

行列による吊橋の解析

倉 西 茂*

要旨 本論文は補剛桁にプレートガーダーおよびトラスを用いた場合吊橋の補剛桁に働く曲げモーメントを階差式の形で求めマトリックス演算により解析を行なったものである。

格点モーメントをマトリックスで表示し吊橋としての性質を表わすマトリックスの一一致より補剛桁にトラスを用いたときのプレートガーダーと等価断面2次モーメントを導出している。

なお本論文は線形化されたたわみ度理論と対応するものである。

1. まえがき

従来吊橋の解析は吊材がケーブルと補剛桁との間に鉛直方向の引張力のみに抵抗する膜として一様に分布しているものとして微分方程式を解くことにより行なわれて来た。

しかし個々の吊材の影響を考えてケーブルと補剛桁の間の変形と応力の関係を求めて吊橋の解析を行なうと吊材を膜と考えて微分方程式より解析を進める場合に比較して次の点で便利である。

a) 補剛桁にプレートガーダーを使用した場合とトラスを使用した場合の差を計算しやすい。

b) 吊材と吊材の間に荷重を載荷した場合の影響を計算することができる。

c) 補剛桁の断面が変化する場合の影響を計算しやすい。

d) 任意のケーブル曲線のものについての解析が容易である。

しかしこのように個々の吊材の影響を考慮すると一般的の場合には多元マトリックスの逆マトリックスを求める必要があり電子計算器を利用するということになるが、補剛桁が一定断面の場合には簡単な逆マトリックスの計算により解は求められるので、その解析は一般的の計算器によってもさして困難ではない。

このように個々の吊材の影響を考えて応力と変形の間の関係を求めたものとして Grünig²⁾ や Szigarovsky³⁾ の論文があるが後者はいかに解を導びくかという点については触れられていない。また前者については直接その論文を読むことができなかった。

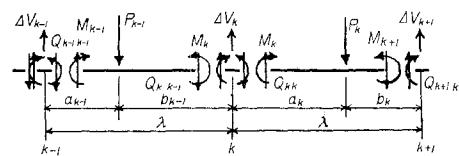
なお本論文で取り扱っている解は線形化されたたわみ度理論に対応するものである。

2. 補剛桁がプレートガーダーの場合

(1) 補剛桁に働く応力の関係

補剛桁を k 番目と $k+1$ 番目の吊材の両側で切り力の平衡を考えると 図-1 より次の関係が得られる。

Fig. 1 Forces Acting on a Stiffening Girder.



$$\left. \begin{aligned} Q_{kk} &= \frac{M_{k+1} - M_k}{\lambda} + \frac{b_k}{\lambda} P_k \\ Q_{kk-1} &= \frac{M_k - M_{k-1}}{\lambda} - \frac{a_{k-1}}{\lambda} P_{k-1} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (2.1)$$

$$\text{よって } \Delta V_k = Q_{kk} - Q_{kk-1} \quad \dots \dots \dots \quad (2.2)$$

$$\text{ここで } R_k = \frac{b_k}{\lambda} P_k + \frac{a_{k-1}}{\lambda} P_{k-1}$$

吊材間隔 λ は全径間にわたり一定とした。

(2) 補剛桁の変形と応力の関係

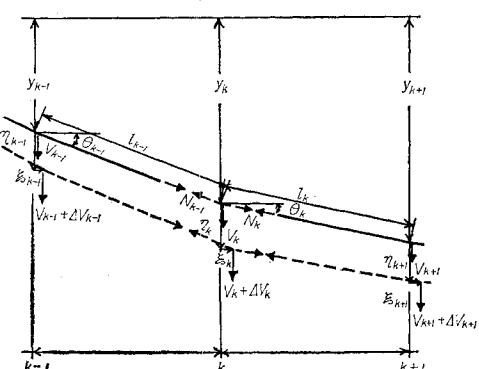
3連モーメントの定理より補剛桁の下方へのたわみ η_k と格点モーメントの関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (-\eta_{k-1} + 2\eta_k - \eta_{k+1}) &= \frac{\lambda^2}{6E} \left\{ \frac{1}{J_{k-1}} M_{k-1} + 2 \left(\frac{1}{J_{k-1}} + \frac{1}{J_k} \right) M_k + \frac{1}{J_k} M_{k+1} + K_k \right\} \\ \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (2.3)$$

$$\text{ここで } K_k = \frac{P_{k-1}}{J_{k-1}\lambda^2} a_{k-1} b_{k-1} (2a_{k-1} + b_{k-1}) + \frac{P_k}{J_k\lambda^2} a_k b_k (a_k + 2b_k)$$

J_k は k 番目と $k+1$ 番目の吊材間の補剛桁の断面2次モーメントである。

Fig. 2 Displacement of Cable.



* 正員 東大工博 東北大学助教授 工学部土木工学科

(3) ケーブルの変形と応力の関係

死荷重によりケーブルに働いていた張力による復原力も考慮に入れ 図-2 よりわかるとおり ケーブルの張力の増加分を ΔN_k とすれば

$$(N_{k-1} + \Delta N_{k-1}) \frac{(y_k + \eta_k) - (y_{k-1} + \eta_{k-1})}{l_{k-1}} - (N_k + \Delta N_k)$$

$$\frac{(y_{k+1} + \eta_{k+1}) - (y_k + \eta_k)}{l_k} = V_k + \Delta V_k$$

$$N_{k-1} \left(\frac{y_k - y_{k-1}}{l_{k-1}} \right) - N_k \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{l_k} \right) = V_k$$

$$N_{k-1} \frac{\lambda}{l_{k-1}} = N_k \frac{\lambda}{l_k}, \quad \Delta N_{k-1} \frac{\lambda}{l_{k-1}} \div \Delta N_k \frac{\lambda}{l_k} = \Delta H$$

なる関係があるから ΔH は H に比してかなり小さいものとし $\Delta H \cdot \eta$ の項を省略し

$$\Delta V_k = \frac{H}{\lambda} (-\eta_{k-1} + 2\eta_k - \eta_k) + \frac{4H}{\lambda} (-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}) \quad \dots \quad (2.4)$$

