

矩形水路におけるせきの堆砂現象に関する次元解析的研究*

杉尾 捨三郎**

要旨 矩形水路の上流から、水と砂とをおのおの一定の割合で連続的に補給しておき、かつ水路の下流をひくいせきで締めきったときの堆砂の進行状態を求めるため、著者はすでに数多くの実験を行なった。本文は上述の実験結果を次元解析によってまとめ、若干の実験式を得たもので、段丘厚さ、段丘部水深、段丘前進速度、流砂量、抵抗法則、平均堆砂面勾配などを扱っている。

1. 概説

大ダムの築造はわが国の経済的・文化的発展のためにはきわめて重要であるが、ダムの上流に堆積する土砂の問題は近年とくに注目されるようになった。せきの上流に堆砂現象が進行する経過および理論については、すでに著者は矩形水路の場合について堆砂機構の解析を試みた¹⁾。しかし現実の貯水池では堆砂を支配する要素はきわめて多く、最も条件の簡単な矩形水路内の実験においてさえも、諸要素相互間の関連を求めることは容易ではない。本文は著者がすでに矩形水路で行なった4種の実験資料から、次元解析によって得た若干の実験式を提案する。ここで述べるのは流砂量、段丘厚さ、段丘部水深、抵抗法則、段丘の前進速度、段丘部流砂量、平均堆砂面勾配などで、いずれも掃流のみによってせきの上流部に堆砂が進行中のときの諸現象を扱っている。

2. 実験

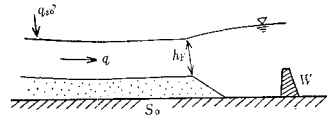
実験は表-1に示すように4種について行なったが、その詳細はすでに発表した^{2),3),4)}、ここでは省略する。いずれも矩形水路の下流に矩形断面のひくいせきをとつけ、上流から水と砂とを一定の割合で補給したときの堆砂形を求めたもので、そのときの給砂量、流量、水路勾配などの組みあわせを表-1のように種々変えて実験を行なった。使用した砂は0.6mm以下と1.2mm以上のものをフルイわけによって取除いた準均一砂であった。

3. せきによる堆砂が進行中のときの諸特性

(1) 段丘部水深

段丘部の肩の真上における水深 h_F は、段丘部流砂量 q_{sf} および段丘の前進速度 U などと密接な関係をもつものである。いま h_F は次式で表わされるものとする(図-1)。

図-1 段丘付近縦断面



$$h_F = \phi(S_0, W, q, t, \rho, r, d, \sigma, q_{so}') \dots (1)$$

ここに、 S_0 は水路床勾配、 W はせきの高さ、 q は単位巾当りの流量、 t は時間、 ρ は水の密度、 r は水の単位重量、 d は砂の平均粒径、 σ は砂粒の密度、 q_{so}' は給砂量である。いま d, ρ, q を反復変数とすれば7個のバイ項が得られる。

$$\frac{h_F}{d} = \phi_1\left(S_0, \frac{d}{W}, \frac{q^2}{gd^3}, \frac{d^2}{qt}, \frac{\sigma}{\rho}, \frac{q_{so}'}{q}\right) \dots (2)$$

水中の現象を考えるのであるから σ/ρ の代わりに $(\sigma-\rho)/\rho$ を用い、かつ限界水深 $h_c = (\alpha q^2/g)^{1/3}$ の関係を用いて若干変形すれば、

$$\frac{h_F}{h_c} = \phi_2\left(S_0, \frac{d}{W}, \frac{h_c}{d}, \frac{qt}{d^2}, \frac{\sigma-\rho}{\rho}, \frac{q_{so}'}{q}\right) \dots (3)$$

