

# 長方形断面水路の側壁効果に関する研究

足 立 昭 平\*

## 1. 緒 言

開水路水流の基礎研究に供せられる実験水路の多くは、小長方形断面水路であり、実験結果の解析にあたって水路側壁の効果を考慮しなければならない場合が少なくない。とくに模型実験においては、縮尺のひずみあるいは潤滑粗度の組成の相違などによって、水路側壁の効果が原型におけるよりもいちじるしく強調されることが多く、その吟味は模型の相似を律する重要な要素の一つである。

流水抵抗に関する水路側壁の効果を推算することは、従来から流水断面積を分割する方法によって試みられており、Keulegan, G.H.<sup>1)</sup>, Powell, R.W.<sup>2)</sup> あるいは Einstein, H.A.<sup>3)</sup> らの研究がある。そして、潤滑粗度均一の水路に対しては、実際に水路側壁の効果は、二次元流における水深の代りに径深を特性長にとれば、実験常数にふくめて十分であると考えられている。著者も、実用的取り扱いとして、径深を特性長にとることに異議を唱えるものではないが、従来の研究における流水断面積分割はほとんど直観的に仮定されているように思われ、とくに潤滑粗度が一様でない水路に対して明確さを欠き、水路側壁効果の吟味として、不十分のように思われる。また Straub, L.G. ら<sup>4)</sup> によれば、滑面水路と粗面水路の側壁効果には若干の相違が認められるということであり、本研究は上記の各先達の研究を追って、それらの直観的仮定を追究し、水路側壁効果の推算基礎を明らかにしようとしたものである。

## 2. 流水断面積分割法による長方形断面水路水流の抵抗則

層流の速度分布は流体の粘性に支配され、滑面開水路層流の基礎方程式は等流の場合、Poisson 方程式となり、その抵抗則は種々の水路断面形に対して数値計算が可能であり、たとえば Straub, L.G. ら<sup>4)</sup> の報文に長方形断面水路のほか 10 種の水路断面形についての計算結果が示されている。これに対して乱流の場合には、流体の粘性以外に変動速度によるいわゆる Reynolds 応力が加わり、しかも壁面のごく近傍を除けば、流体の粘性よりも、この乱れによる応力が支配的であるから、水路側壁の効果を明らかにするためには、厳密には乱れの三次元的解析が必要である。しかしながら、三次元乱流として厳密に開水路水流を解くことはきわめて困難であ

り、問題をあまりに複雑化して研究の目的を見失なうおそれがあるから、ここでは問題解明の第一段階として、従来の研究を踏襲し、二次元乱流の組み合わせとして考察を進めることにする。

乱流の内部応力は壁面近くを除いて、ほとんど変動速度にもとづく Reynolds 応力である。そして、von Kármán によれば、平行壁間の乱流では、流路の中心面における変動速度の相関係数は 0 と判定される<sup>5)</sup>。すなわち流路の中心面を通しての運動量交換は平均的に 0 であって、そこでは Reynolds 応力は 0 であり、この面を境としてその両側の速度分布は互いに独立である。いまこれと全く同様の推論を平行壁間の流れだけでなく、任意の 2 平面壁にはさまれた流れに対して適用できるものと考えれば、開水路水流に対して、流水断面積を数個の小面積に分割し、それぞれの分割面積内の流れを二次元乱流と見なし、それらを組み合わせることが許されるであろう。もちろん水路断面の隅点付近に対しては、この推論が適用できないと考えるべきではあるが、各種の断面形状の水路において、流水断面の等流速曲線がほぼ壁面に平行するという経験的事実から推して、その範囲はごく部分的であり、流水全断面に対して近似的にはそれらを省略することができよう。

いま、長方形断面水路に上記の推論を適用し、流水断面積を二つの領域に分割し、それぞれの領域における流水の速度分布が、水路底面および側壁の粗滑に対応して、それぞれ独立にあらわせるものと仮定しよう。そして、速度分布に Prandtl の対数速度分布則を適用すれば、各分割断面積内の流速はそれぞれつぎのようであらわすことができる。

$$\frac{u_1}{u_{*b}} = \frac{1}{\kappa} \log_e(M_1 z), \quad \frac{u_2}{u_{*s}} = \frac{1}{\kappa} \log_e(M_2 y) \dots (1)$$

ここに、 $u_1$  および  $u_2$  はそれぞれ底面および側壁の支配領域において、底面および側壁からそれぞれ距離  $z$  および  $y$  の点の流速を、 $u_{*b}$  および  $u_{*s}$  はそれぞれ底面および側壁の局部摩擦速度を、 $\kappa$  は乱流の混合距離に関するいわゆる Kármán 常数をあらわし、また  $M_1$  および  $M_2$  はそれぞれ底面および側壁の粗滑に関する常数であって、たとえば滑面および砂粒粗度に対して

$$\left. \begin{array}{l} \text{滑面: } M_1 = \frac{u_{*b}}{m_s v}, \quad M_2 = \frac{u_{*s}}{m_s v} \\ \text{砂粒粗面: } M_1 = \frac{1}{m_r k_{s1}}, \quad M_2 = \frac{1}{m_r k_{s2}} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

であり、Nikuradse の実験常数を適用すれば

$$m_s = 1/9, \quad m_r = 1/30 \dots \dots \dots (3)$$

\* 正員 京都大学助教授 防災研究所

である。なお  $\nu$  は流水の動粘性係数を、 $k_{s1}$  および  $k_{s2}$  はそれぞれ底面および側壁の砂粒粒径をあらわす。

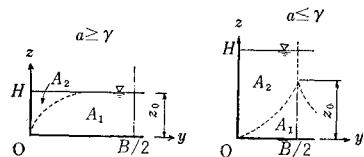
分割した両領域の境界面上では  $u_1=u_2$  でなければならぬから、(1) 式から流水断面積分割の境界線上の点  $(x, y)$  は次式を満足しなければならない。

$$u_{*b} \log_e(M_1 z) = u_{*s} \log_e(M_2 y) \quad \dots \dots \dots (4)$$

$u_{*b}$  および  $u_{*s}$  は一様でないと考えるのが一般的であり、Powell はその分布形を三角関数で仮定することを試みているが、それらの分布形は全く未知といってよく、未知の分布形を勝手に仮定することは、いたずらに未知数を増すことだけに終わってしまう。そしていまの場合、流水断面積を分割して各部分を独立に取り扱うのであるから、もっとも重要なことはそれらの分割面積について流水の力学的平衡条件が満足されることである。すなわち、分割線上のせん断応力を 0 と見なす以上、底面および側壁の局部せん断応力を  $\tau_b$  および  $\tau_s$ 、それぞれの平均値を  $\bar{\tau}_b$  および  $\bar{\tau}_s$  とおけば

$$\int_0^B \tau_b dy = \bar{\tau}_b B = 2 A_1 \rho g I_e, \int_0^H \tau_s dz = \bar{\tau}_s H = 2 A_2 \rho g I_e \quad \dots \dots \dots (5)$$

図-1 流水断面積の分割



でなければならぬ。ここに、  
B は水路巾、H  
は水深、 $A_1$  およ  
び  $A_2$  は図-  
1 に例示される

底面および側壁の支配面積であって、両側壁を対称として水路半巾をとつてある。また  $\rho$  は流水の密度、 $g$  は重力の加速度、 $I_e$  は流れのエネルギー勾配である。  
したがつて、 $\tau_b$  および  $\tau_s$  にどのような分布形を仮定するにしても、少なくとも (5) 式を満たすものでなければならない。そのもっとも単純な近似法は、分割したそれぞれの部分ごとの平均値を代表値にとることである。  
すなわち、摩擦速度  $u_{*b}$  および  $u_{*s}$  は、 $\sqrt{\tau_b/\rho}$  および  $\sqrt{\tau_s/\rho}$  で定義されるが、それぞれの代表値として

$$u_{*1} = \sqrt{\bar{\tau}_b/\rho}, \quad u_{*2} = \sqrt{\bar{\tau}_s/\rho} \quad \dots \dots \dots (6)$$