を得る。ここで ΔH はケーブルの伸びと変形の関係より求めることができる。すなわち 格点 $k, (k+1)$ 間のケーブルの伸び Δl_k は次式で与えられる。

$$\Delta l_k = (\eta_{k+1} - \eta_k) \frac{y_{k+1} - y_k}{l_k} + (\xi_{k+1} - \xi_k) \frac{\lambda}{l_k}$$

この伸びはケーブル張力の増加および温度変化による伸びであるからケーブルの断面積を A_c , ヤング率を E_c , 線膨張係数を α とすれば

$$\Delta l_k = \frac{\Delta I_k}{E_c A_c} + \alpha l_k t = \frac{l_k^2}{E_c A_c \lambda} \Delta H + \alpha l_k t$$

よって $\frac{l_k^2}{E_c A_c \lambda} \Delta H + \alpha l_k^2 t = (\eta_{k+1} - \eta_k) (y_{k+1} - y_k) + (\xi_{k+1} - \xi_k) \lambda \dots \quad (2.5)$

(2.5) 式を全径間にわたって総計すると、支点 $k=0, k=n+1$ でたわみはないものとすれば、ケーブル方程式として次式を得る。

$$\sum_{k=1}^n (-y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}) \eta_k = \frac{4H}{E_c A_c \lambda} \sum_{k=1}^n l_k^3 \pm \alpha t \sum_{k=1}^n l_k^2 + (\xi_0 - \xi_{n+1}) \lambda \dots \quad (2.6)$$

ここで ξ_0, ξ_{n+1} は接続径間の性質によって定められる。

結局 (2.2), (2.3), (2.4) 式より格点モーメントについて次式が成り立つ。

$$(1 - \mu_{k-1}) M_{k-1} - 2(1 + \mu_{k-1} + \mu_k) M_k + (1 - \mu_k) M_{k+1} = -\lambda R_k + \frac{H \lambda^2}{6 E} K_k + \Delta H S_k \dots \quad (2.7)$$

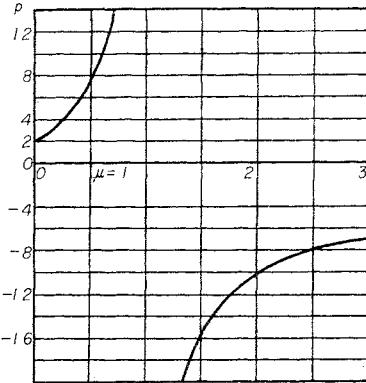
ここで $\mu_k = \frac{H \lambda^2}{6 E J_k}$, $S_k = -y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}$

である。全径間一定断面の場合は (2.7) 式は

$$M_{k-1} - \frac{2(1+2\mu)}{1-\mu} M_k + M_{k+1} = -\frac{\lambda}{1-\mu} R_k + \frac{J \mu}{1-\mu} N_k + \frac{S_k}{1-\mu} \Delta H \dots \quad (2.8)$$

と書くことができる。 M_k の係数を $p = \frac{2(1+2\mu)}{1-\mu}$ と置くと、この p と μ との関係は 図-3 に見られるように $\mu=0$ のとき、すなわち死荷重による水平反応が 0 の場合は $p=2$ となり、 $\mu=0.5$ のとき $p=8$, μ が 1 に近づくと p は無限大となり (2.8) 式で M_{k-1}, M_{k+1} の項

Fig. 3 Relation between μ and P .



はなくなり M_k は直接求めることができる。 μ が 1 より大きくなると p は負に転じ $p=2$ のとき $p=-10$, μ が無限大となると $p=-4$, すなわち吊材を支点とする $(n+1)$ 径間の連続ばかりに近づく。この p が吊橋としての性質を示す重要な要素ということができる。

なお $p=2$ の場合は単純ばかりとしての曲げモーメントを与える式となる。

(4) 補剛桁に働く曲げモーメント

一般的な解は後の章で述べることにし、今ここで一定断面の場合について ΔH の項を省略して考えて見ることにする。今、

$$\begin{vmatrix} -p, & 1 \\ 1, -p, & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 1, -p, & 1 \\ 0 & & & & 0 \\ & & & & 1, -p, & 1 \\ & & & & & 1-p \end{vmatrix} = F_p \dots \quad (2.9)$$

と置けば (2.8) 式はマトリックスで表示すると

$$\begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_k \\ \vdots \\ M_n \end{vmatrix} = \frac{\lambda}{\mu-1} \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_k \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + \frac{\mu J}{1-\mu} \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_k \\ \vdots \\ K_n \end{vmatrix} \dots \quad (2.10)$$

よって格点モーメントは次式で与えられる。

$$\begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_k \\ \vdots \\ M_n \end{vmatrix} = \frac{\lambda}{\mu-1} F_p^{-1} \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_k \\ \vdots \\ R_n \end{vmatrix} + \frac{\mu J}{1-\mu} F_p^{-1} \begin{vmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_k \\ \vdots \\ K_n \end{vmatrix} \dots \quad (2.11)$$

この F_p^{-1} が吊橋としての性質を示す重要なマトリックスであるが、このマトリックスの各要素は $1, -p, p^2-1, \dots, n$ 番目の数を R_k とすると $R_{k+1} = -p R_k - R_{k-1}$ となる数列を基礎とする(平井敦著鋼橋 III 参照)。表-1 に $p=3, \mu=0.14286, n=11$ の場合の F_3^{-1} の値を示す。今 $p=3, 4, 8, -10$, すなわち $\mu=0.14286, 0.25, 0.5, 2$ にとり径間中央に単位荷重が載った場合の曲げモーメント図を示すと 図-4 が得られる。 $\mu=0.14286$ は Steinmann の補剛係数 $S = \frac{1}{L} \sqrt{EJ/H}$