となる。さて各組の実験では $S_0, d, W, q, h_c, \sigma, \rho, q_{so}'$ などはすべて一定であるから、 h_F/h_c と qt/d^2 との関係をしらべることができる。図-2はこの関係を示したもので、これによれば qt/d^2 は h_F/h_c に影響しないことが明らかであるから、この項を除くことができる。さて、実験Kのうちの $S_0=1/267$ のものでは $S_0, d/W$ および $(\sigma-\rho)/\rho$ は一定である。そこで表-2より h_c/d がほぼ一定の資料について h_F/h_c と q_{so}'/q との関係をしらべると、 q_{so}'/q が相当変化しても h_F/h_c はほとんど変化しないから、(3)式から q_{so}'/q を除外することが

表-1 せきによる堆砂実験

実験名称	実験数	実験番号	実験場所	実験水路			水路床の状況	使用砂	
				材質	長(m)	巾(m)		粒径(mm)	比重
K	13	II, III, IV, V, VI, VII, IX, X, XI, XII, XIII, XIV, XV,	京都大学	桧材	10	0.40	固定床	0.885	2.59
L	12	I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XII,	信州大学	さわら	6	0.20	固定床	0.756	2.63
M	4	III, IV, V, VI,	信州大学	さわら	6	0.20	移動床	0.756	2.63
N	8	A1, A2, A3, A4, B1, B2, B3, B4	信州大学	アクリライト	6	0.20	固定床	0.844	2.63

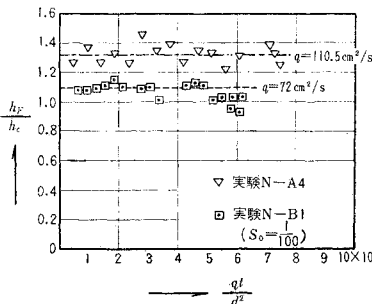
* 土木学会第16回年次学術講演会, III-26 (昭和36年5月)にて発表

** 正員 工博 徳島大学教授 工学部土木工学教室

表-2 段丘部水深

実験番号	q (cm^2/sec)	h_c (cm)	測定値 h_F (cm)	$\frac{h_F}{h_c}$	$\frac{h_c}{d}$	$\frac{h_c}{(\sigma/\rho-1)d}$	$\frac{qs\alpha'}{g} \times 10^{-4}$	S_0	
K-II	186	3.387	4.50	1.33	38.2	24.1	2.63	$\frac{1}{267}$	
IV	189	3.423	4.50	1.31	38.7	24.3	2.29		
V	179	3.301	4.30	1.30	37.3	23.5	5.89		
VI	115	2.458	3.00	1.22	27.8	17.5	6.67		
VII	117.5	2.493	3.00	1.20	28.2	17.7	3.05		
IX	117	2.486	3.20	1.29	28.1	17.7	5.44		
X	115	2.458	3.10	1.26	27.8	17.5	1.62		
XI	108	2.357	2.80	1.19	26.6	16.8	3.25		
XII	109	2.372	2.90	1.22	26.8	16.9	11.0		
XIII	77.6	1.891	2.30	1.22	21.4	13.4	12.2		
XIV	72.6	1.809	2.10	1.16	20.4	12.9	5.51		
XV	73	1.815	2.20	1.21	20.5	12.9	8.25		
N-A1	73.5	1.824	2.31	1.27	21.6	13.3	5.17		$\frac{1}{100}$
A2	84.5	2.001	2.69	1.35	23.7	14.5	3.87		
A3	92	2.118	2.60	1.23	25.1	15.4	4.13		
A4	110.5	2.393	3.16	1.32	28.4	17.4	3.44		
B1	72	2.066	2.28	1.10	24.5	15.0	5.69		
B2	86	2.024	2.40	1.19	23.9	14.7	6.63		
B3	93.5	2.140	2.60	1.22	25.4	15.6	6.10		
B4	108.5	2.364	2.94	1.25	28.0	17.2	5.61		

図-2 h_F/h_c と q/α^2 との関係



できる。つぎに S_0 , h_c/d , $(\sigma-\rho)/\rho$ がほぼひとしいと思われる資料を実験 K , N から集めると d/W の影響を無視してよいことがわかる。そこで (3) 式は

