 (\lambda_4 - 1)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

$$\left. \begin{aligned}
 F_1 &= \beta(c - c^2 \nu_r)(\lambda_1 - 1) \\
 F_2 &= \beta(c - c^2 \nu_r)(\lambda_2 - 1) \\
 F_3 &= \beta(c - c^2 \nu_r)(\lambda_3 - 1) \\
 F_4 &= \beta(c - c^2 \nu_r)(\lambda_4 - 1)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

$$\left. \begin{aligned}
 G_1 &= \lambda_1(\lambda_1 - 1)^2 + c\beta^2(1 - \lambda_1) + c^2(\beta^2 - \lambda_1) \\
 G_2 &= \lambda_2(\lambda_2 - 1)^2 + c\beta^2(1 - \lambda_2) + c^2(\beta^2 - \lambda_2) \\
 G_3 &= \lambda_3(\lambda_3 - 1)^2 + c\beta^2(1 - \lambda_3) + c^2(\beta^2 - \lambda_3) \\
 G_4 &= \lambda_4(\lambda_4 - 1)^2 + c\beta^2(1 - \lambda_4) + c^2(\beta^2 - \lambda_4)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

$$\left. \begin{aligned}
 H_1 &= c^2(\lambda_1 - \beta^2) + c\lambda_1(\lambda_1 - 1) \\
 H_2 &= c^2(\lambda_2 - \beta^2) + c\lambda_2(\lambda_2 - 1) \\
 H_3 &= c^2(\lambda_3 - \beta^2) + c\lambda_3(\lambda_3 - 1) \\
 H_4 &= c^2(\lambda_4 - \beta^2) + c\lambda_4(\lambda_4 - 1)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

$$\left. \begin{aligned}
 J_1 &= c\beta[(2-c\nu_r)\lambda_1^2 + (c+3c\nu_r-4) + 2-2c\nu_r-\beta^2c] \\
 J_2 &= c\beta[(2-c\nu_r)\lambda_2^2 + (c+3c\nu_r-4) + 2-2c\nu_r-\beta^2c] \\
 J_3 &= c\beta[(2-\nu_r)\lambda_3^2 + (c+3c\nu_r-4) + 2-2c\nu_r-\beta^2c] \\
 J_4 &= c\beta[(2-\nu_r)\lambda_4^2 + (c+3c\nu_r-4) + 2-2c\nu_r-\beta^2c]
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

なお  $K_1 \rightarrow K_4$  および  $L_1 \rightarrow L_4$  は前出のものである。

8. 集中荷重が作用する扇形平板

平板上の任意の点 ( $r=r_c=m_i b, \theta=\theta_c$ ) に P なる集中荷重が作用する場合を考える (図-5)。

図-5 のように平板を  $r=r_c$  なる円弧で二つに分けその内側を①, 外側を②としよう。この平板のおのおのに対し基本微分方程式 (12) または (21) の同次式 (右

辺=0) が適用される。

未定係数の数は合計 8 個となるが、このうち 4 個を周辺の境界条件で、他の 4 個は  $r=r_c$  での連続の条件で決定される。

さて①の平板のたわみを  $w(r, \theta)$ , ②の平板のたわみを  $w'(r, \theta)$  とすると

$$\left. \begin{aligned}
 w(r, \theta) &= \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} [C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} + C_3 r^{\lambda_3} + C_4 r^{\lambda_4}] \sin \beta \theta \\
 w'(r, \theta) &= \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} [C_1' r^{\lambda_1} + C_2' r^{\lambda_2} + C_3' r^{\lambda_3} + C_4' r^{\lambda_4}] \sin \beta \theta
 \end{aligned} \right\}$$

以下断面力, 反力についても②の方に ' をつける。境界条件は前と同様であり、一例として 2 つの円弧辺が自由である場合を考えると

$$\left. \begin{array}{ll}
 r=a \text{ にて} & M_r' = 0 \\
 \text{''} & V_r' = 0 \\
 r=b \text{ にて} & M_r = 0 \\
 \text{''} & V_r = 0
 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