の約 0.09 に相当する。

Table 1 Reciprocal Matrix of F_s

	1	2	3	4	5	6
1	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$
2	3.81966	1.45898	5.57281	2.12862	8.13061	3.10559
3	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-3}$
4	1.45898	4.37694	1.67184	6.38586	2.43943	9.31677
5	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$
6	5.57281	1.67184	4.45825	1.70290	6.50449	2.48447
7	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-2}$
8	2.12862	6.38586	1.70290	4.47010	1.70743	6.52174
9	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$	$\times 10^{-1}$
10	8.13061	2.43918	6.50449	1.70743	4.47184	1.70807
11	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-1}$
	3.10559	9.31677	2.48447	6.52174	1.70807	4.47205
	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-1}$
	1.18616	3.55848	9.48928	2.49094	6.52388	1.70807
	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-2}$	$\times 10^{-2}$
	4.52899	1.35870	3.62319	9.51087	2.49094	6.52174
	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-2}$
	1.72533	5.17599	1.38026	3.62319	9.48928	2.48447
	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$
	6.46998	1.94099	5.17599	1.35870	3.55846	9.31677
	$\times 10^{-5}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-4}$	$\times 10^{-3}$	$\times 10^{-3}$
	2.15666	6.46998	1.72533	4.52899	1.18616	3.10559

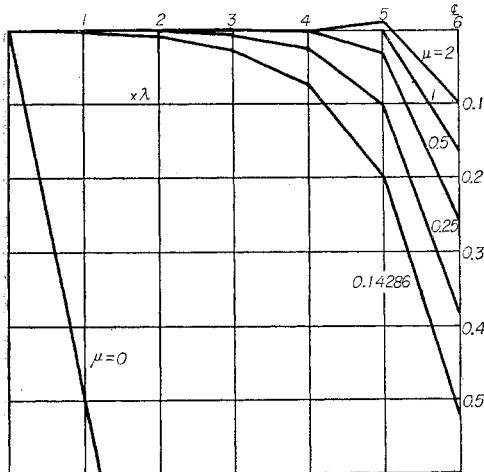
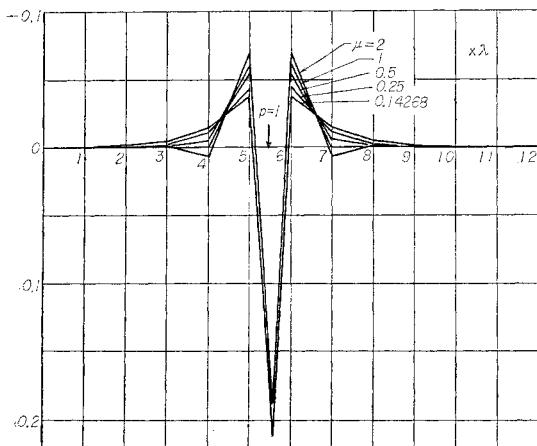
 $\times (-1)$ Fig. 4 Bending Movement Diagram for the Various μ (neglecting the term of AH)

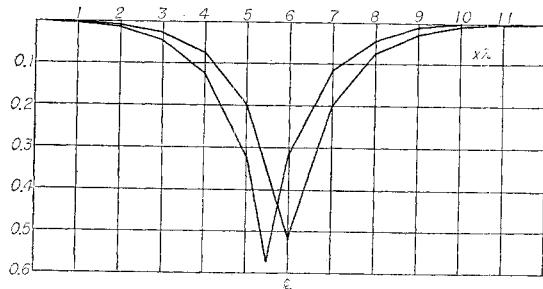
Fig. 5 Additional Moment Caused by a Load Placed at the 6th Panel.



(5) 吊材間に載荷した場合

今吊材間の中央に載荷した場合補剛桁に働く曲げモーメントの値を計算してみる。吊材間載荷による格点モーメントの発生状態を見るため (2.11) 式で R_k の項を求めず N_k の項のみを計算すると 図-5 が得られる。

Fig. 6



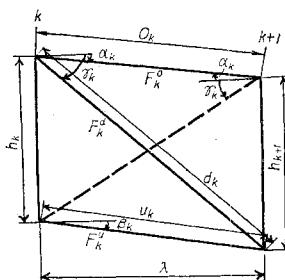
$\mu=0.14286$ の場合について $k=6$ に載荷した場合と $k=5$ と 6 の間に載荷した場合を比較すると格点間に載荷した場合曲げモーメントの値は相当大きくなることがわかる。このことは無補剛吊橋の実測⁵⁾によっても確かめられた。

3. 補剛桁にトラスを使用した場合

(1) 部材記号、応力および変位

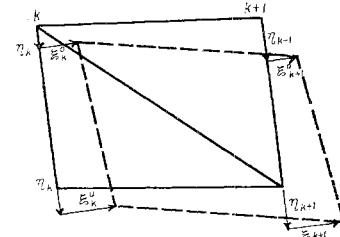
k 番目と $(k+1)$ 番目の吊材間にある部材についての

Fig. 7



諸量には右下に k を付して表わす。上弦材、下弦材および斜材の部材長および断面は積 図-7 に示したようにそれぞれ o_k , u_k , d_k および F_k^o , F_k^u , F_k^d で表わす。各格点の変位は 図-8 に示したとおりである。ここで垂直材の伸びは省略しているので垂直変位は上弦格点下弦格点で等しい。各格間に働く応力は 図-9 に示したように垂直材は剛体と考え縦に切って考えることにする。よって格点に

Fig. 8



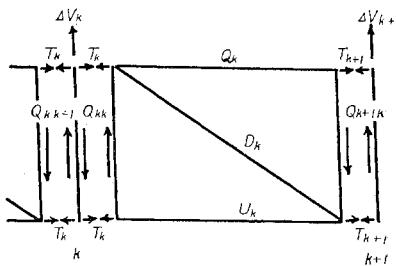
働く曲げモーメント M_k は $T_k \cdot h_k$ のことである。部材応力は引張力を正とする。

(2) 部材のひずみと変位の関係

上弦材、下弦材および斜材のひずみを ϵ_k^o , ϵ_k^u , ϵ_k^d と

すれば部材のひずみと変位の間には次の関係がある。

Fig. 9



プラット型の場合

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^d_k &= \frac{\cos \gamma_k (\xi^u_{k+1} - \xi^o_k) + \sin \gamma_k (\eta_{k+1} - \eta_k)}{d_k} \\ \varepsilon^o_k &= \frac{\cos \alpha_k (\xi^o_{k+1} - \xi^o_k) + \sin \alpha_k (\eta_{k+1} - \eta_k)}{o_k} \\ \varepsilon^u_k &= \frac{\cos \beta_k (\xi^u_{k+1} - \xi^u_k) + \sin \beta_k (\eta_{k+1} - \eta_k)}{u_k} \end{aligned} \right\} \quad \dots(3.1)$$