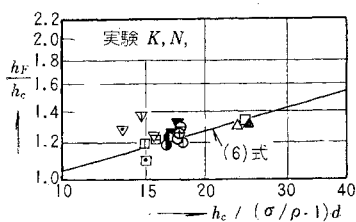
$$\frac{h_F}{h_c} = \phi_3 \left(S_0, \frac{h_c}{(\sigma/\rho-1)d} \right) \dots (4)$$

と書き直すことができる。さらに無次元量 $h_c/(\sigma/\rho-1)d$ がほぼ同一の範囲にあり、 S_0 が異なる場合の h_F/h_c をしらべることにより S_0 の影響も無視できる。そこで (4) 式は結局

$$\frac{h_F}{h_c} = \phi_4 \left(\frac{h_c}{(\sigma/\rho-1)d} \right) \dots (5)$$

に要約することができ、これを図示したものが図-3である。実験の性質上、 $h_c/(\sigma/\rho-1)d$ の変域をあまり大

図-3 h_F/h_c と $h_c/(\sigma/\rho-1)d$ との関係



きくすることができず、また粒径 d の変域がせまいうらみはあるが、 $h_c/(\sigma/\rho-1)d = 13 \sim 25$ の範囲に対して

$$\frac{h_F}{h_c} = 0.56 \left\{ \frac{h_c}{(\sigma/\rho-1)d} \right\}^{2/7} \dots (6)$$

がほぼ成立する (図-3)。すでに著者は段丘部において移動限界水深 h_K を考え、次式が h_K を規定するとのべた。

$$h_K R_K^{1/6} = n_K q g^{1/2} / v_c^* \dots (7)$$

ここに、 R_K は h_K に対応する径深、 v_c^* は砂粒の限界掃流力に対応する摩擦速度であり、 n_K は限界掃流力に相当する Manning の粗度係数である。さて (7) 式において、 $v_c^{*2} = m(\sigma/\rho-1)gd$ とおき、 $h_c = (\alpha q^2/g)^{1/3}$ および $h_K = R_K$ の関係を用いて変形すると (7) 式は

$$\frac{h_K}{h_c} = \left\{ \frac{h_c}{(\sigma/\rho-1)d} \right\}^{2/7} \times \left\{ \frac{n_K^6 g^3}{\alpha^2 m^3 (\sigma/\rho-1)d} \right\}^{1/7} \dots (8)$$

となる。(8) 式において $K' = \{n_K^6 g^3 / \alpha^2 m^3 (\sigma/\rho-1)d\}^{1/7}$ とおき、岩垣博士の実験式⁵⁾を用いれば、この粒径に対する m は 0.034、また段丘部のすぐ下流点の粗度係数を考え、 $n_K = 0.01$ とし、 $\alpha = 1.1$ とおけば $K' = 0.536$ となる。従って (8) 式と (6) 式とは式の形は同じで、係数もほぼひとしいから、 $h_K = h_F$ とみなしてよいことがわかる。

図-4 h_F と h_K との関係

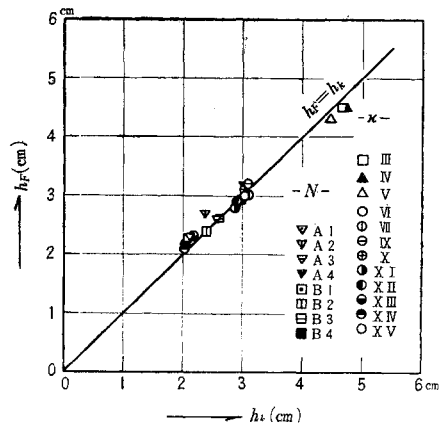


図-4 は h_F と h_K との関係を示したものである。また図-3 によれば、実験の範囲内ではつねに $h_F/h_c > 1$ であった。この描点のなかには、はじめの水路床勾配が 1/100 のものが 5 種ふくまれていることを考えると、堆砂によって段丘が前進しているときには段丘部の流れは常流となり、水路床勾配 S_0 が限界勾配以上であっても段丘肩上では常流になる傾向があり、きわめて興味ぶかい。また (6) 式によれば、 h_F は q とともに増