で定義される  $u_{*1}$  および  $u_{*2}$  でおき換えててしまうことである。このような単純な近似法は、局部的にせん断応力の不均一性が激しい場合には修正されるべきであろうが、分割が適切であれば、分割部分内での微細な不均一性の議論を省略しても、かなりの精度を期待してよいであろう。(4) 式の  $u_{*b}$  および  $u_{*s}$  を  $u_{*1}$  および  $u_{*2}$  でおき換え、せん断応力の不均一性をあらわすパラメーターとして、

$$\alpha = u_{*1}/u_{*2} \quad \dots \dots \dots (7)$$

を用いれば、流水断面積の分割線の方程式は、結局

$$y = (M_1^a/M_2) z^\alpha \quad \dots \dots \dots (4')$$

となる。したがつて底面および側壁の支配面積  $A_1$  および  $A_2$  は、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \int_0^{z_0} \left( \frac{B}{2} - \frac{M_1^a}{M_2} z^\alpha \right) dz = z_0 \left( \frac{B}{2} - \frac{1}{\alpha+1} \frac{M_1^a}{M_2} z_0^\alpha \right) \\ A_2 &= \int_0^{(M_1^a/M_2) z_0^\alpha} \left\{ H - \left( \frac{M_2}{M_1^a} y \right)^{1/\alpha} \right\} dy \\ &= \frac{M_1^a}{M_2} z_0^\alpha \left( H - \frac{\alpha}{\alpha+1} z_0 \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (8)$$

であり、積分上限値  $z_0$  は図-1 に例示されるように

$$\left. \begin{aligned} \frac{M_1^a}{M_2} H^\alpha &\leq \frac{B}{2} のとき, z_0 = H \\ \frac{M_1^a}{M_2} H^\alpha &\geq \frac{B}{2} のとき, z_0 = \left( \frac{M_1^a}{M_2} \frac{B}{2} \right)^{1/\alpha} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (9)$$

である。

いま、Einstein, H.A. にならって、両分割面積に関する径深として  $R_1$  および  $R_2$  を

$$R_1 = 2 A_1 / B, \quad R_2 = A_2 / H \quad \dots \dots \dots (10)$$

で定義すれば、(5) 式および (6) 式から、

$$u_{*1} = \sqrt{g I_e R_1}, \quad u_{*2} = \sqrt{g I_e R_2} \quad \dots \dots \dots (11)$$

であり、(7) 式は

$$\alpha = (R_1/R_2)^{1/2} \quad \dots \dots \dots (7')$$

となる。さらに、(10) 式で与えられる  $R_1$  および  $R_2$  は (8) 式の  $A_1$ ,  $A_2$  を用いて、

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= z_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha+1} \frac{(M_1^a/M_2) z_0^\alpha}{B/2} \right\} \\ R_2 &= \frac{M_1^a}{M_2} z_0^\alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{z_0}{H} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (10')$$

と書きあらわすことができるから、(7') 式に (10') 式を代入して、 $\alpha$  に関する方程式として、

$$\alpha = \left[ z_0 \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha+1} \frac{(M_1^a/M_2) z_0^\alpha}{B/2} \right\} \right]^{1/2} \quad (M_1^a/M_2) z_0^\alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha+1} \frac{z_0}{H} \right]$$

が得られる。そして、水深の水路半巾に対する無次元量

$$\gamma = 2 H / B \quad \dots \dots \dots (12)$$

を導入すれば、 $z_0$  は (9) 式に与えられているから、結局パラメーター  $\alpha$  の満足すべき条件は

$$\left. \begin{aligned} \alpha \geq \gamma : \frac{M_1^a}{M_2} H^{\alpha-1} &= \frac{\alpha+1}{\alpha^2+\gamma}, \\ \text{or } \frac{M_1^a}{M_2} \left( \frac{B}{2} \right)^{\alpha-1} &= \frac{(\alpha+1)\gamma^{1-\alpha}}{\alpha^2+\gamma} \\ \alpha \leq \gamma : \frac{M_1^a}{M_2} H^{\alpha-1} &= \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\alpha^2+\gamma}{\alpha(\alpha+1)} \right\}^\alpha, \\ \text{or } \frac{M_1^a}{M_2} \left( \frac{B}{2} \right)^{\alpha-1} &= \left\{ \frac{\alpha^2+\gamma}{\gamma \alpha(\alpha+1)} \right\}^\alpha \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (13)$$

となる。

なお、長方形断面水路であることに着目すれば、流水全断面積  $A$  および径深  $R$  は

$$A = HB, \quad R = \frac{1}{1+\gamma} H = \frac{\gamma}{1+\gamma} \frac{B}{2} \quad \dots \dots \dots (14)$$

であるから、(8) および (10') 式は

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\gamma} \frac{A}{2}, \quad A_2 = \frac{\gamma}{\alpha^2+\gamma} \frac{A}{2} \\ R_1 &= \frac{\alpha^2}{\alpha^2+\gamma} H, \quad R_2 = \frac{\gamma}{\alpha^2+\gamma} \frac{B}{2} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (15)$$

となり、また水深の無次元化にならって、径深の水路半

巾に対する無次元量を  $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$  とおけば、

$$\begin{aligned}\Gamma &= 2R/B = \gamma/(1+\gamma), \quad \Gamma_1 = 2R_1/B = a^2\gamma/(a^2+\gamma), \\ \Gamma_2 &= 2R_2/B = \gamma/(a^2+\gamma) \end{aligned} \quad (16)$$

である。さて、流水全断面の平均流速  $U$  は

$$U = \frac{1}{A_1 + A_2} \left( \int_{A_1} u_1 dA_1 + \int_{A_2} u_2 dA_2 \right)$$

である。(1) 式の対数速度分布を用いて、各分割面積に関する積分を遂行すれば、

$$\left. \begin{aligned} a \geq \gamma : U &= \frac{u_{*1}}{\kappa} \left\{ \log_e(M_1 H) - 1 - \frac{1}{a} + \frac{a}{a^2 + \gamma} \right\} \\ &= \frac{u_{*2}}{\kappa} \left\{ \log_e(M_2 B/2) - 1 - a + \frac{a^2}{a^2 + \gamma} + \log_e \frac{\gamma(a+1)}{a^2 + \gamma} \right\} \\ a \leq \gamma : U &= \frac{u_{*1}}{\kappa} \left\{ \log_e(M_1 H) - 1 - \frac{1}{a} + \frac{\gamma}{a^2 + \gamma} \right. \\ &\quad \left. + \log_e \frac{a(a+1)}{a^2 + \gamma} \right\} = \frac{u_{*2}}{\kappa} \left\{ \log_e(M_2 B/2) - 1 - a + \frac{a\gamma}{a^2 + \gamma} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

が得られる。一方水路全潤辺の平均せん断応力に関する摩擦速度  $U_{*R}$  は、

$$U_{*R} = \sqrt{g I_e R}$$

であるから、(11) 式および (15) 式から、

$$u_{*1} = U_{*R} \alpha \sqrt{(1+\gamma)/(a^2+\gamma)}, \quad u_{*2} = U_{*R} \sqrt{(1+\gamma)/(a^2+\gamma)} \quad (18)$$

であり、抵抗項  $U/U_{*R}$  は

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{U_{*R}} &= \frac{\alpha_1}{\kappa} \left\{ \log_e(M_1 R_1) - 1 + \beta_1 \right\}, \\ \text{or} &= \frac{\alpha_2}{\kappa} \left\{ \log_e(M_2 R_2) - 1 + \beta_2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここに、

$$\alpha_1 = a \sqrt{(1+\gamma)/(a^2+\gamma)}, \quad \alpha_2 = \sqrt{(1+\gamma)/(a^2+\gamma)} \quad (20)$$