ハウ型の場合

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^d_k &= \frac{\cos \gamma_k (\xi^o_{k+1} - \xi^u_k) - \sin \gamma_k (\eta_{k+1} - \eta_k)}{d_k} \\ \varepsilon^o_k &= \frac{\cos \alpha_k (\xi^o_{k+1} - \xi^o_k) + \sin \alpha_k (\eta_{k+1} - \eta_k)}{o_k} \\ \varepsilon^u_k &= \frac{\cos \beta_k (\xi^u_{k+1} - \xi^u_k) + \sin \beta_k (\eta_{k+1} - \eta_k)}{u_k} \end{aligned} \right\} \quad \dots(3.2)$$

(3) 格点に働いている応力と部材応力の関係

プラット型の場合

$$o_k = -\frac{T_{k+1}}{\cos \alpha_k}, \quad U_k = \frac{T_k}{\cos \beta_k}, \quad D_k = \frac{1}{\cos \gamma_k} (T_{k+1} - T_k) \quad \dots(3.3)$$

ハウ型の場合

$$o_k = -\frac{T_k}{\cos \alpha_k}, \quad U_k = \frac{T_{k+1}}{\cos \beta_k}, \quad D_k = \frac{1}{\cos \gamma_k} (T_k - T_{k+1}) \quad \dots(3.4)$$

(4) 応力とひずみの関係

部材応力とひずみの関係は次式で与えられる。

$$\varepsilon^o_k = \frac{o_k}{EF^o_k}, \quad \varepsilon^u_k = \frac{U_k}{EF^u_k}, \quad \varepsilon^d_k = \frac{D_k}{EF^d_k} \quad \dots(3.5)$$

(5) 垂直変位と応力の関係

プラット型、ハウ型およびワーレン型も同じようにして求められるのでプラット型について垂直変位と応力の関係を求めるとき (3.1) 式より

$$\begin{aligned} \frac{d_k}{\cos \gamma_k} \varepsilon^d_k - \frac{d_{k-1}}{\cos \gamma_{k-1}} \varepsilon^d_{k-1} &= \xi^u_{k+1} - \xi^u_k - \xi^o_k + \xi^o_{k-1} \\ &+ \tan \gamma_k (\eta_{k+1} + \eta_k) - \tan \gamma_k (\eta_k - \eta_{k-1}) \\ \frac{o_{k-1}}{\cos \alpha_{k-1}} \varepsilon^o_{k-1} &= (\xi^o_k - \xi^o_{k-1}) + (\eta_k - \eta_{k-1}) \tan \alpha_k \\ \frac{u_k}{\cos \beta_k} \varepsilon^u_k &= (\xi^u_{k+1} - \xi^u_k) + (\eta_{k+1} - \eta_k) \tan \beta_k \end{aligned}$$

が得られるゆえ、上式より ξ の項を消去すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d_k}{\cos \gamma_k} \varepsilon^d_k - \frac{d_{k-1}}{\cos \gamma_{k-1}} \varepsilon^d_{k-1} - \frac{u_k}{\cos \beta_k} + \frac{o_{k-1}}{\cos \alpha_{k-1}} \varepsilon^o_{k-1} \\ = (\tan \gamma_{k-1} - \tan \alpha_{k-1}) \eta_{k-1} - (\tan \gamma_k + \tan \gamma_{k-1}) \eta_k \\ - (\tan \alpha_{k-1} - \tan \beta_k) \eta_{k+1} + (\tan \gamma_k - \tan \beta_k) \eta_{k+1} \end{aligned}$$

上式に (3.4), (3.5) 式の関係を入れて整理すると

$$A_k M_{k-1} - B_k M_k + C_k M_{k+1} = a_k \eta_{k-1} - b_k \eta_k + c_k \eta_{k+1} \quad \dots(3.6)$$

なる型で格点モーメントと垂直変位の関係を書くことができる。

(3.6) 式でプラット型の場合

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{d_{k-1}}{EF^d_{k-1} h_{k-1} \cos^2 \gamma_{k-1}} \\ B_k &= \frac{d_{k-1}}{EF^d_{k-1} h_{k-1} \cos^2 \gamma_{k-1}} + \frac{d_k}{EF^d_k h_k \cos^2 \gamma_k} \\ &+ \frac{u_k}{EF^u_k h_k \cos^2 \beta_k} + \frac{o_{k-1}}{EF^o_{k-1} h_k \cos^2 \alpha_{k-1}} \\ C_k &= \frac{d_k}{EF^d_k h_{k+1} \cos^2 \gamma_k} \\ a_k &= \tan \gamma_{k-1} - \tan \alpha_{k-1} \\ b_k &= \tan \gamma_{k-1} + \tan \gamma_k - \tan \alpha_{k-1} - \tan \beta_k \\ c_k &= \tan \gamma_k - \tan \beta_k \end{aligned} \right\} \quad \dots(3.7)$$

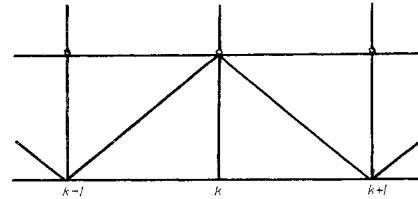
ハウ型の場合

$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{d_{k-1}}{EF^d_{k-1} h_{k-1} \cos^2 \gamma_{k-1}} \\ B_k &= \frac{d_{k-1}}{EF^d_{k-1} h_k \cos^2 \gamma_{k-1}} + \frac{d_k}{EF^d_k h_k \cos^2 \gamma_k} \\ &+ \frac{o_k}{EF^o_k \cos^2 \alpha_k} + \frac{u_{k-1}}{EF^u_{k-1} h_k \cos^2 \beta_{k-1}} \\ C_k &= \frac{d_k}{EF^d_k h_{k+1} \cos^2 \gamma_k} \\ a_k &= \tan \gamma_{k-1} - \tan \beta_{k-1} \\ b_k &= \tan \gamma_{k-1} + \tan \gamma_k - \tan \alpha_k - \tan \beta_{k-1} \\ c_k &= \tan \gamma_k - \tan \alpha_k \end{aligned} \right\} \quad \dots(3.8)$$