大し、かつ $(\sigma/\rho-1)d$ にわずかに影響される。砂粒と流量とが一定である限り、 h_F は時間に無関係に一定であることも理解できる。

(2) 段丘厚さ

段丘厚さ ξ を考える前に、段丘始点の位置について考察しよう。段丘の肩の移動する線を延長して水路床と交わる点 F を段丘始点とよぶことにし、 F からせきまでの水平距離を L_f とし、次元解析を試みると次式が得られる。

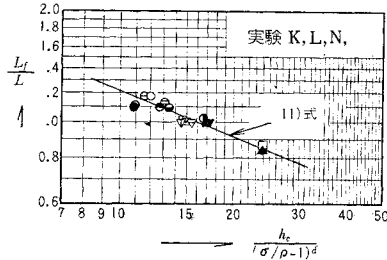
$$\frac{L_f}{L} = \phi \left(S_0, \frac{h_c}{(\sigma/\rho-1)d}, \frac{W}{d}, \frac{q_{s0'}}{q} \right) \dots\dots(9)$$

ここに、 L はプールの水平長さで、 W/S_0 に等しい。さて上式の右辺の各項のうち、 $q_{s0'}/q$ は相当大きく変動しても左辺には影響しない。また W/d もさほど重要とは思われないので無視すると結局

$$\frac{L_f}{L} = \phi_3 \left(S_0, \frac{h_c}{(\sigma/\rho-1)d} \right) \dots\dots(10)$$

となる。さて実験 K のうちの VI~X と実験 N の A1, B1 は、 $h_c/(\sigma/\rho-1)d$ の値が 17.1~17.8 であり、 S_0 が 1/267 と 1/100 であるにもかかわらず L_f/L の値は全部 1.0 とみなされることから、 S_0 の項を除外することができる。そこで、 L_f/L と $h_c/(\sigma/\rho-1)d$ との関係を示したのが 図-5 で、これより次式が得られる。

図-5 L_f/L と $h_c/(\sigma/\rho-1)d$ との関係



$$L_f/L = 3.03 \{h_c/(\sigma/\rho-1)d\}^{-0.4} \dots\dots(11)$$

上式は $13 < h_c/(\sigma/\rho-1)d < 25$ の範囲に対して成立することになる。上式から明らかなように、流量が大になるほど段丘始点は下流に若干移動する傾向がある。

つぎに段丘厚さ ξ について次元解析を試みると

$$\frac{\xi}{W} = \phi_1 \left(\frac{x'}{L_f}, \frac{q_{s0'}}{q}, \frac{d}{W} \right) \dots\dots(12)$$

が得られる。ここに、 x' は段丘始点 F から段丘の肩までの距離である(図-6)。右辺の各項のうち $q_{s0'}/q$ が相当大きい範囲に変動しても ξ/W に影響することはほとんどないことが確かめられ、また d/W もとくに粗度を問題とする場合以外はあまり重要とは認められない。そこで結局 ξ/W と x'/L_f との関係をしらべればよい。図-7 は一例として実験 K について両者の関係を点描したものである。描点はほぼ、水平と 45° の傾斜をもつ直線の周囲に集中するから

図-6 給砂位置と堆砂形

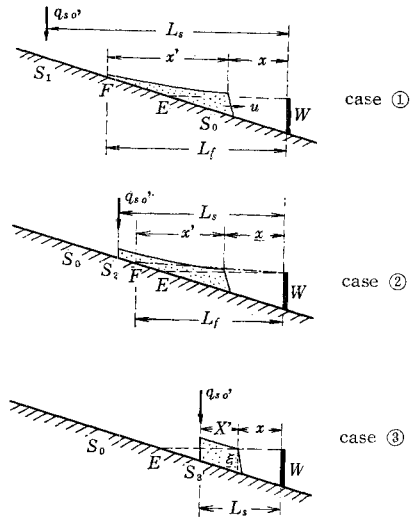
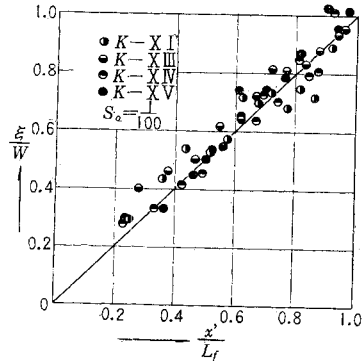