および  $a \geq \gamma$  に対して、

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \log_e \left( \frac{a^2 + \gamma}{a^2} \right) + \frac{a}{a^2 + \gamma} - \frac{1}{a}, \\ \beta_2 &= \log_e(a+1) + \frac{a^2}{a^2 + \gamma} - a \end{aligned} \right\} \quad a \leq \gamma \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_1 &= \log_e \left( \frac{a+1}{a} \right) + \frac{\gamma}{a^2 + \gamma} - \frac{1}{a} \\ \beta_2 &= \log_e \left( \frac{a^2 + \gamma}{\gamma} \right) + \frac{a\gamma}{a^2 + \gamma} - a \end{aligned} \right\} \quad a \geq \gamma$$

のようであらわされる。

水深に比較して水路巾がいちじるしく大きい場合には  $r \rightarrow 0$ 、したがって  $\alpha_1 \rightarrow 1, R_1 \rightarrow H, \beta_1 \rightarrow 0$  および  $U_{*R} \rightarrow U_{*H} (= \sqrt{g I_e H})$  であるから、(19) 式は平板上の二次元流の抵抗則

$$\frac{U}{U_{*H}} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \log_e(M_1 H) - 1 \right\} \quad (22)$$

に合致し、また水深が水路巾に比較していちじるしく大きい場合には、 $r \rightarrow \infty$ 、したがって  $\alpha_2 \rightarrow 1, R_2 \rightarrow B/2, \beta_2 \rightarrow 0$  および  $U_{*R} \rightarrow U_{*B} (= \sqrt{g I_e B/2})$  であるから、平行壁間の二次元流の抵抗則

$$\frac{U}{U_{*B}} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \log_e(M_2 B/2) - 1 \right\} \quad (22')$$

に合致する。

### 3. パラメーター $a$ の計算

(19) 式に得られた長方形断面開水路水流の抵抗項  $U/U_{*R}$  の特性を具体的にあらわすためには、(13) 式を解いて、底面と側壁との摩擦速度の比をあらわすパラメーター  $a$  の値を算定しなければならない。

(13) 式にふくまれる  $M_1$  および  $M_2$  は、それぞれの面の粗滑の状態によって異なる形式をとるものであり、

(2) 式に示したように、砂粒粗面の場合には、砂粒粒径  $k_s$  によって与えられる常数であって、水深に無関係であるが、滑面の場合には、壁面の摩擦速度が関係するから、各支配断面の径深の  $1/2$  乗に比例する。また粗面の状態によっては、砂粒粗面と異なる抵抗特性を有することも考えられるから、一般的取り扱いとしては、 $M_1$  および  $M_2$  を各支配断面の径深の関数と見なすべきであろう。そして、滑面の場合を参照して、その関係を指數形で与えれば、砂粒粗度の場合は指数が 0 と考えればよいから、いま径深に無関係に面の粗滑をあらわす常数として、新たに  $K$  および  $\theta$  を定義し、

$$M_1 = K_1 R_1^{\theta_1}, \quad M_2 = K_2 R_2^{\theta_2} \quad (23)$$

とおくことにして。ここに添字 1, 2 はそれぞれ底面および側壁の区別をあらわす。なお  $M_1$  および  $M_2$  は長さの逆数の元を有するから、 $\theta_1$  および  $\theta_2$  は無次元であるが、 $K_1$  および  $K_2$  はそれぞれ長さの  $-(\theta_1 + 1)$  乗および  $-(\theta_2 + 1)$  乗の元を有する。

$a$  に関する方程式 (13) 式に  $M_1, M_2$  の一般形として (23) 式を代入し、 $R_1, R_2$  に (15) 式の関係を用いれば、 $a$  の方程式は、

$$\left. \begin{aligned} a \geq r : & \frac{K_1 a}{K_2} \left( \frac{B}{2} \right)^{a(\theta_1 + 1) - (\theta_2 + 1)} \\ &= a^{-2a\theta_1} (a+1) (a^2 + \gamma)^{a\theta_1 - (\theta_2 + 1)} r^{(\theta_2 + 1)} - a(\theta_1 + 1) \\ a \leq r : & \frac{K_1 a}{K_2} \left( \frac{B}{2} \right)^{a(\theta_1 + 1) - (\theta_2 + 1)} \\ &= a^{-a(1+2\theta_1)} (a+1) - a(a^2 + \gamma)^{a(\theta_1 + 1) - \theta_2} r^{\theta_2 - a(\theta_1 + 1)} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

と整頓される。上式を展開して、 $a$  の一般解を代数的に求めることは困難であり、 $a$  の数値は挿入法によって求めることになるが、(24) 式の左辺に  $r$  がふくまれてなく、しかも  $a$  が乗べきの指数にだけふくまれていることに着目すれば、図表を用いて比較的、容易に  $a$  の数値を見出すことが可能である。すなわち (24) 式の両辺の対数をとり、左辺を  $F_l$ 、右辺を  $F_r$  とおくことすれば、

$$F_l = a \log_{10} K_1 (B/2)^{\theta_1 + 1} - \log_{10} K_2 (B/2)^{\theta_2 + 1}$$

$$a \geq r : F_r = \theta_1 a \log_{10} \frac{a^2 + \gamma}{a^2} + \theta_2 \log_{10} \frac{\gamma}{a^2 + \gamma} + \log_{10} \frac{r(a+1)}{r^a (a^2 + \gamma)}$$

$$a \leq r : F_r = \theta_1 a \log_{10} \frac{a^2 + \gamma}{a^2} + \theta_2 \log_{10} \frac{\gamma}{a^2 + \gamma} + a \log_{10} \frac{a(a^2 + \gamma)}{a^2 \gamma (a+1)}$$

とあらわされるから、 $F_l \sim a$  直線と、 $r$  をパラメーターとする  $F_r \sim a$  曲線群との交点から  $F_l = F_r$  を満足する  $a$  の値を見出すのである。

まず、 $F_l$  については、 $K_1 (B/2)^{\theta_1 + 1}$  および  $K_2 (B/2)^{\theta_2 + 1}$

がそれぞれ水路底面と側壁の粗さと水路巾に関する水路壁面の特性をあらわす無次元量であって、この両者の比は底面と側壁との相対的な粗さの割り合をあらわす。いまこれを、

$$N = K_*(B/2)^{\theta_2+1}/K_1(B/2)^{\theta_1+1} \dots \dots \dots (25)$$

とおけば、

$$F_t = (\alpha - 1) \log_{10} K_1(B/2)^{\theta_1+1} - \log_{10} N \dots \dots \dots (26)$$

である。したがって、 $F_t \sim a$  直線は点 [ $a=1$ ,  $F_t=\log_{10} N$ ] を通り、その勾配は  $\log_{10} K_1(B/2)^{\theta_1+1}$  となる。すなわち  $a=1$  における  $F_t$  の値は底面と側壁との粗骨の比だけで決定され、 $N$  が同値であるような一連の水路に対する  $F_t \sim a$  直線は、定点 [ $a=1$ ,  $F_t=\log_{10} N$ ] をとおる直線群を形成し、その勾配は、底面粗度と水路巾だけで決定される。一方底面粗度に関する特性値  $K_1(B/2)^{\theta_1+1}$  が同値であるような一連の水路に対する  $F_t \sim a$  直線は、勾配一定の平行線群を形成することになる。なお  $N$  の値は底面が側壁より粗いとき 1 よりも大であり、反対に側壁の方が粗いとき 1 よりも小である。

つぎに、 $F_r$  については、

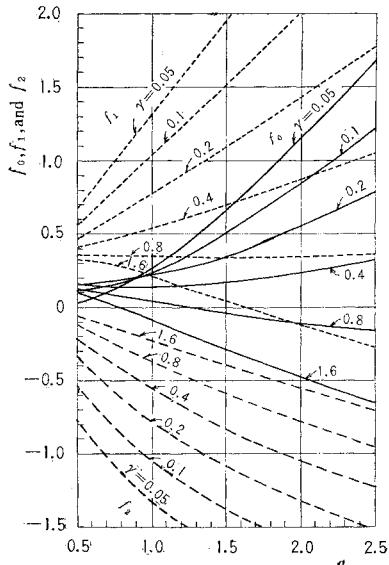
$$\left. \begin{array}{l} a \geq r : f_0 = \log_{10} \frac{r(a+1)}{r^2(a^2+r)} \\ a \leq r : f_0 = \log_{10} \frac{a(a^2+r)}{a^2r(a+1)} \\ f_1 = a \log_{10} \frac{a^2+r}{a^2r} (= -a \log_{10} F_t) \\ f_2 = \log_{10} \frac{r}{a^2+r} (= \log_{10} F_2) \end{array} \right\} \dots \dots \dots (27)$$