ワーレン型の場合

k を 図-10 の点にとったとき

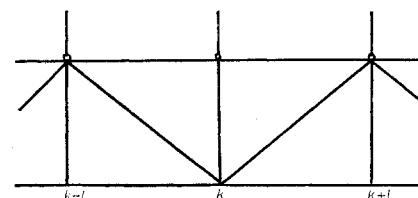
Fig. 10



$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{d_{k-1}}{EF^d_k h_k \cos^2 \gamma_{k-1}} \\ B_k &= \frac{d_{k-1}}{EF^d_k h_k \cos^2 \gamma_{k-1}} + \frac{d_k}{EF^d_k h_k \cos^2 \gamma_k} \\ &+ \frac{u_k}{EF^u_k \cos^2 \beta_k} + \frac{u_{k-1}}{EF^u_{k-1} \cos^2 \beta_{k-1}} \\ C_k &= \frac{d_k}{EF^d_k h_{k+1} \cos^2 \gamma_k} \\ a_k &= \tan \gamma_{k-1} - \tan \beta_{k-1} \\ b_k &= \tan \gamma_{k-1} + \tan \gamma_k + \tan \beta_{k-1} + \tan \beta_k \\ c_k &= \tan \gamma_k - \tan \beta_k \end{aligned} \right\} \quad \dots(3.9)$$

k を 図-11 に示した点にとった場合

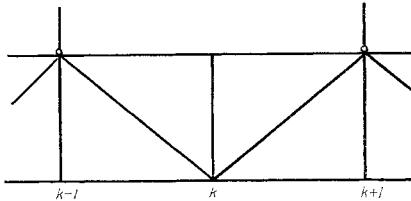
Fig. 11



$$\left. \begin{aligned} A_k &= \frac{d_{k-1}}{EF^d h_{k-1} \cos^2 \gamma_{k-1}} \\ B_k &= \frac{d_{k-1}}{EF^d h_k \cos^2 \gamma_{k-1}} + \frac{d_k}{EF^d h_k \cos^2 \gamma_k} \\ &\quad + \frac{o_k}{EF^o h_k \cos^2 \alpha_k} + \frac{o_{k-1}}{EF^o h_{k-1} \cos^2 \alpha_{k-1}} \\ C_k &= \frac{d_k}{EF^d h_{k+1} \cos^2 \gamma_k} \\ a_k &= \tan \gamma_{k-1} - \tan \alpha_{k-1} \\ b_k &= \tan \gamma_{k-1} + \tan \gamma_k + \tan \alpha_k - \tan \alpha_{k-1} \\ c_k &= \tan \gamma_k - \tan \alpha_k \end{aligned} \right\} \dots \dots (3.10)$$

ワーレン型で吊材が一格点ねきにある場合（図-12）

Fig. 12



k を奇数とし各格間について (3.6) 式を書くと

$$\begin{aligned}
 A_k M_{k-1} - B_k M_k + C_k M_{k+1} &= a_k \eta_{k-1} - b_k \eta_k + c_k \eta_{k+1} \\
 A_{k-1} M_{k-2} - B_{k-1} M_{k-1} + C_{k-1} M_k &= a_{k-1} \eta_{k-2} - b_{k-1} \eta_{k-1} \\
 &\quad + c_{k-1} \eta_k \\
 A_{k-2} M_{k-8} - B_{k-2} M_{k-2} + C_{k-2} M_{k-1} &= a_{k-2} \eta_{k-8} - b_{k-2} \eta_{k-2} \\
 &\quad + c_{k-2} \eta_{k-1}
 \end{aligned}$$

上式より η_k, η_{k-2} の項を消去し吊材間で載荷しないものとして $M_k = (M_{k-1} + M_k)/2$, $M_{k-2} = (M_{k-3} + M_{k-1})/2$ なる関係より整理して書くと次式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{A}_{k-3}M_{k-3} - \bar{B}_{k-1}M_{k-1} + \bar{C}_{k-1}M_{k+1} &= \bar{a}_{k-1}\eta_{k-3} - \bar{b}_{k-1}\eta_{k-1} \\ &\quad + \bar{c}_{k-1}\eta_{k+1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{k-1} &= \frac{1}{b_{k-2}} \left(A_{k-2} - \frac{B_{k-2}}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{a_{k-1}}{a_{k-1}} \\ \bar{B}_{k-1} &= \frac{C_{k-1}}{a_{k-1} b_k} \left(\frac{B_k}{2} - A_k \right) + \frac{1}{a_{k-1}} \left(B_{k-1} - \frac{A_{k-1}}{2} \right) \\ &\quad - \frac{C_{k-1}}{2} + \frac{1}{b_{k-2}} \left(-C_{k-2} + \frac{B_{k-2}}{2} \right) \\ \bar{C}_{k-1} &= \frac{C_{k-1}}{a_{k-1} b_k} \left(C_k - \frac{B_k}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{c_{k-1}}{a_{k-1}} \\ \bar{a}_{k-1} &= \frac{a_{k-2}}{b_{k-2}} \\ \bar{b}_{k-1} &= \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}} - \frac{a_k c_{k-1}}{a_{k-1} b_k} - \frac{c_{k-2}}{b_{k-2}} \\ \bar{c}_{k-1} &= \frac{c_{k-1} - c_k}{a_{k-1} b_k} \end{aligned} \right\} \dots (3.12)$$

結局プラット型ハウ型およびワーレン型トラスとも(3.6)式の形で書けるのであるから(3.6)式がトラスの場合の3連モーメントの定理ということになる。(3.6)式を使って吊橋を解く一般的記述は次章で行なうことにして、補剛桁が等断面のとき補剛桁にトラスを用いた場合とプレートガーダーを用いた場合とを比較することにする。

(5) 補剛桁にトラスを用いた場合とプレート ガーダーを用いた場合の関係

等断面の場合 (3.6) 式は一般に次のように書くことができる。

$$AM_{k-1} - BM_k + AM_{k+1} = \eta_{k-1} - 2\eta_k + \eta_{k+1}, \dots \quad (3.14)$$