図-7 ξ/W と x'/L_f との関係



$$\xi/W = x'/L_f \dots\dots(13)$$

が段丘厚さを決定する。上式は q や S_0 などに無関係に成立するが、ただ式中の L_f は (11) 式で示したように $h_c/(\sigma/\rho-1)d$ に関係するから両式より

$$\xi/W = (1/3.03) (x'/L) \left\{ \frac{(\sigma/\rho-1)d}{h_c} \right\}^{0.4} \dots\dots(14)$$

が得られる。上式は $S_0 = 1/100 \sim 1/267$, $h_c/(\sigma/\rho-1)d = 13 \sim 25$ の範囲で適用される。

(3) 流砂量

等流状態の流れにおける流砂量については従来多くの研究が行なわれた。次元解析的に示せば

$$f(S_0, h, \rho, \tau, q_s, d, \sigma, \sigma_1, S.F.) = 0 \dots\dots(15)$$

ここに、 σ_1 は砂粒の配合状態を示すもので、たとえば標準偏差とする。 $S.F.$ は砂粒の形状を示す無次元量である⁹⁾。3次元的な考え方を入れ、 h の代りに径深 R を用い、さらに S_0 の代りに新しい変数 $U_R^* = (gRS_0)^{1/2}$ を用いることにすると、一般矩形断面の水路に対して次式が得られる。

$$f_1(v_R^*, R, \rho, \tau, q_s, d, \sigma, \sigma_1, S.F.) = 0 \dots\dots(16)$$

v_R^* , ρ , d を反復変数にえらべば 6 個のパイ項が得ら

れる。

$$\phi\left(\frac{d}{R}, \frac{v_R^{*2}}{gd}, \frac{q_s}{v_R^* d}, \frac{\sigma}{\rho}, \frac{\sigma_1}{d}, S.F.\right) = 0 \dots (17)$$

σ/ρ の代りに $(\sigma-\rho)/\rho$ を用い、さらにこれと v_R^{*2}/gd とを組みあわせた $v_R^{*2}/(\sigma/\rho-1)gd$ を v_R^{*2}/gd の代りに用いると

$$\frac{q_s}{v_R^* d} = \psi_2 \left(\frac{R}{d}, \frac{v_R^{*2}}{(\sigma/\rho-1)gd}, \frac{\sigma-\rho}{\rho}, \frac{\sigma_1}{d}, S.F. \right) \quad (18)$$

となる。上式の右辺の第2項を ψ で表わせば、Brownの式は ψ を最も重要な量とみなし、 $q_s/U_R^* d$ と ψ とを用いた流砂量公式に相当し、椿博士、岩垣博士の式の考え方も大体同様である。Einstein は上式を若干変形した $q_s/\{(\sigma/\rho-1)gd\}^{1/2}$ と $1/\psi$ とを用いている。