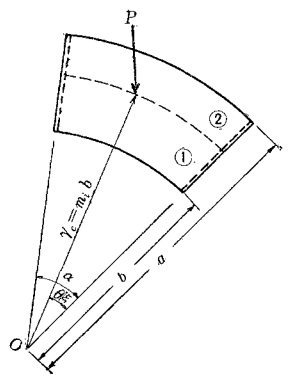
次に  $r=r_c$  なる円弧での連続の条件は次のようになる。

$$r=r_c \text{ において} \quad w = w' \dots\dots\dots (53.1)$$

$$r=r_c \text{ において} \quad \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w'}{\partial r} \dots\dots\dots (53.2)$$

$$\text{''} \quad M_r = M_r' \dots\dots\dots (53.3)$$

図-5



$$r=r_c \text{ おいて } Q_r - Q_r' = p(\theta) \\ = \frac{2p}{\alpha r_c} \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \cdot \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \quad (53.4)$$

(53.4) の条件は  $r=r_c$  なる円弧でのせん断力と荷重の釣合いの条件で、右辺は  $P$  なる荷重を  $r=r_c$  の円弧上にフーリエ級数に展開したものである。これらの式に  $w$  および  $w'$  を代入すると次の 8 個の条件式が得られる ( $r_c = m_i b$ )。

$$m_i \lambda_1^{-2} y_1 + m_i \lambda_3^{-2} y_2 + m_i \lambda_5^{-2} y_3 + m_i \lambda_4^{-2} y_4 + m_i \lambda_1^{-2} y_1' \\ + m_i \lambda_2^{-2} y_2' + m_i \lambda_3^{-2} y_3' + m_i \lambda_4^{-2} y_4' = 0 \quad (54.1)$$

$$\lambda_1 m_i \lambda_1^{-2} y_1 + \lambda_2 m_i \lambda_2^{-2} y_2 + \lambda_3 m_i \lambda_3^{-2} y_3 + \lambda_4 m_i \lambda_4^{-2} y_4 \\ + \lambda_1 m_i \lambda_1^{-2} y_1' + \lambda_2 m_i \lambda_2^{-2} y_2' + \lambda_3 m_i \lambda_3^{-2} y_3' \\ + \lambda_4 m_i \lambda_4^{-2} y_4' = 0 \quad (54.2)$$

$$K_1 m_i \lambda_1^{-2} y_1 + K_2 m_i \lambda_2^{-2} y_2 + K_3 m_i \lambda_3^{-2} y_3 + K_4 m_i \lambda_4^{-2} y_4 \\ + K_1 m_i \lambda_1^{-2} y_1' + K_2 m_i \lambda_2^{-2} y_2' + K_3 m_i \lambda_3^{-2} y_3' \\ + K_4 m_i \lambda_4^{-2} y_4' = 0 \quad (54.3)$$

$$G_1 m_i \lambda_1^{-2} y_1 + G_2 m_i \lambda_2^{-2} y_2 + G_3 m_i \lambda_3^{-2} y_3 + G_4 m_i \lambda_4^{-2} y_4 \\ + G_1 m_i \lambda_1^{-2} y_1' + G_2 m_i \lambda_2^{-2} y_2' + G_3 m_i \lambda_3^{-2} y_3' \\ + G_4 m_i \lambda_4^{-2} y_4' = -\sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \quad (54.4)$$

$$K_{11} y_1 + K_{22} y_2 + K_{33} y_3 + K_{44} y_4 = 0 \quad (54.5)$$

$$L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 + L_4 y_4 = 0 \quad (54.6)$$

$$K_1 k \lambda_1^{-2} y_1' + K_2 k \lambda_2^{-2} y_2' + K_3 k \lambda_3^{-2} y_3' + K_4 k \lambda_4^{-2} y_4' = 0 \quad (54.7)$$

$$L_1 k \lambda_1^{-2} y_1' + L_2 k \lambda_2^{-2} y_2' + L_3 k \lambda_3^{-2} y_3' + L_4 k \lambda_4^{-2} y_4' = 0 \quad (54.8)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{N_r}{P} C_1 b \lambda_1^{-2}, & y_2 &= -\frac{N_r}{P} C_2 b \lambda_3^{-2} \\ y_3 &= \frac{N_r}{P} C_3 b \lambda_5^{-2}, & y_4 &= \frac{N_r}{P} C_4 b \lambda_4^{-2} \\ y_1' &= \frac{N_r}{P} C_1' b \lambda_1^{-2}, & y_2' &= \frac{N_r}{P} C_2' b \lambda_3^{-2} \\ y_3' &= \frac{N_r}{P} C_3' b \lambda_5^{-2}, & y_4' &= \frac{N_r}{P} C_4' b \lambda_4^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