で定義される  $r$  および  $a$  の関数  $f_0$ ,  $f_1$  および  $f_2$  を用いて、

$$F_r = f_0 + \theta_1 f_1 + \theta_2 f_2 \dots \dots \dots (28)$$

とあらわされる。そして、 $r$  および  $a$  に対する  $f_0$ ,  $f_1$  および  $f_2$  の値をあらかじめ計算しておけば、 $\theta_1$  および

図-2  $f_0$ ,  $f_1$  および  $f_2$  の値



$\theta_2$  の種々の組み合わせに対して、比較的容易に  $F_r$  を計算することができる。図-2 はそれらの計算値を図示したものであり、実線、点線および破線がそれぞれ  $f_0$ ,  $f_1$  および  $f_2$  をあらわす。(28) 式から明らかなように、 $\theta_1 = \theta_2 = 0$  (砂粒粗度の場合) の場合には、 $f_0$  がそのまま  $F_r$  を与え、また  $f_1$  と  $f_2$  は互いに異符号をとる場合が多く、一般的に  $F_r \sim a$  曲線は  $f_0 \sim a$  曲線に酷似した線群になるであろう。

このようにして、 $a$  の値が見出されれば、抵抗項  $U/U_{*R}$  はさきの (19) 式によって算定されるが、数値計算の便宜をはかるため、 $M_1$  および  $M_2$  を (23) 式のようにあらわし、 $a$  および  $r$  に関する因子を整頓し、さらに対数を常用対数に書きあらためれば、

$$\left. \begin{array}{l} \frac{U}{U_{*R}} = \frac{2.30 \alpha_1}{\kappa} [f_{31} + \theta_1 \log_{10} \Gamma_1 + \log_{10} K_1(B/2)^{\theta_1+1}] \\ \text{or } \frac{2.30 \alpha_2}{\kappa} [f_{32} + \theta_2 \log_{10} \Gamma_2 + \log_{10} K_2(B/2)^{\theta_2+1}] \end{array} \right\} \dots \dots \dots (29)$$

となる。ここに、

$$\left. \begin{array}{l} a \geq r : f_{31} = \log_{10} r + \frac{0.43}{a} \left\{ \frac{a^2}{a^2+r} - (a+1) \right\} \\ f_{32} = \log_{10} \frac{r(a+1)}{a^2+r} + 0.43 \left\{ \frac{a^2}{a^2+r} - (a+1) \right\} \\ a \leq r : f_{31} = \log_{10} \frac{a^2r(a+1)}{a(a^2+r)} + \frac{0.43}{a} \left\{ \frac{a^2r}{a^2+r} - (a+1) \right\} \\ f_{32} = 0.43 \left\{ \frac{a^2r}{a^2+r} - (a+1) \right\} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

であり、 $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  および  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  は (20) 式および (16) 式に与えられるものである。

(29) 式は長方形断面水路の底面と側壁に未知の粗度と既知の粗度を配し、実験によって得られる  $U/U_{*R}$  の値から逆に未知の粗度に関する  $K$  および  $\theta$  を求めることも応用される。

また、(18) 式および (20) 式から、

$$\alpha_1 = u_{*1}/U_{*R}, \quad \alpha_2 = u_{*2}/U_{*R} \dots \dots \dots (20')$$

に着目すれば、底面および側壁のそれぞれの支配領域に関する諸量の関係式として、

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\kappa}{2.30} \frac{U}{u_{*1}} - \log_{10} (K_1 R_1^{\theta_1+1}) = f_{31} - \log_{10} \Gamma_1 \\ \frac{\kappa}{2.30} \frac{U}{u_{*2}} - \log_{10} (K_2 R_2^{\theta_2+1}) = f_{32} - \log_{10} \Gamma_2 \end{array} \right\} \dots \dots \dots (31)$$

が得られる。

Einstein, H.A. の側壁効果算定法における基本仮定は、分割された潤滑部分と断面積部分の相対応する一組について流れの抵抗式が不变であるということである。彼は抵抗式として Manning の平均流速公式をとっているが、同様に対数抵抗式をとれば、この基本仮定は底面および側壁のそれぞれの支配領域において、

$$\left. \begin{array}{l} \frac{U}{u_{*1}} = \frac{1}{\kappa} \{ \log_e (K_1 R_1^{\theta_1+1}) - 1 \} \\ \frac{U}{u_{*2}} = \frac{1}{\kappa} \{ \log_e (K_2 R_2^{\theta_2+1}) - 1 \} \end{array} \right\}$$

とあらわされる。したがって、この仮定が成立するためには、(31) 式の左辺が、

$$f_{31} - \log_{10} \Gamma_1 = f_{32} - \log_{10} \Gamma_2 = -0.434 \quad \dots \dots \dots (32)$$

でなければならない。 $f_{31}$ ,  $f_{32}$  および  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  は (30) 式および (16) 式に与えられるように、 $a$  および  $r$  の相異なる関数であるから、上の関係式が恒等的に成立することを期待するのは無理であるが、いま  $a$  および  $r$  を媒介にして、 $f_{31}$  と  $\Gamma_1$  および  $f_{32}$  と  $\Gamma_2$  の関係を求めれば、図-3 の実線群のようであり、(32) 式をあらわす鎖線とさほど大きなく違ひはない。同図は因の錯綜を避けるため、 $r$  の値を省略してあるが、 $r=0.05 \sim 2.0$  のかなり広範囲の水深変化に対して求めたものであり、(32) 式の近似度は一応満足できるといつてよいであろう。

図-3 (a)  $f_{31}$  と  $\Gamma_1$  との関係

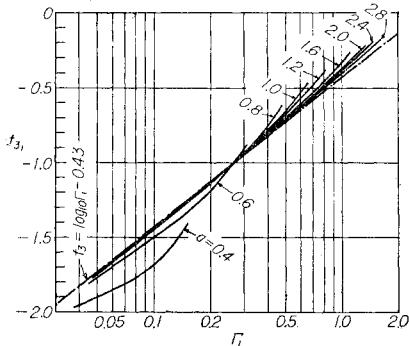
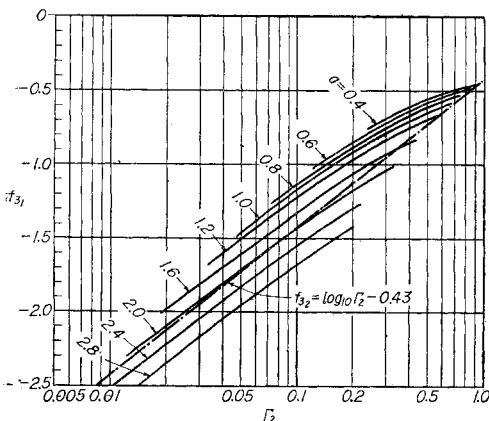


図-3 (b)  $f_{32}$  と  $\Gamma_2$  との関係



この結果は従来直観的仮定にすぎなかった Einstein の基本仮定に一つの拠点を与えるものであり、とくに図-3 における曲線群の集中度から長方形断面水路の少なくとも底面の支配断面については、底面に関する径深  $R_1$  が二次元流における水深に代わる特性長であると結論することができよう。