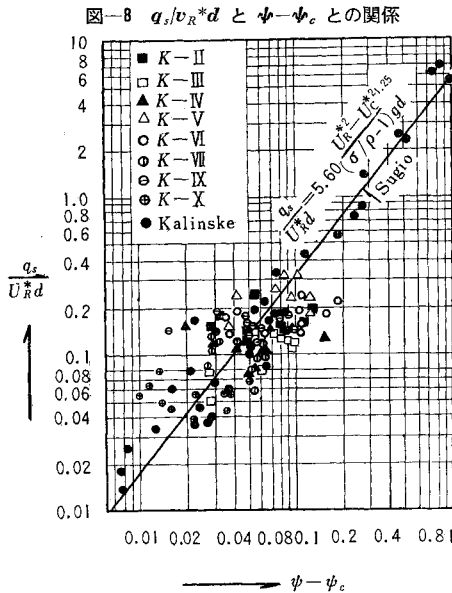


図-8 q_s/v_R^*d と $\psi-\psi_c$ との関係

さてせきによる堆砂が進行している状態の流れは元来不定流なのであるが、堆砂の進行が緩慢な場合には瞬間的には不等速定流として扱おうことができよう。実験 K では水路の流れ方向 1 m ごとに水深、水位、砂面標高などを測定したので、各区間を不等速定流とみなして中央断面の v_R^* を計算し、 q_s/v_R^*d と $(\psi-\psi_c)$ との関係を点描したのが 図-8 である。 ψ_c は限界掃流力に相当する ψ である。この際の v_c^* の計算には岩垣公式を使用した。上図に黒丸で点描してあるのは、Kalinske の図⁷⁾ に示されている描点に対し $\psi_c=0.05$ と仮りにみなして描いたものである。著者の実験の描点の散開はかなり大きいが、両者はほぼ同一の傾向をもつことが推察でき、これらを総合する実験式として次式が得られる。

$$q_s/v_R^*d = 5.6(\psi-\psi_c)^{0.25} \dots (19)$$

ここに、 $d=0.885\sim 0.89$ mm, $\psi_c < \psi < 0.1$ であるが、Kalinske の描点もふくめれば $\psi_c < \psi < 1.0$ とみなすことができる。

(4) 流砂面上の抵抗法則

移動床をもつ流れの抵抗法則の研究は、移動床表面の状態が plane bed, ripples, smooth, antidunes などのように種々な形態となる場合があるため、きわめて複雑である。本文では著者の実験の範囲に適する実験式を示すに止める。矩形水路における移動床の抵抗法則は次式で表わすことができる⁸⁾。

$$\frac{v}{v_R^*} = \phi_1 \left(\frac{R}{d}, F_R, \frac{v_R^* d}{v}, \psi, \frac{v_R^*}{w}, \frac{\sigma_1}{d} \right) \dots (20)$$

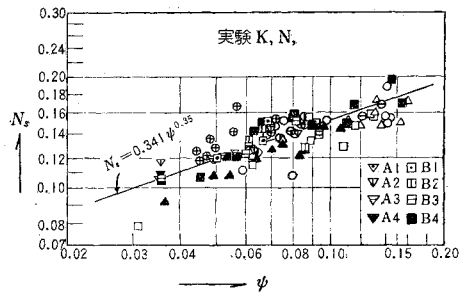
ここに、 $F_R = v/g^{1/2}R^{1/2}$, w は砂粒の静水中の沈降速度である。 $v/v_R^* = \varphi$ とおけば、摩擦係数 f , Manning の粗度係数 n , Chézy 係数 C , 相当粗度 k_s などと φ との関係はつぎのようである。

$$\left. \begin{aligned} f &= 8/\varphi^2 \\ C &= \varphi g^{1/2} \\ n &= R^{1/6}/\varphi g^{1/2} \\ \varphi &= 6.25 + 5.75 \log_{10} R/k_s \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

椿博士が発表した砂連に対する実験式⁹⁾ は、 k_s/d と ψ とを最も重要な無次元量としてえらんだものであり、plane bed に対する岩垣博士の式¹⁰⁾ も同様である。著者が行なった堆砂実験 K, および N においては、(22) 式で示すように粗度係数 n をふくむ無次元量 N_s を考え、 N_s を両対数紙の縦軸に、 ψ を横軸にとって点描を試みた。図-9 は実験 K の $S_0=1/267$ の場合と実験 N の $S_0=1/100$ の場合に関する描点を示している。描点は比較的よく集中しており、次式で表わすことができる。

$$N_s = 0.34 \psi^{0.35} \dots (22)$$

図-9 N_s と ψ との関係



ここに、 $N_s = n g^{1/2} / d^{1/6}$ である。実験 K の場合は $\psi = 0.03\sim 0.15$, 実験 N の場合は $\psi = 0.05\sim 0.08$ の範囲であって、 $\psi > \psi_c$ になると ψ の増加とともに N_s も徐々に増加することがわかる。砂面の状態は大体 plane bed にちかい外観を呈しているが、これを $\log_{10} S \sim \log_{10} \psi$ 図に点描すれば前記論文⁸⁾の 図-9 に示したように transition の範囲に包含される。