今

$$y_1 + y_1' = Y_1, \quad y_2 + y_2' = Y_2, \quad y_3 + y_3' = Y_3, \quad y_4 + y_4' = Y_4 \quad (56)$$

とおくと (54) の始めの 4 式は

$$\left. \begin{aligned} m_i \lambda_1^{-2} Y_1 + m_i \lambda_2^{-2} Y_2 + m_i \lambda_3^{-2} Y_3 + m_i \lambda_4^{-2} Y_4 &= 0 \\ \lambda_1 m_i \lambda_1^{-2} Y_1 + \lambda_2 m_i \lambda_2^{-2} Y_2 + \lambda_3 m_i \lambda_3^{-2} Y_3 + \lambda_4 m_i \lambda_4^{-2} Y_4 &= 0 \\ K_1 m_i \lambda_1^{-2} Y_1 + K_2 m_i \lambda_2^{-2} Y_2 + K_3 m_i \lambda_3^{-2} Y_3 + K_4 m_i \lambda_4^{-2} Y_4 &= 0 \\ G_1 m_i \lambda_1^{-2} Y_1 + G_2 m_i \lambda_2^{-2} Y_2 + G_3 m_i \lambda_3^{-2} Y_3 \\ + G_4 m_i \lambda_4^{-2} Y_4 &= -\sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

となり、この 4 元連立一次方程式を解いて  $Y_1, Y_2, Y_3$  および  $Y_4$  を求めると (54), (56) を考慮すれば  $y_1 \rightarrow y_4'$  が決定される。この 8 個の未定係数が定まればたわみ、断面力、反力なども求まるが前項の等分布満載荷重の場合と類似の形で示すことができるのでここでは省略する。もちろん  $y_1' \rightarrow y_4'$  は②の平板内のみを用い、また  $y_1 \rightarrow y_4$  は①内のみで有効である。

### 9. 数値計算例

計算例として満載等分布荷重  $q_0$  が載荷された扇形平

板のたわみ  $w(r, \theta)$  および曲げモーメント  $M_r(r, \theta), M_\theta(r, \theta)$  を次の二種類の境界条件の場合について考える。

- (1) 周辺が全部単純支持された場合
- (2) 2 直線辺が単純支持、他の 2 円弧辺が完全自由の場合

また  $r$  方向の平板の剛度  $N_r$  と  $\theta$  方向の平板の剛度  $N_\theta$  の比、すなわち  $N_\theta/N_r = c^2$  とする時、(1), (2) のそれぞれについて

- (a)  $c=0.5$  従って  $N_\theta/N_r = c^2 = 0.25$
- (b)  $c=1.0$  " = 1.0
- (c)  $c=2.0$  " = 4.0

の場合を取扱うことにする。

中心角  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  とし、 $\nu_r = 0$  とする。また辺比、すなわち巾を  $d$ 、扇形平板の中央円弧長を  $l$  とするときこの計算例では