ここで各係数は

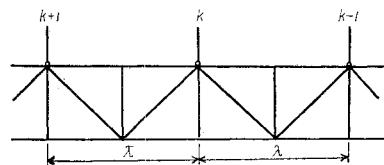
プラットおよび、ハウ型の場合

$$A = \frac{d \sin \gamma}{EF^d h \cos^3 \gamma}, \quad B = 2 A + \frac{o}{EF^o h \tan \gamma} + \frac{u}{EF^u h \tan \gamma}$$

.....(3.15)

ワーレン型の場合 図-13 に示した位置に吊材があると
は

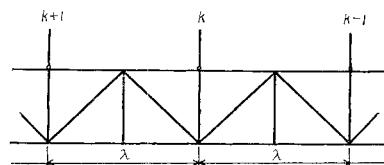
Fig. 13



$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{d \sin \gamma}{EF^d h \cos^3 \gamma} - \frac{\lambda}{2 EF^a h \tan \gamma} \\ B &= \frac{2 d \sin \gamma}{EF^d h \cos^3 \gamma} + \frac{\lambda}{EF^a h \tan \gamma} + \frac{2 \lambda}{EF^u h \tan \gamma} \end{aligned} \right\} \dots(3.16)$$

図-14 に示した位置に吊材があるとき

Fig. 14



$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{d \sin \gamma}{EF^d h \cos^3 \gamma} - \frac{\lambda}{2 EF^u h \tan \gamma} \\ B &= \frac{2 d \sin \gamma}{EF^d h \cos^3 \gamma} + \frac{\lambda}{EF^u h \tan \gamma} + \frac{2 \lambda}{EF^e h \tan \gamma} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.17)$$

ケーブル応力と変形力の関係はプレートガーダーのときと変わらないので AH の項を省略し、

$$\eta_{k-1} - 2\eta_k + \eta_{k+1} = -\frac{M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1}}{H} - \frac{\lambda}{H} P_k$$

より

$$M_{k-1} - \frac{BH+2}{AH+1} M_k + M_{k+1} = -\frac{\lambda}{AH+1} P_k \dots \dots \dots (3.18)$$

ここで $p = (BH+2)/AH+1$ が曲げモーメントの形を定める要素であるからトラスをプレートガーダーと等価の断面2次モーメントで置きかえるには ρ を等しくしなければならない。よって

$$p = \frac{4\mu + 2}{1 - \mu} = \frac{BH + 2}{AH + 1} \dots \dots \dots (3.19)$$

より等価の断面2次モーメント \bar{J} は次式で与えられる。
 プラットおよびハウ型の場合は

$$\bar{J} = \frac{h^2}{\frac{1}{F^o} + \frac{1}{F^u}} + \frac{h^2}{\frac{1}{F^o} + \frac{1}{F^u}} \cdot \frac{H}{E} \left\{ \frac{d \sin \gamma}{F^d h \cos^3 \gamma} + \frac{1}{6 \tan^2 \gamma} \right. \\ \left. \left(\frac{1}{F^o} + \frac{1}{F^u} \right) \right\} \quad \dots \dots \dots (3.20)$$

ワーレン型の場合

$$\bar{J} = \frac{h^2}{\frac{1}{F^o} + \frac{1}{F^u}} + \frac{h^2}{\frac{1}{F^o} + \frac{1}{F^u}} \cdot \frac{H}{E} \left\{ \frac{d \sin \gamma}{F^d h \cos^3 \gamma} + \frac{1}{3 \tan^2 \gamma} \right. \\ \left. \left(\frac{2}{F^o} - \frac{1}{F^u} \right) \right\} \quad \dots \dots \dots (3.21. a)$$

または

$$\bar{J} = \frac{h^2}{\frac{1}{F^o} + \frac{1}{F^u}} + \frac{h^2}{\frac{1}{F^o} + \frac{1}{F^u}} \cdot \frac{H}{E} \left\{ \frac{d \sin \gamma}{F^d h \cos^3 \gamma} + \frac{1}{3 \tan^2 \gamma} \right. \\ \left. \left(\frac{2}{F^o} - \frac{1}{F^u} \right) \right\} \quad \dots \dots \dots (3.21. b)$$

上式で第一項は一般に行なわれているように上下弦材を突縁とした断面2次モーメントの値であり第2項がトラスとしての補正項である。しかしこの補正項は部材断面積に比して水平反力が特に大きい場合以外はあまり大き*^{*}

(4.1), (4.2) 式をマトリックスで表示すると

$$\begin{vmatrix} -B_1, & C_1 \\ A_2, & -B_2, & C_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & A_k, & -B_k, & C_k \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & A_{n-1}, & -B_{n-1}, & C_{n-1} \\ & & & & & A_n, & -B_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_k \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b_1, & c_1 \\ a_2, & -b_2, & c_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a_k, & -b_k, & c_k \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a_{n-1}, & -b_{n-1}, & c_{n-1} \\ & & & & & a_n, & -b_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_k \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \\ \eta_n \end{vmatrix} \quad \dots \dots \dots (4.3)$$

$$\frac{F_2}{H} \begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_k \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{vmatrix} + \frac{\lambda}{H} \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{vmatrix} - \frac{4H}{H} \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_k \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{vmatrix} = -F_2 \begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_k \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \\ \eta_n \end{vmatrix} \quad \dots \dots \dots (4.4)$$

が得られる。(4.3), (4.4) 式より $\eta_{k(k=1,2-n)}$ の項を消去すると

$$\begin{vmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_k \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{vmatrix} = \frac{G^{-1}}{H} \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{vmatrix} + \frac{4H}{H} \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_k \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{vmatrix} \quad \dots \dots \dots (4.5)$$

ここでケーブル曲線が放物線の場合は S_k すべて等しくなり、また

$$G = F_2 \begin{vmatrix} -b_1, & c_1 \\ a_2, & -b_2, & c_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a_k, & -b_k, & c_k \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a_{n-1}, & -b_{n-1}, & c_{n-1} \\ & & & & & a_n, & b_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -B, & C_1 \\ A_2, & -B_2, & C_2 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & A_k, & -B_k, & C_k \\ 0 & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & A_{n-1}, & -B_{n-1}, & C_{n-1} \\ & & & & & A_n, & C_n \end{vmatrix} + \frac{F_2}{H} \quad \dots \dots \dots (4.6)$$