(5) 段丘の前進速度

この実験で得られた段丘の前進速度 U は、これまで述べた諸変数以外に、給砂点の位置も変数として加えねばならない。著者の実験では、流量にちょうど釣合う流

砂量を与えないで、 q とは無関係に給砂量 $q_{so'}$ を適宜与えたため実験の種類が増し、現象が複雑になった。図-6 の case ① は給砂点 S_1 がせきの上流のかなり遠い距離にあるか、または水路床勾配 S_0 がきわめて大きい場合に相当する。case ③ は給砂点 S_3 がプール内部にある場合で、補給された砂はそのままプール内に堆積し、その高さがほぼプール境界面の標高に達するとはじめて段丘は前進する。このときは給砂点の位置 L_s は U に影響する。case ② 両者の中間の性質をもち、給砂点 S_2 はプール末端より上流ではあるが、せきによる背水の影響区域内にある場合で、 L_s は若干 U に影響を与えるものと思われる。以下それぞれの case に分類して述べよう。

a) 背水区域外に給砂する場合 (case ①) 段丘の前進速度 U は次式で表わされるものとする。

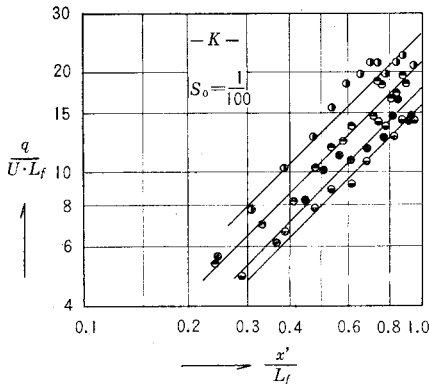
$$U = f(S_0, L_f, x', \rho, r, q, q_{so'}, d) \dots\dots(23)$$

このうち x' は時間 t の代りに用いられる。 L_f, ρ, q を反復変数とみなせば

$$\frac{q}{U \cdot L_f} = \phi\left(S_0, \frac{x'}{L_f}, \frac{h_c}{L_f}, \frac{q_{so'}}{q}, \frac{L_f}{d}\right) \dots\dots(24)$$

case ① に属する実験として実験 K, L, N のうちの $S_0=1/100$ のものをえらび、 $q/U \cdot L_f$ と x'/L_f を計算して両対数紙に点描したのが 図-10 である。描点は水平と 45° の傾斜をなす線上にかなりうまく集中するから、上式を書きなおして次式を得る。

図-10 $q/U \cdot L_f$ と x'/L_f との関係



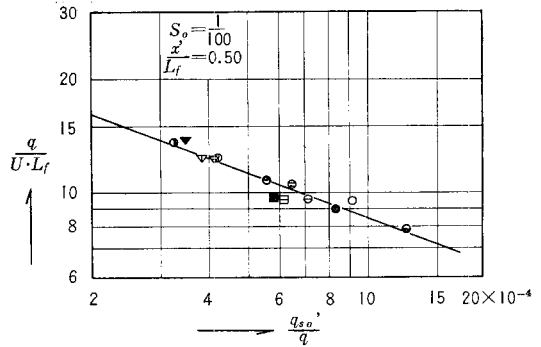
$$\frac{q}{U \cdot L_f} = \frac{x'}{L_f} \phi_1\left(S_0, \frac{h_c}{L_f}, \frac{q_{so'}}{q}, \frac{L_f}{d}\right) \dots\dots(25)$$

$S_0, x'/L_f$ が一定で、 $L_f/d, h_c/L_f$ がほぼ一定のときの $q/U \cdot L_f$ と $q_{so'}/q$ との関係を図示したのが 図-11 である。これより

$$\frac{q}{U \cdot L_f} = 1.06 \left(\frac{x'}{L_f}\right) \left(\frac{q_{so'}}{q}\right)^{-0.4} \times \phi_2\left(S_0, \frac{h_c}{L_f}, \frac{L_f}{d}\right) \dots\dots(26)$$