$$\frac{d}{l} = 1.0$$

とする。従ってこの場合には  $k = a/b = 1.7029291$  となる。これらの計算の結果を次のように表わすことにしよう。

図-6  $\alpha, \beta_1$  および  $\gamma_1$  の値

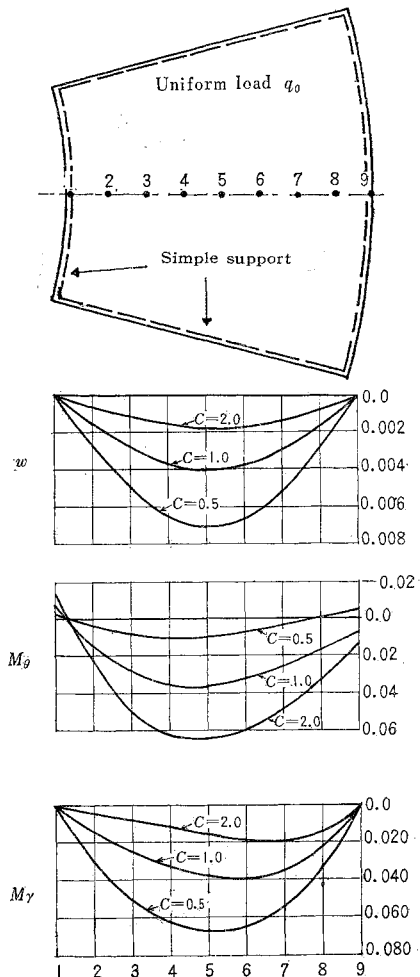
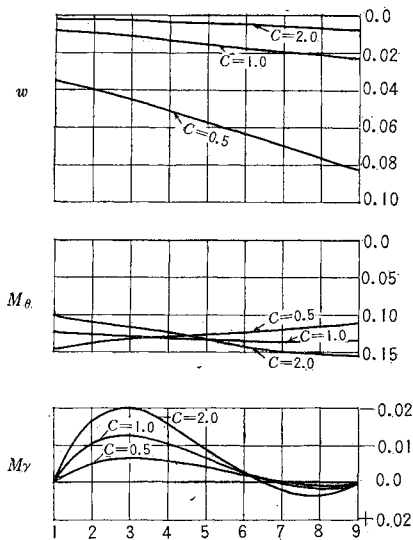
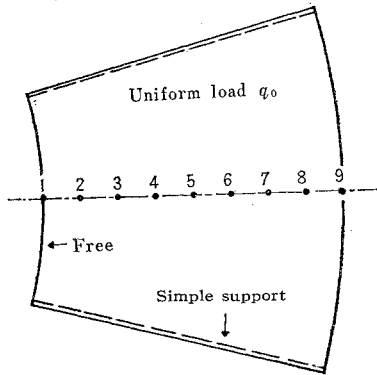


表-1  $\alpha, \beta$  および  $\gamma$  の値

境界条件	板剛度の比 係数	$c=0.5 \left( \frac{N_\theta}{N_r} = c^2 = 0.25 \right)$			$c=1.0 \left( \frac{N_\theta}{N_r} = 1.0 \right)$			$c=2.0 \left( \frac{N_\theta}{N_r} = 4.0 \right)$		
		$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_1$
(1) 四辺単純支持	1: $r=b$	0	-0.002199	0	0	-0.00883	0	0	-0.01485	0
	2: $\frac{r-b}{d} = 1/8$	0.002758	0.002464	0.03045	0.001503	0.01407	0.01543	0.000633	0.02456	0.00609
	3: $\frac{r-b}{d} = 1/4$	0.005053	0.008081	0.05008	0.002772	0.02859	0.02492	0.001175	0.04973	0.00884
	4: $\frac{r-b}{d} = 3/8$	0.006575	0.010303	0.06216	0.003655	0.03557	0.03211	0.001579	0.06274	0.01099
	5: $\frac{r-b}{d} = 1/2$	0.007135	0.009746	0.06745	0.004038	0.03637	0.03732	0.001798	0.06592	0.01552
	6: $\frac{r-b}{d} = 5/8$	0.006651	0.007175	0.06526	0.003843	0.03243	0.03921	0.001775	0.06082	0.01893
	7: $\frac{r-b}{d} = 3/4$	0.005159	0.003311	0.05427	0.003041	0.02526	0.03543	0.001459	0.04886	0.01986
	8: $\frac{r-b}{d} = 7/8$	0.002833	-0.001876	0.03301	0.001700	0.01647	0.02315	0.000841	0.03207	0.01493
	9: $r=b$	0	-0.006085	0	0	0.00751	0	0	0.01333	0
		$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_2$
(2) 2直線辺単純支持 2円弧辺自由	1: $r=b$	0.034092	0.14122	0	0.007478	0.12451	0	0.001558	0.10189	0
	2: $\frac{r-b}{d} = 1/8$	0.039537	0.13765	-0.01738	0.009029	0.12712	-0.011142	0.001982	0.10942	-0.005417
	3: $\frac{r-b}{d} = 1/4$	0.045235	0.13379	-0.02032	0.010746	0.12818	-0.012849	0.002487	0.11678	-0.006249
	4: $\frac{r-b}{d} = 3/8$	0.051242	0.13001	-0.01637	0.012859	0.13104	-0.010542	0.003086	0.12501	-0.005487
	5: $\frac{r-b}{d} = 1/2$	0.057502	0.12643	-0.00836	0.014734	0.13306	-0.006760	0.003621	0.13345	-0.003999
	6: $\frac{r-b}{d} = 5/8$	0.063914	0.12282	-0.003170	0.016909	0.13465	-0.002489	0.004484	0.14124	-0.002166
	7: $\frac{r-b}{d} = 3/4$	0.070379	0.11911	0.002038	0.019120	0.13551	0.000654	0.005299	0.14768	-0.00038
	8: $\frac{r-b}{d} = 7/8$	0.076822	0.11449	0.003752	0.021306	0.13589	0.001461	0.006086	0.15240	0.00068
	9: $\frac{r-b}{d} = 1.0$	0.083223	0.11122	0	0.023430	0.13435	0	0.006866	0.15537	0