である。

*な値とならない。(3.20), (3.21) 式で与えられる等価断面2次モーメントを用いた場合曲げモーメントの値を $1/1 + \frac{H}{6}(4A+B)$ 倍しなければならない。結局上下弦材を突縁と考えた断面2次モーメントを使用しりとして計算した場合より曲げモーメントの分布は少々広くはなるがその値はほとんど変わらない。補剛桁が一定断面のときは上下弦材を突縁としたプレートガーダーとしてトラスを補剛桁に用いた吊橋の解析を行なっても一般の場合は十分正確であるといふことができる。

4. マトリックス演算による吊橋の解

階差式の形で吊橋の変形と格点モーメントおよび水平反力の間の関係を書くと (2.2), (2.4) と (3.4) 式より次の形で表わされる。

$$A_k M_{k-1} - B_k M_k + C_k M_{k+1} = a_k \eta_{k-1} - b_k \eta_k + c_k \eta_{k+1} \dots \dots \dots (4.1)$$

$$-\frac{1}{H} (M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1}) + \frac{\lambda}{H} P_k - \frac{4}{H} S_k \\ = -\eta_{k-1} + 2\eta_k - \eta_{k+1} \dots \dots \dots (4.2)$$

(4.6) 式で平行弦の場合は

$$\begin{vmatrix} -b_1, & c_1 \\ a_2, & -b_2, & c_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & a_k, & -b_k, & c_k \\ & \searrow & \swarrow \\ 0, & a_{n-1}, & -b_{n-1}, & c_{n-1} \\ & & a_n, & b_n \end{vmatrix} = \nu F_2 \quad (4.7)$$

なる形で書けるから G はより簡単に (4.7.a) 式で表わされる。

$$G = \begin{vmatrix} -B_1, & C_1 \\ A_2, & -B_2, & C_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & A_k, & -B_k, & C_k \\ & \searrow & \swarrow \\ 0, & A_{n-1}, & -B_{n-1}, & C_{n-1}, \\ & & A_n, & -B_n \end{vmatrix} + \frac{F_2}{H} \quad (4.7.a)$$

ここでトラスの場合 $\nu = \tan \tau$, プレート ガーダーの場合は $\nu = 1$ である。 ΔH は (4.5) 式を (4.3) 式に入れ η を求めると

$$\begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_k \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \\ \eta_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -b_1, & c_1 \\ a_2, & -b_2, & c_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & a_k, & -b_k, & c_k \\ & \searrow & \swarrow \\ 0, & a_{n-1}, & -b_{n-1}, & c_{n-1} \\ & & a_n, & -b_n \end{vmatrix} \begin{matrix} ^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \begin{vmatrix} -B_1, & C_1 \\ A_2, & -B_2, & C_2 \\ & \searrow & \swarrow \\ & A_k, & -B_k, & C_k \\ & \searrow & \swarrow \\ 0, & A_{n-1}, & -B_{n-1}, & C_{n-1} \\ & & A_n, & -B_n \end{vmatrix} \cdot \frac{G^{-1}}{H} \begin{matrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \\ -\lambda \\ P_{n-1} \\ P_n \end{matrix} + \Delta H \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_k \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{matrix} \quad (4.8)$$

を得るゆえ、これをケーブル方程式 (2.6) に入れて求めることができる。すなわち

$$\begin{vmatrix} S_1, & S_2, & \dots, & S_k, & \dots, & S_{n-1}, & S_n \end{vmatrix} = \frac{\Delta H}{E_c A_b \lambda} \sum_{k=1}^n l_k^3 \pm \alpha t \sum_{k=1}^n l_k^2 + (\xi_0 - \xi_{n+1}) \lambda \quad (4.9)$$

$$\begin{vmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_k \\ \vdots \\ \eta_{n-1} \\ \eta_n \end{vmatrix}$$

表-2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
膜理論	0.00693	0.01509	0.02590	0.04128	0.06393	0.09783	0.14990	0.22685	0.34360	0.52137	0.79102	1.19989
24格間	0.00669	0.01457	0.02509	0.04003	0.06219	0.09548	0.14584	0.22226	0.33843	0.51509	0.78385	1.19274
12格間	—	0.01302	—	0.03628	—	0.08803	—	0.20891	—	0.49385	—	1.16664

Fig. 15 Movement Diagram.

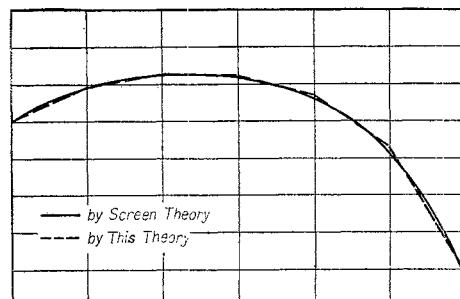
5. むすび

単に格点モーメントの値を求めるだけならば連立方程式を解けばよいことになるが、本論文で取り扱ったように行列の型で表示すると断面の諸定数、あるいは水平反力の値がどのように格点モーメントに影響してくるかということがわかるようになる。また補剛桁にプレート ガーダーを用いた場合とトラスを用いた場合の比較をする場合もそれら諸定数を比較することによりその結果を検討することができ便利である。

最後に $L \sqrt{H/EJ} = 10$ なる吊橋を 12 格間と 24 格間に分けて吊った場合と吊材を膜と考えた場合に補剛桁に働く曲げモーメントを比較すると表-2を得る。ここで載荷点は支間中央であり、 ΔH の項は省略してある。12格間と吊材を膜と考えた場合の ΔH の値をみると

12格間の場合 $\Delta H = 1.5072$ 膜理論の " $\Delta H = 1.5283$

となり曲げモーメント図も図-5に示したとおり、ほとんど差は見られない。



参考文献

- 平井 敦: 鋼橋III, 技報堂, 1956
- Grüning: Eisenbau, 1929
- Szidarovszky, J.: "Corrected Deflection Theory of Suspension Bridges", Vol. 86, No. ST 11, 1960, A. S.C.E.
- Steinman, D.B.: "A Generalized Deflection Theory for Suspension Bridges", Transactions, A.S.C.E. Vol. 100, 1935
- 樋浦・倉西・浪越: "砂子瀬橋実測報告", 昭和 35 年度土木学会東北支部講演会

(原稿受付: 1961.11.15)

ANALYSIS OF SUSPENSION BRIDGE BY MATRIX OPERATION

By Dr. Eng., Shigeru Kuranishi, C.E. Member

Suspension bridge has been usually analyzed by differential equations replacing the hangers of suspension bridge by a screen which resists to vertical tensile stress only. While, if the analysis of suspension bridge is carried out taking the effects of individual hangers into consideration, the analysis may be more convenient as compared with that of the screen theory as described below;

- a) We can easily calculate the difference between stiffening plate girder and stiffening truss.
- b) We can calculate the effects of panel loads placed between hangers.
- c) We can accurately calculate the influence of variable cross section of stiffening plate girder and truss.
- d) We can analyze suspension bridge of any cable form.