#### 4. 潤辺粗度が均一な長方形断面水路

潤辺粗度が均一な水路の水流に対して、従来側壁の効

果は実用上径深  $R$  を特性長に選べばよいと「されているが、前記の断面積分割法からこれを検討してみよう。

まずパラメーター  $a$  の算定において、底面と側壁の粗度が等しいことから、 $N=1$  である。したがって

$$K_1 = K_2 = K, \theta_1 = \theta_2 = \theta$$

とおいて、(26) 式および (28) 式は、

$$F_t = (a-1) \log_{10} \{K(B/2)^{\theta+1}\} \quad \dots \dots \dots (33)$$

$$F_r = f_0 + \theta(f_1 + f_2) \quad \dots \dots \dots (34)$$

となる。(33) 式から明らかのように、 $a=1$  のとき  $F_t = 0$  であり、 $F_t = F_r$  の条件から  $F_r$  も  $\theta$  の値にかかわらず 0 でなければならない。すなわち、

$$|f_0|_{a=1} = 0, |f_1 + f_2|_{a=1} = 0$$

であり、(27) 式の定義から、 $r=1$  である。したがって、潤辺粗度が均一の場合には、粗度および水路巾にかかわらず、 $a=1$  は  $r=1$  に対応する。

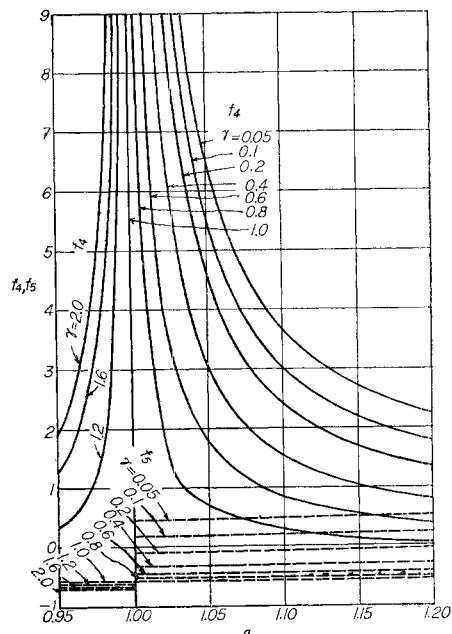
$a \neq 1$  の場合に対して、

$$f_4 = f_0/(a-1), f_5 = (f_1 + f_2)/(a-1) \quad \dots \dots \dots (35)$$

とおけば、 $F_t = F_r$  の条件は (33) 式および (34) 式から、

$$\log_{10} \{K(B/2)^{\theta+1}\} = f_4 + \theta f_5 \quad \dots \dots \dots (36)$$

図-4  $f_4$  と  $f_5$  の値



となる。 $f_4$  および  $f_5$  は  $a$  と  $r$  の関数であり、それらの値を図示すれば、図-4 のようである。図に見られるように、 $f_5$  は  $f_4$  に比較して小さく、とくに  $a$  に対してはほとんど変化のないことが注目される。そして、(36) 式において  $\theta$  の大きさも、たかだか 1 の程度と考えられるから、右辺第 2 項は第 1 項に比較してかなり小さく、 $\{K(B/2)^{\theta+1}\}$  と  $a$  および  $r$  との関係は  $f_4$  の曲線群によって類推することができる。すなわち、水路の特性をあらわす無次元量  $\{K(B/2)^{\theta+1}\}$  の値が大きいほど、 $r$  の

変化に対応する  $\alpha$  の変化は小さく、 $\alpha$  の値はきわめて 1 に近い。そして  $r$  の変化に応じて、 $\alpha$  の値が 1 から離れて明瞭な変化を示すのは、 $\{K(B/2)^{\theta+1}\}$  の値がかなり小さい場合に限られる。

抵抗項  $U/U_{*R}$  はさきの (19) 式あるいは (29) 式によって算出されるが、これを径深  $R$  で書き換えれば、

$$\frac{U}{U_{*R}} = \frac{\alpha_1}{\kappa} \left[ \log_e(MR) - 1 + (\theta+1) \log_e \left\{ \frac{\alpha^2(1+r)}{\alpha^2+r} \right\} + \beta_1 \right]$$

$$\text{or } \frac{\alpha_2}{\kappa} \left\{ \log_e(MR) - 1 + (\theta+1) \log_e \left( \frac{1+r}{\alpha^2+r} \right) + \beta_2 \right\}$$

.....(37)

となる。ここに  $M=KR^\theta$  である。

(37) 式に対して、よく知られている Keulegan, G. H. の提案式は、水路断面形状の補正係数を  $\beta_K$ 、せん断応力の不均一性に関する補正係数を  $\bar{\epsilon}$  とおいて、次式で与えられる。

$$\frac{U}{U_{*R}} = \frac{1}{1+\bar{\epsilon}} - \frac{1}{\kappa} [\log_e(MR) - 1 + \beta_K] \quad \dots\dots\dots(38)$$

両者を対比すれば

$$1/(1+\bar{\epsilon}) \rightarrow \alpha_1, \quad \text{or } \alpha_2$$

$$\beta_K \rightarrow (\theta+1) \log_e \frac{\alpha^2(1+r)}{\alpha^2+r} + \beta_1, \quad \text{or } (\theta+1) \log_e \frac{1+r}{\alpha^2+r} + \beta_2$$

である。しかしながら、Keulegan は補正係数の算出にあたって、流水断面積の各分割部分における流水の平衡条件を考慮しないで、流水断面積の分割線として隅角の二等分線をとり、さらに最終的には  $\bar{\epsilon}$  を省略することにしているから、結局彼の補正係数は、最初から  $\alpha=1$  と仮定したことになる。事実、 $\alpha=1$  したがって  $r=1$  のとき両者は合致し、 $\alpha_1=\alpha_2=1$ 、 $\beta_1=\beta_2=\beta_K=0.193$  である。実用上の目的からすれば、多くの場合  $\alpha$  は 1 に近い値をとるであろうから、両者の差異はきわめて小さく、従来から行なわれているように、さらにそれらの補正項を平均的に常数とみなして、 $M$  にふくめることも許されるであろうが、(37) 式は側壁の効果が本質的には、水路巾および水深だけでなく、潤辺の粗滑の状態によって相違するものであることをあらわしている。

実際に  $\alpha$  の値を見出し、(37) 式を数値的に求めるには、 $K$  および  $\theta$  が与えられねばならない。つぎにその一例として、滑面水路と砂粒粗面水路の場合をとりあげてみよう。

### (1) 全潤辺が滑面の場合

滑面の  $K$  および  $\theta$  は、(2) 式、(11) 式および (23) 式から、

$$K = \sqrt{gT_e/m_s}, \quad \theta = 1/2 \quad \dots\dots\dots(39)$$

で与えられる。そして、水路半巾を長さの元とする Reynolds 数として、

$$\sqrt{gT_e(B/2)(B/2)/\nu} = R_{eB} \quad \dots\dots\dots(40)$$

とおけば、 $\alpha$  と  $r$  との関係を決定づける無次元量は

$$K(B/2)^{\theta+1} = R_{eB}/m_s \quad \dots\dots\dots(39')$$

である。 $m_s$  の値に Nikuradse の実験値 1/9 を採用

図-5 全潤辺滑面の長方形断面水路における  $\alpha$  と  $r$  との関係

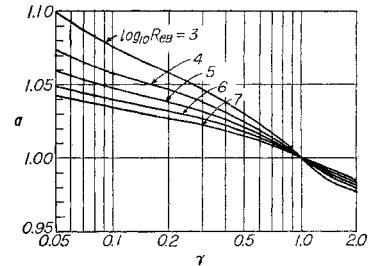
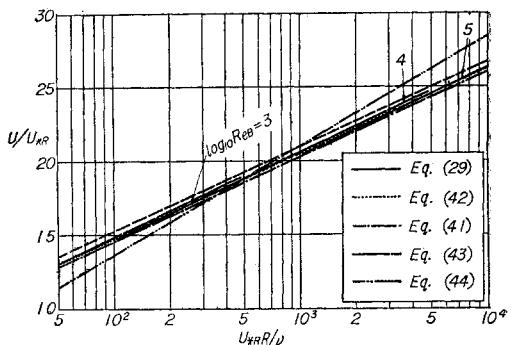