(1) の場合

図-7  $\alpha_2, \beta_2$  および  $\gamma_2$  の値



$$\left. \begin{aligned} w &= \alpha_1 \frac{q_0 l^4}{N_r} \\ M_\theta &= \beta_1 q_0 l^2, \quad M_r = \gamma_1 q_0 l^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(58)$$

(2) の場合

$$\left. \begin{aligned} w &= \alpha_2 \frac{q_0 l^4}{N_r} \\ M_\theta &= \beta_2 q_0 l^2, \quad M_r = \gamma_2 q_0 l^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(59)$$

平板の極方向 ( $r$  方向) を 8 等分し、それらの諸点の  $\theta = \frac{\alpha}{2}$  におけるたわみ、および曲げモーメントを求めたときの  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  および  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$  を示すと表-1 のようになる。またこれを図示すると図-6, 7 のようになる。計算はここに示した数値の有効桁数に影響がおよぼさないとところまで級数の項をとった。

これらの結果から扇形平板のたわみおよび曲げモーメントの特性を知ることができると同時にまた、剛比がこれらの弾性変形や断面モーメントにおよぼす影響が明らかになった。

さらにこの (1), (2) の平板と等しい辺比で、等しい境界条件を有する矩形平板 (この場合は正方形板) と比較してみると、例えばたわみについては  $c=1.0$  のとき、

(1) 4 辺単純支持の場合中央点のたわみは

$$w = 0.00406 \frac{q_0 l^4}{N}$$

(2) 2 辺単純支持、他の辺 2 が完全自由の時

$$w = 0.01302 \frac{q_0 l^4}{N}$$

である。

参考文献

- 坪井善勝: 「平面構造論」
- Churchill, V.: Modern Operational Mathematics in Engineering

(原稿受付: 1961.12.8)



# THE BENDING OF CURVILINEAR ORTHOTROPIC CIRCULAR RING SECTOR PLATE

By Jin Yoshimura, C.E. Member

Problems of the bending of curvilinear orthotropic circular ring sector plate are discussed in this paper. A fundamental differential equation is first introduced in polar coordinates. Finite sine transform is used to obtain the deflection of the plate. In this method, if two straight edges are simply supported, the plate with arbitrary boundary conditions along the circular edges, can be solved. As the practical examples, a plate, which has distributed load and concentrated load were treated in the present paper.

The bending moment and torsional moment may be written as

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -N_r \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -N_\theta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu_r \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ M_{r\theta} &= M_{\theta r} = -(1-\nu) N \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

where,

$$\left. \begin{aligned} N_r &= \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}, \quad N_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)} \\ (1-\nu)N &= \frac{G h^3}{6} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

Considering the expression of  $Q_r$  and  $Q_\theta$ , from the relation between moment and vertical force  $p(r, \theta)$ , we can get the following equation of equilibrium.

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\partial^2 M_r}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_{\theta r}}{\partial \theta} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial M_r}{\partial r} \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

A fundamental differential equation for anisotropic plate in polar coordinates is obtained as follows :

$$\begin{aligned} p &= N_r \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{(2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r)}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} \\ &+ \frac{[N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2N(1-\nu)]}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial r^2 \partial \theta^2} \\ &- \frac{2[N_r \nu_\theta + N(1-\nu)]}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} \\ &+ \frac{2[N_\theta + N(1-\nu) + N_r \nu_\theta]}{r^4} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ &+ \frac{N_\theta}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{N_\theta}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{N_\theta}{r^4} \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} \dots\dots (4) \end{aligned}$$

We take a circular ring sector plate of Fig. 3.