There is the following relationship between panel point moments and deflections of stiffening girder

$$\begin{aligned} A_{k-1}M_{k-1} - B_kM_k + C_kM_{k+1} + \mathfrak{N}_k \\ = a_{k-1}\eta_{k-1} - b_k\eta_k + c_k, \eta_{k+1} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (1)$$

While, the relation between deflections and forces of cable may be written as follows;

$$\begin{aligned} \frac{1}{H}(M_{k-1} - 2M_k + M_{k+1}) \\ + \frac{\lambda}{H}P_k - \frac{4H}{H}S_k = -\eta_{k-1} + 2\eta_k - \eta_{k+1} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (2)$$

In which S_k is given by

$$S_k = -y_{k-1} + 2y_k - y_{k+1}$$

For stiffening plate girder, each constant A_k , B_k , C_k and a_k , b_k , c_k is given from "three moment theorem" as follows;

$$A_k = C_k = \frac{\lambda^2}{6EJ_k}, \quad B_k = \frac{\lambda^2}{3E} \left(\frac{1}{J_{k-1}} + \frac{1}{J_k} \right) \quad (4)$$

When the stiffening girder is a truss, the each constant depends on the type of truss. For Pratt type, for example,

$$\left. \begin{aligned} A_{k-1} &= \frac{d_{k-1}}{EF_{k-1}^a h_{k-1} \cos^2 \gamma_{k-1}}, \quad C_k = \frac{d_k}{EF_k^a h_{k+1} \cos^2 \gamma_k} \\ B_k &= \frac{d_{k-1}}{EF_{k-1}^a h_{k-1} \cos^2 \gamma_{k-1}} + \frac{d_k}{EF_k^a h_k \cos^2 \gamma_k} \\ &+ \frac{u_k}{EF_k^a h_k \cos^2 \beta_k} + \frac{o_{k-1}}{EF_{k-1}^a h_k \cos^2 \alpha_{k-1}} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$a_{k-1} = \tan \gamma_{k-1} - \tan \alpha_{k-1}, \quad c_k = \tan \gamma_k - \tan \beta_k$$

$$b_k = \tan \gamma_{k-1} + \tan \gamma_k - \tan \alpha_{k-1} - \tan \beta_k$$

are obtained, ignoring the elongation of the vertical members of truss.

From equations (1) and (2), the panel point moments are expressed in matrices as follows;

$$\left| \begin{array}{c} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_k \\ \vdots \\ M_n \end{array} \right| = -\lambda |G|^{-1} \left| \begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ P_n \end{array} \right| + 4H |G|^{-1} \left| \begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_k \\ \vdots \\ S_n \end{array} \right| \quad \dots \dots \dots (6)$$

In which, if the stiffening girder is a plate girder with a constant cross section, the matrix $|G|$ is given by

$$|G| = \frac{1}{1-\mu} \left| \begin{array}{cccccc} p, 1 & & & & & \\ 1, p, 1 & & & & & 0 \\ & 1, p, 1 & & & & \\ & & 1, p, 1 & & & \\ 0 & & & 1, p, 1 & & \\ & & & & 1, p & \end{array} \right| \quad \dots \dots \dots (7)$$

$$\text{where } \mu = \frac{H\lambda^2}{6EJ}, \quad p = \frac{2(1+2\mu)}{1-\mu}$$

This matrix $|G|$ determines the distribution of bending moment acting on the stiffening girder. When the suspension bridge has a constant cross section, the matrix $|G|$ depends on the value of μ or p only. For example, taking $p=3, 4, 8, -10$, the bending moment of a 12-panel suspension bridge under a concentrated load at center of span is obtained as shown in Fig. 2-4. In which the term of $4H$ is neglected and ($p=3$) corresponds to (the Steinman's stiffening coefficient = 1/11).

Additional bending moment by a concentrated panel load placed between hangers is shown in Fig. 2-5.

As shown in Fig. 2-4, the p determines the distribution of bending moment, if stiffening girder has a constant cross section. Therefore, an equivalent geometrical moment of inertia of stiffening truss to stiffening plate girder, which gives stiffening truss equal p with stiffening

plate girder, is found out in the following equation for Pratt or Howe type truss.

$$\bar{J} = \frac{h^2}{\frac{1}{F^o} + \frac{1}{F^u}} + \frac{Hh^2}{E \left(\frac{1}{F^o} + \frac{1}{F^u} \right)} \\ \left(\frac{1}{F^d} \cos^3 \gamma + \frac{1}{6 F^o \tan^2 \gamma} + \frac{1}{6 F^u \tan^2 \gamma} \right) \quad (8)$$

In which, the first term shows the moment of inertia of the chord member's cross section and the second term is correction term. This correction term may be generally very small.

Here presented analysis corresponds that of "Linearized Deflection Theory". The difference of results by this method and by linearized deflection theory is very small as shown in Fig. 4-1.

Notation

H =horizontal thrust of cable by dead load

ΔH =increment of horizontal thrust by live load

M_k =panel moment at the k -th hanger

\mathfrak{N}_k =term concerns panel load

D_k, O_k, U_k =member forces of truss shown in Fig. 9

P_k =concentrated load

d_k, o_k, u_k, h_k =length of truss member shown in Fig. 7

F_k^d, F_k^o, F_k^u =area of truss member's cross section shown in Fig. 7

$\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ =inclined angles of truss members shown in Fig. 7

λ =panel length

η_k =vertical deflection of stiffening girder shown in Fig. 8

ξ_k^o, ξ_k^u =horizontal displacement of panel point of truss shown in Fig. 8

y_k =ordinate of cable