図-6 滑面水路の抵抗項



し、前記の手順に従って、二、三の  $R_{eB}$  に対する  $\alpha$  と  $r$  との関係を求めれば、図-5 のようである。図に見られるように、 $R_{eB}$  の値が小さいほど  $\alpha$  の変化は大きいが、通常の水路に対しては、 $\alpha$  の値はきわめて 1 に近いということができる。つぎに、(29) 式にこれらの関係を代入し、 $\kappa=0.4$  の値を用いて抵抗項  $U/U_{*R}$  を求め、さらに  $R_{eB}T^{3/2}=U_{*R}R/\nu$  に着目して、 $U/U_{*R} \sim U_{*R}R/\nu$  の曲線を図示すれば、図-6 の実線のようである。同図における鎖線、点線、破線および 2 点鎖線は、それぞれ

$$\frac{U}{U_{*R}} = 3.0 + 5.75 \log_{10} \left( \frac{U_{*R}R}{\nu} \right)$$

(二次元流抵抗則 (22) 式における水深)  
( $H$  を単純に径深  $R$  におきかえた近似式) .....(41)

$$\frac{U}{U_{*R}} = 3.25 + 5.75 \log_{10} \left( \frac{U_{*R}R}{\nu} \right)$$

( $\beta_K=0.1$  とおいた Keulegan の提案式) .....(42)

$$\frac{U}{U_{*R}} = 3.8 + 5.75 \log_{10} \left( \frac{U_{*R}R}{\nu} \right)$$

(岩垣博士の実験公式) .....(43)

および

$$\frac{U}{U_{*R}} = -1.13 + 7.41 \log_{10} \left( \frac{U_{*R}R}{\nu} \right)$$

(Powell の実験公式注) .....(44)

をあらわし、各公式とも大差はなく、実用上、径深  $R$  が側壁の効果を代表すると考えて十分であるが、著者の断面分割法によれば、 $R_{eB}$  の値によって側壁の効果が異なり、またわずかではあるが、抵抗曲線の勾配が大きく、側壁の効果があたかも Kármán 常数  $\kappa$  を 0.4 よ

注: Powell の実験式は Chézy 常数  $C$  で提案され、ft, sec 単位で  $C=42 \log_{10}(4 R_e/C)$  ただし、 $R_e=UR/\nu$  と書きあらわされているが、これを変形すれば (44) 式のようになる。

りも小さいもののように見せかけることになる。

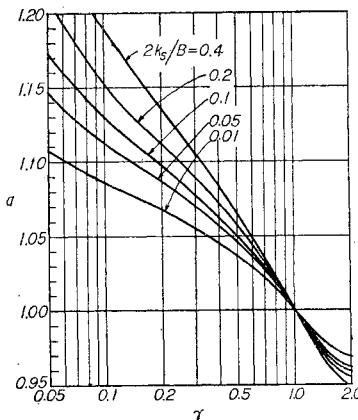
## (2) 全潤辺が砂粒粗面の場合

全潤辺が一様な粒径  $k_s$  の砂粒でおおわれ、水理学的に粗面であって、かつ砂粒の移動のない場合は、

$$K = 1/m_r, \theta = 0, K(B/2)^{\theta+1} = 1/m_r(2k_s/B) \dots\dots (43)$$

であり、水路半巾に対する砂粒粒径の比が側壁効果を決定づけるパラメーターとなる。滑面の場合と同様にして、Nikuradse の実験値  $m_r = 1/30$  を用いて、 $a$  と  $r$  との関係を求めれば、図-7 が得られる。 $a$  は 1 に近い値をとるが、その変化は滑面の場合よりも大きく、一般に粗度の大きいほど、 $a$  の変化が大きいことを示している。このことは Straub, L.G. ら<sup>4)</sup>が、滑面水路においては側壁の効果をほとんど認められないが、粗面水路においてはわずかながらその影響があるように思われるとして述べていることを説明づけるものとして興味深い。

図-7 全潤辺砂粒粗度の長方形断面水路における  $a$  と  $r$  との関係



えられる。同図には、

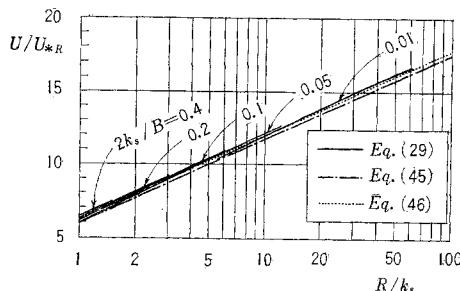
$$\frac{U}{U_{*R}} = 6.0 + 5.75 \log_{10}\left(\frac{R}{k_s}\right) \quad (\text{二次元流抵抗則 (22) 式における水深}) \dots\dots (45)$$

$H$  を単純に径深  $R$  におきかえた近似式)

および

$$\frac{U}{U_{*R}} = 6.25 + 5.75 \log_{10}(R/k_s) \quad (\beta_K = 0.1 \text{ として提案された Keulegan の式}) \dots\dots (46)$$

図-8 砂粒粗度水路の抵抗項



を比較のためそれぞれ鎖線および点線で記入してある。滑面の場合と同様に各式の差は小さいが、著者の式によれば、側壁の効果は  $(2k_s/B)$  をパラメーターとして与えられ、その抵抗曲線の勾配は従来の式に比較して、やや大である。

## 5. 両側壁が滑面の長方形断面水路

抵抗項の数値計算に関する一般的取り扱いはさきに述べたとおりであるが、その計算例として、よく用いられる両側壁が滑面の場合をとりあげてみよう。

両側壁が滑面であるから、(39') 式にならって、側壁粗度の特性を与える無次元量は、

$$K_s(B/2)^{\theta_2+1} = R_{eB}/m_s = 9R_{eB}$$

である。いま底面が砂粒粗面であれば、同様に (43) 式にならって、

$$K_s(B/2)^{\theta_1+1} = 1/m_r(2k_s/B) = 30/(2k_s/B)$$

となり、(26) 式の  $F_t$  は、

$$F_t = a \log_{10}\{30/(2k_s/B)\} - \log_{10}(9R_{eB})$$

である。また  $\theta_1 = 0, \theta_2 = 1/2$  であるから、

$$F_r = f_0 + \frac{1}{2}f_1$$

となる。 $a$  に関する条件は、 $F_t = F_r$  であったから、上式から、 $F_t \sim a$  および  $F_r \sim a$  の関係を図上に求め、両者の交点から所要の  $a$  と  $r$  との関係を見出すことができる。図-9 はその一例であるが、同図から、 $R_{eB}$  の値が小さく、また  $2k_s/B$  の値が小さいほど、 $a$  の値は 1 に近く、 $r$  に対する変化も小さいことがわかる。

$a$  の値が見出されれば、抵抗項  $U/U_{*R}$  は (29) 式において、 $\kappa = 0.4$  において、

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{U_{*R}} &= 5.75 \alpha_1 \left\{ f_3 + \log_{10}\left(30 \frac{2k_s}{B}\right) \right\} \\ \text{or } &= 5.75 \alpha_2 \left\{ f_3 + \frac{1}{2} \log_{10} F_2 + \log_{10}(9R_{eB}) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (47)$$

図-9  $F_t \sim a$  および  $F_r \sim a$  曲線の一例

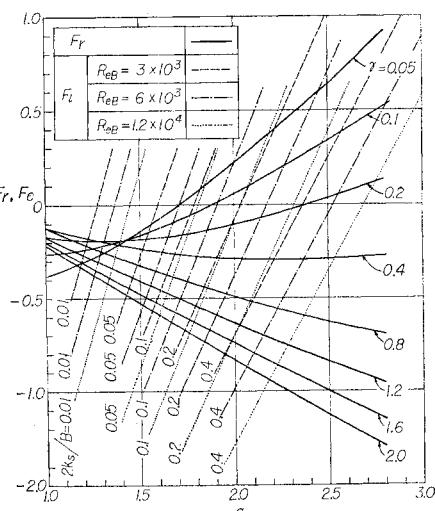
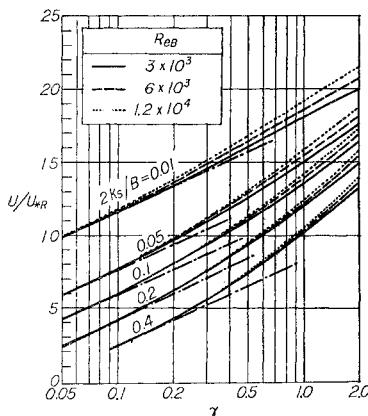