Taking the finite sine transform with respect to  $\theta$ , the differential equation (3) becomes :

$$\begin{aligned} N_r \frac{d^4 w_s(r, \beta)}{dr^4} + \frac{[2N_r + N_r \nu_\theta - N_\theta \nu_r]}{r} \frac{d^3 w_s(r, \beta)}{dr^3} \\ - \frac{[N_\theta + \beta^2(N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2N(1-\nu))]}{r^2} \frac{d^2 w_s(r, \beta)}{dr^2} \\ + \frac{[N_\theta + \beta^2(2N_r \nu_\theta + 2N(1-\nu))]}{r^3} \frac{dw_s(r, \beta)}{dr} \\ + \frac{[\beta^4 N_\theta - \beta^2(2N_\theta + 2N_r \nu_\theta + 2N(1-\nu))]}{r^4} w_s(r, \beta) \\ = s\{p(r, \theta)\} + \frac{[N_r \nu_\theta + N_\theta \nu_r + 2N(1-\nu)]}{r^2} \\ \times \beta \left\{ (-1)^n \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]_{\theta=\alpha} - \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]_{\theta=0} \right\} \\ - \frac{2[N_r \nu_\theta + N(1-\nu)]}{r^3} \beta \left\{ (-1)^n \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\theta=\alpha} - \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\theta=0} \right\} \\ + \frac{2[N_\theta + N_r \nu_\theta + N(1-\nu)]}{r^4} \beta \{ (-1)^n w(r, \alpha) - w(r, 0) \} \\ - \frac{\beta}{r^4} \left\{ (-1)^n \left[ \frac{(M_\theta)_{\theta=\alpha}}{N_\theta} + r \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\theta=\alpha} + \nu_r \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]_{\theta=\alpha} \right] \right. \\ \left. - \left[ \frac{(M_\theta)_{\theta=0}}{N_\theta} + r \left[ \frac{\partial w}{\partial r} \right]_{\theta=0} + \nu_r \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]_{\theta=0} \right] \right\} \dots\dots (5) \end{aligned}$$

The first term on the right side of (5) is the finite sine transform of the given load  $p(r, \theta)$ . If two straight edges are simply supported only the first term remains.  $w_s$  in equation (5) is the sine transformed deflection. The inverse sine transform  $w(r, \theta)$  of  $w_s$  is expressed as follows :

$$\begin{aligned} w(r, \theta) &= \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1, 2, 3, \dots}^{\infty} w_s(r, \beta) \sin \beta \theta \dots\dots\dots (6) \\ \beta &= \frac{n\pi}{\alpha}, \quad n=1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Now, we express the torsional moment  $M_{r\theta}$  as follows in stead of

$$\begin{aligned} M_{r\theta} &= -(1-\nu) N \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), \\ M_{r\theta} &= -(1-\sqrt{\nu_r \nu_\theta}) \sqrt{N_r N_\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

Let

$$\frac{N_\theta}{N_r} = c^2 \dots\dots\dots (8)$$

then Equ. (5) becomes as follows :

$$\begin{aligned} \frac{d^4 w_s}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_s}{dr^3} - \frac{[c^2 + 2c\beta^2]}{r^2} \frac{d^2 w_s}{dr^2} \\ + \frac{[c^2 - 2c\beta^2]}{r^3} \frac{dw_s}{dr} + \frac{\beta^2[\beta^2 c^2 - (2c^2 + 2c)]}{r^4} w_s \\ = \frac{s\{p(r, \theta)\}}{N_r} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

The solution of this equation is

$$w_s = w_0 + w_p \dots\dots\dots(10)$$

where,  $w_0$  = solution of homogeneous equation

$w_p$  = particular solution

Substituting  $w_s = r^\lambda$  into Equ. (8), we get the following characteristic equation :

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + (5 - c^2 + 2c\beta^2)\lambda^2 + 2(c^2 - 2c\beta^2 - 1)\lambda + \beta^2[\beta^2c^2 - (2c^2 + 2c)] = 0 \dots\dots\dots(11)$$

From this characteristic equation, four real roots are obtained as follows :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1-c}{2} + \sqrt{\frac{(1-c)^2}{4} + c\beta^2} \\ \lambda_2 &= \frac{1-c}{2} - \sqrt{\frac{(1-c)^2}{4} + c\beta^2} \\ \lambda_3 &= \frac{3+c}{2} + \sqrt{\frac{(1-c)^2}{4} + c\beta^2} \\ \lambda_4 &= \frac{3+c}{2} - \sqrt{\frac{(1-c)^2}{4} + c\beta^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