図-10 両側壁滑面、底面砂粒粗面の長方形断面水路に関する抵抗項



壁の効果をあらわしている。

砂粒粗度以外の粗度についても、いわゆる相当砂粒粗度が既知であれば、図-10と全く同様にして、その抵抗項を見出すことができる。また逆に、両側壁滑面の長方形断面水路を用いて得られる抵抗項  $U/U_{*R}$  の実験値を図-10にプロットして、その底面の粗度に関する相当砂粒粗度を見出すこともできる。

## 6. 運動量の流速分布に対する補正係数

等流でない流れの平均流速を議論する場合に、運動量の流速分布に対する補正係数  $\alpha$  の値が問題となることが多い。 $\alpha$  は、

$$\alpha = \left( \frac{1}{A} \int_A u^2 dA \right) U^2$$

で定義され、一般に 1 に近い数値をとるものであるが、二次元流に対して、対数速度分布則を適用すれば、

$$\alpha = 1 + \left( \frac{1}{\kappa} \frac{U_{*R}}{U} \right)^2 \quad \dots \dots \dots \quad (48)$$

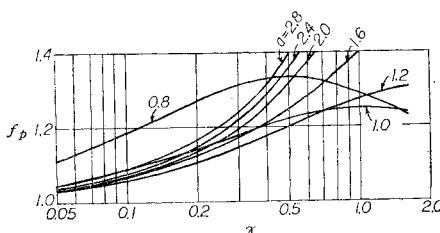
である。これに対して、流水断面分割法によって側壁の効果を考慮すれば、

$$\alpha = 1 + f_0 \left( \frac{1}{\kappa} \frac{U_{*R}}{U} \right)^2 \quad \dots \dots \dots \quad (49)$$

ここに、 $a \geq r$  のとき、

$$\left. \begin{aligned} f_0 &= a^2 \left\{ 1 + \frac{2r(1+a-a^2)}{a^2(a+1)(a^2+r)} - \frac{1}{a^2} \left( \frac{r}{a^2+r} \right)^2 \right\} \\ &= a^2 \left\{ 1 + \frac{2a^3(a^2+a-1)}{(a+1)(a^2+r)} - \left( \frac{a^2}{a^2+r} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (49)$$

図-11  $f_0 \sim r$  曲線の一例



から算出される。図-10 は二、三の  $R_{eB}$  および  $2k_s/B$  の値に対する計算結果の一例であり、同図の鎖線は、側壁を全く無視して、(22) 式の二次元流抵抗則から求めたものである。そして、この鎖線からの偏差が側

となり、 $\alpha$  および  $r$  の関数である係数  $f_0$  がつけ加えられる。(50) 式に与えられる  $f_0$  を図示すれば、図-11 のようであり、通常  $f_0$  は 1 よりも大きく、二次元流の場合にくらべて、 $\alpha$  はやや大きい値をとることになる。

## 7. 結 言

以上、開水路水流の基礎実験に関する長方形断面水路の側壁効果について論じたが、その結論を列挙すれば、つぎのようである。

1. 流水断面積が底面および側壁の支配領域に分割できるという仮定のもとに、それぞれの分割断面積にふくまれる流水の平衡条件から、分割線を定め、側壁の効果を考慮した流水抵抗の算定式を導いた。

2. 分割線を決定する要素として、水深、水路巾だけでなく、水路壁面の粗度がつけ加えられるべきことを示した。また Einstein, H.A. の断面積分割法に関する直観的仮定が実用上成立することを説明づけた。

3. 実用上の目的に対しては、側壁の効果を径深  $R$  に代表せしめることが可能であるが、本質的には水路壁面の粗度にも影響され、滑面に対しては、 $R_{eB} [= \sqrt{gJ_e(B/2)}(B/2)/r]$  が、砂粒粗面に対しては、 $2k_s/B$  が重要なパラメータであることを指摘した。

4. 側壁の効果を考慮した運動量の流速分布に対する補正係数  $\alpha$  は、二次元流における値より大きくなることを示した。

なお、ここに得られた算定式は、従来の側壁効果に関する基本仮定の不明瞭さを補足するものではあるが、実用上の便宜さからさらには検討を要するであろう。この点は、本考察の実証もかねて、人工粗度の抵抗特性に関する実験結果とともに別に報告する予定である。

最後に本研究の遂行にあたって、たえず御指導、御鞭撻を賜わった矢野勝正教授、石原藤次郎教授、岩垣雄一教授に、深く感謝の意を表する次第です。

## 参 考 文 献

- Keulegan, G.H. : Laws of Turbulent Flow in Open Channels, Jour. of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 21, Dec. 1938, pp. 707~741.
- Powell, R.W. : Flow in a Channel of Definite Roughness, Trans. Amer. Soc. Civ. Engr., Vol. 111, 1946, pp. 531~566.
- Einstein, H.A. : Formulas for Bed-Load Transportation, Trans. Amer. Soc. Civ. Engr., Vol. 107, 1942 pp. 575~577.
- Straub, L.G. • Silberman, E. and Nelson, H.C. : Some Observations on Open Channel Flow at Small Reynolds Numbers, Proce. Amer. Soc. Civ. Engr., Vol. 82, July, 1956, pp. 1031.1~28.
- Goldstein, S. : Modern Developments in Fluid Dynamics, Oxford Univ. Press. London E.C., Vol. 1, 1938, pp. 208~209.

(原稿受付: 1961.9.5)

## THE EFFECTS OF SIDE WALLS IN RECTANGULAR CROSS SECTIONAL CHANNEL

*By Shohei Adachi, C.E. Member*

Many experimental flumes for basic studies on the resistance to flow have rectangular cross section. There are often needs to estimate the effects of side walls. Particularly, in case of model experiments it becomes very important requirement for similitude between model and prototype, owing to distortion of linear scale and roughness composition.

The effects of side walls on turbulent flow were studied by G. H. Keulegan, P.W. Powell and H. A. Einstein on the basis of the partition of water cross sectional area, and in conclusion, the resistance formula on two dimensional flow is useful for practical purposes, if water depth is replaced by hydraulic radius on entire or partitioned area and a few constants are added.

The author does not object to this practical use, but it seems the assumptions is intuitional yet. Indeed, L. G. Straub and others described in their papers, that there were only a negligibly small channel shape effect on smooth, turbulent flow and a somewhat more pronounced effect on rough, turbulent flow. In this paper the author reexamines the intuitional assumptions and intends to explain a principle of estimating the effects of side walls on turbulent flow in a rectangular cross sectional channel.

It is true that the problems of side walls should be treated as a three dimensional turbulent flow, but it is very difficult to solve strictly. Then it is assumed that water cross area may be partitioned into two parts corresponding to bottom and side walls and in each part flow is two dimensional. This assumption may be permitted, except near the corners of section, because empirically velocity contour lines on water cross section run almost parallel with bottom and side walls. In using such an assumption, the condition of dynamic equilibrium in each partitioned area should be satisfied respectively.

Considering that the flow in partition areas

are independent of each other, shearing stress on the partition line should be zero. Accordingly,

$$\bar{\tau}_b B = 2 A_1 \rho g I_e \quad \text{and} \quad \bar{\tau}_s H = A_2 \rho g I_e \quad \dots \dots \dots (1)$$

where  $B$ =width of the channel,  $H$ =water depth,  $\bar{\tau}_b$  and  $\bar{\tau}_s$ =the average shearing stress on bottom and side walls respectively,  $2A_1$  and  $A_2$ =partitioned area corresponding to bottom and side walls respectively,  $\rho$ =density of the fluid,  $g$ =acceleration due to gravity, and  $I_e$ =slope of energy line.

Using the logarithmic law, the velocities in partitioned areas corresponding to bottom and side walls are respectively.

$$\frac{u_1}{u_{*1}} = \frac{1}{\kappa} \log_e(M_1 z), \quad \text{and} \quad \frac{u_2}{u_{*2}} = \frac{1}{\kappa} \log_e(M_2 y) \quad (2)$$

where  $u_1$  and  $u_2$ =velocities at a distance  $z$  from bottom and a distance  $y$  from side wall respectively,  $u_{*1}$  and  $u_{*2}$ =friction velocities of bottom ( $=\sqrt{\bar{\tau}_b}/\rho$ ) and side wall ( $=\sqrt{\bar{\tau}_s}/\rho$ ) respectively,  $M_1$  and  $M_2$ =constants related with roughness of bottom and side walls respectively, and  $\kappa$ =Kármán constant.

On the partition line it should be satisfied  $u_1 = u_2$ , hence the partition line is given by

$$y = (M_1^\alpha/M_2) z^\alpha \quad \dots \dots \dots (3)$$

where

$$\alpha = u_{*1}/u_{*2} \quad \dots \dots \dots (4)$$

$\alpha$  is an index relating to inequality of shearing stress.

Using (3), and putting  $r=2H/B$ ,  $A_1$  and  $A_2$  can be obtained as a function of  $\alpha$  and  $r$ .

From (1) and (4), the equation of  $\alpha$  is obtained as follows:

$$\left. \begin{aligned} \alpha \geq r : \frac{M_1^\alpha}{M_2} \left( \frac{B}{2} \right)^{\alpha-1} &= \frac{(a+1)r^{1-a}}{a^2+r} \\ \alpha \leq r : \frac{M_1^\alpha}{M_2} \left( \frac{B}{2} \right)^{\alpha-1} &= \left\{ \frac{a^2+r}{r a(a+1)^a} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Although general algebraic solution of (5) is hardly found, the values of  $\alpha$  for individual condition can be calculated easily comparatively by means of an adequate graphical method.

The constant  $M_i$  ( $i=1$  and  $2$  corresponding to the bottom and side walls respectively) have

various forms according to the kinds of roughness. For example,

$$M_i = 9 u_{*i}/\nu : \text{for smooth,}$$

$$M_i = 30/k_{si} : \text{for sand grain roughness.}$$

But they can be written as;

$$M_i = K_i R_i^{\theta_i} \quad \dots \dots \dots (6)$$

where

$$K_i = 9 \sqrt{g I_e} / \nu' \text{ and } \theta_i = 1/2 : \text{for smooth,}$$

$$K_i = 30/k_{si} \text{ and } \theta_i = 0 : \text{for sand grain roughness,}$$

and these constants are independent of the dimensions of channel section.

Substituting (6) into (5), it is found that the dimensionless parameter  $K_i (B/2)^{\theta_i+1}$  is a significant factor to estimate the effects of side walls.

$$K_i (B/2)^{\theta_i+1} = 9 \sqrt{g I_e (B/2)} (B/2)/\nu : \text{for smooth,}$$

$$K_i (B/2)^{\theta_i+1} = 30/(2 K_{Si} B) : \text{for sand grain roughness.}$$

The higher value of  $K (B/2)^{\theta_i+1}$  is, the more remarkable the variation of  $a$  against  $r$  becomes. Then, some difference of the shape effect, between the smooth and rough channels appears.

When the values of  $a$  are obtained numerically, the partition of cross section comes to a definite decision. Then, integrating (2) over each partitioned area the average velocity for the entire cross sectional area can be found as follows :

$$\left. \begin{aligned} a \geq r : U &= \frac{u_{*1}}{\kappa} \left\{ \log_e(M_1 H) - 1 - \frac{1}{a} + \frac{a}{a^2+r} \right\} \\ a \leq r : U &= \frac{u_{*2}}{\kappa} \left\{ \log_e(M_2 B/2) - 1 - a - \frac{a r}{a^2+r} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

While the hydraulic radii on the partitions are given by

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= 2 A_1 / B = \frac{a^2 r}{a^2+r} \frac{B}{2} = \frac{a^2(1+r)}{a^2+r} R \\ R_2 &= A_2 / H = \frac{r}{a^2+r} \frac{B}{2} = \frac{1-r}{a^2+r} R \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (8)$$

Moreover, the friction velocity,  $U_{*R}$  for entire perimeter can be represented as follows :

$$U_{*R} = \sqrt{g I_e R} = u_{*1} \sqrt{R/R_1} = u_{*2} \sqrt{R/R_2} \quad \dots \dots \dots (9)$$

Therefore, from (7), (8) and (9), the friction factor  $U/U_{*R}$  is obtained.

$$\left. \begin{aligned} a \geq r : \frac{U}{U_{*R}} &= \frac{a \sqrt{1+r}}{\kappa \sqrt{a^2+r}} \left\{ \log_e(M_1 R_1) - 1 + \log_e \left( \frac{a^2+r}{a^2} \right) + \frac{a}{a^2+r} - \frac{1}{a} \right\} \\ a \leq r : \frac{U}{U_{*R}} &= \frac{\sqrt{1+r}}{\kappa \sqrt{a^2+r}} \left\{ \log_e(M_2 R_2) - 1 + \log_e \left( \frac{a^2 r}{a^2+r} \right) + \frac{a r}{a^2+r} - a \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

In the former study on the effects of side walls, Einstein's method of calculating the respective hydraulic radii on the partition is famous. He assumed that the average velocity is the same for all partitioned areas, and friction formula applicable to the entire section is also applicable to each partitioned area. Using the logarithmic resistance formula, his assumption can be represented as

$$\frac{U}{u_{*i}} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \log_e(M_i R_i) - 1 \right\}, \quad (i=1,2), \quad \dots \dots \dots (11)$$

On the other hand, according to the author's consideration,

$$\frac{U}{u_{*i}} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \log_e(M_i R_i) - 1 + F_i(a, r) \right\} \quad \dots \dots \dots (12)$$

where the last term is

$$a \geq r : F_1 = \log_e \left( \frac{a^2+r}{a^2} \right) + \frac{a}{a^2+r} - \frac{1}{a},$$

$$F_2 = \log_e(a+1) + \frac{a^2}{a^2+r} - a.$$

$$a \leq r : F_1 = \log_e \left( \frac{a+1}{a} \right) + \frac{r}{a^2+r} - \frac{1}{a},$$

$$F_2 = \log_e \left( \frac{a^2 r}{a^2+r} \right) + \frac{a r}{a^2+r} - a.$$

Using the above consideration for partition of cross section, the momentum correction factor  $\alpha$  which represents to compensate for the use of average velocity is given as

$$\alpha = 1 + f(u_{*R}/\kappa U)^2 \quad \dots \dots \dots (13)$$

where

$$a \geq r : f = \frac{a^2(1+r)}{a^2+r} \left\{ 1 + \frac{2r(1+a-a^2)}{a^2(a+1)(a^2+r)} - \frac{1}{a^2} \left( \frac{r}{a^2+r} \right)^2 \right\}$$

$$a \leq r : f = \frac{1+r}{a^2+r} \left\{ 1 + \frac{2a^3(a^2+a-1)}{(a+1)(a^2+r)} - \left( \frac{a^3}{a^2+r^2} \right) \right\}$$

and  $\alpha$  in this case is greater than 1. to conclude,

1) the resistance formula on turbulent flow in open channel with a rectangular cross section is represented as (10),

2)  $K(B/2)^{\theta_i+1}$  is the significant factor to estimate the effects of side walls,

3) the base of the assumptions the partition methods is explained,

4) the formula of calculating the momentum correction factor  $\alpha$  is obtained as (13).