Therefore solution  $w(r, \theta)$  is written as :

$$w(r, \theta) = \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \{C_1 r^{\lambda_1} + C_2 r^{\lambda_2} + C_3 r^{\lambda_3} + C_4 r^{\lambda_4} + w_p\} \times \sin \beta \theta \dots\dots\dots(13)$$

Boundary conditions along the two curved edges are given as follows :

- (a) When curved edge is simply supported ;  
 $r = a$  or  $b \dots w = 0, M_r = 0$
  - (b) When curved edge is free ;  
 $r = a$  or  $b \dots M_r = 0, V_r = 0$
  - (c) When curved edge is fixed ;  
 $r = a$  or  $b \dots w = 0, \frac{\partial w}{\partial r} = 0$
- .....(14)

If a circular ring sector plate is subjected to a full uniform load,

$$p(r, \theta) = q_0(\text{const})$$

and sine transformed expression of load  $p(r, \theta)$  is given as

$$S\{p(r, \theta)\} = \frac{q_0[1 - (-1)^n]}{\beta} \dots\dots\dots(15)$$

$n = 1, 2, 3 \dots$

therefore,  $w_p$  is written as

$$w_p = \frac{q_0[1 - (-1)^n]}{\beta N_r [c^2\beta^4 - (18c + 2c^2)\beta^2 + (72 - 8c^2)]} \dots\dots\dots(16)$$

In the case of concentrated load applied at any point at distance  $r_c$  from 0 of the plate, we divide the plate into two parts by the arc line of radius  $r_c$  as shown in Fig. 5 by the dotted line and we can apply homogeneous equation of the plate for each of these portions of the plates. Besides the boundary conditions, we need the continuity conditions along that line to determine the integral coefficients. They are written as

$$\left. \begin{aligned} \text{at } r=r_c \quad w &= w' \\ \frac{\partial w}{\partial r} &= \frac{\partial w'}{\partial r} \\ M_r &= M_r' \\ Q_r - Q_r' &= p(\theta) \\ &= \frac{2p}{\alpha r_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi\theta\xi}{\alpha} \\ &\quad \cdot \sin \frac{n\pi\theta}{\alpha} \end{aligned} \right\} \dots\dots(17)$$

For the outside plate (2) we add to  $w, M_r$  and  $Q_r$ . In the last equation of this expression,  $P$  is represented by trigonometric series. Therefore, from these four boundary conditions and four continuity conditions, we can obtain 8 integral coefficients.

Fig. 1 shows one of the numerical examples of this plate.  $\alpha_2, \beta_2$  and  $\gamma_2$  show the following values.

$$\alpha_2 = w / \frac{q_0 l^4}{N_r}, \quad \beta_2 = M_\theta / q_0 l^2, \quad \gamma_2 = M_r / q_0 l^2$$

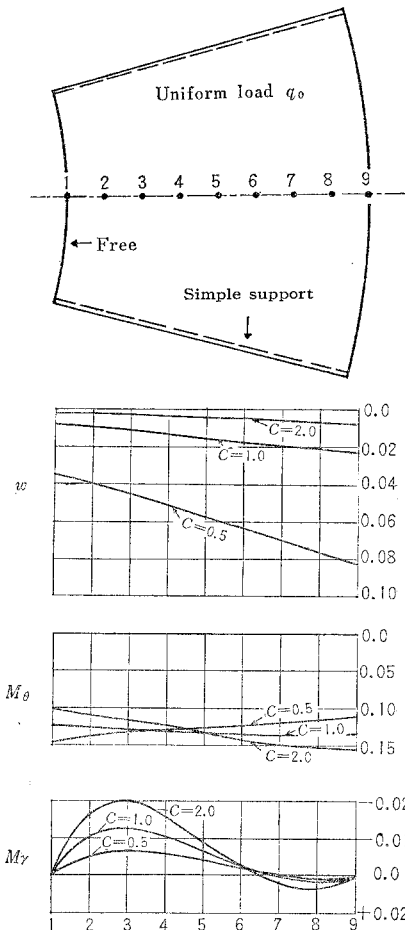


Fig. 1 Values of  $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$