が得られる。上式より ϕ_2 を求め、これとカッコ内の各項との関係を見ると、 h_c/L_f が相当変化しても ϕ_2 はほとんど変わらず、また L_f/d は重要項とは考えられない

図-11 $q/U \cdot L_f$ と $q_{so'}/q$ との関係



ので無視すれば上式は

$$\frac{q}{U \cdot L_f} = 1.06 \left(\frac{x'}{L_f}\right) \left(\frac{q}{q_{so'}}\right)^{0.4} \times \phi_3(S_0) \dots\dots(27)$$

となる。ここに $\phi_3(S_0=1/100)=1.0$ である。case ① に属する実験では $S_0=1/100$ 以外の資料がないので、これ以上くわしく ϕ_3 の形を求めることはできなかった。さて $S_0=1/100$ のときには (27) 式は

$$U = 0.943 q^{0.6} q_{so'}^{0.4} / x' \dots\dots(28)$$

となる。給砂を開始してからの経過時間を t sec とすれば、case ① では段丘ができてからの経過時間にほぼひとしく、 $U = dx'/dt$ であるから

$$t = \int_0^{x'} \frac{x' dx'}{0.943 q^{0.6} q_{so'}^{0.4}} \dots\dots(29)$$

より t が定まる。実験中では $q, q_{so'}$ は一定であるから

$$t = \frac{x'^2}{1.89 q^{0.6} q_{so'}^{0.4}} \dots\dots(30)$$

段丘がせきに到着するまでの時間を T とすれば、 $x' = L_f$ のとき $t=T$ となるので次の関係式が得られる。

$$t/T = (x'/L_f)^2 \dots\dots(31)$$

図-12 は実験 N について、 t/T と x'/L_f との関係を図示し (31) 式と比較したもので、図-13 は実験 K, L, N について上式から得られた計算値 T と測定値 T' とを比較したものである。

図-12 t/T と x'/L_f との関係

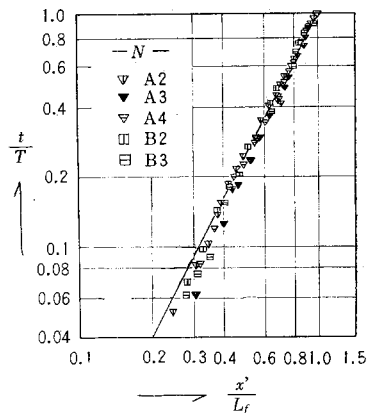
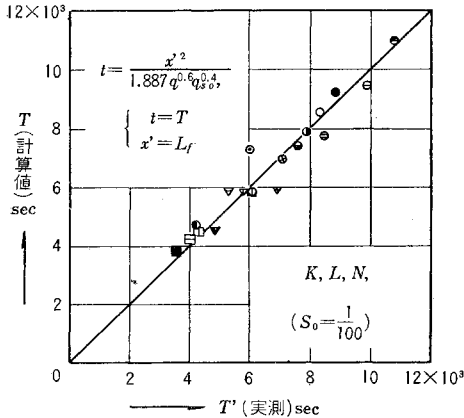


図-13 T と T' との関係



b) 背水区域内に給砂する場合 このときには給砂点の位置を示す変数 L_s を付加しなければならないから、前項の(25)式を参照して次式が得られる。

$$\frac{q}{U \cdot L_f} = \phi_1 \left(S_0, \frac{x'}{L_f}, \frac{L_s}{L}, \frac{q_{s0}'}{q} \right) \dots\dots\dots(32)$$

① 給砂点がプール末端より上流にあるとき：まず実験 K のうちの $S_0=1/267$ に対する実験では、各実験ごとに q_{s0}'/q と L_s/L とは一定であるから、左辺と x'/L_f との関係を決めると 図-14 が得られ、これより

$$\frac{q}{U \cdot L_f} = \left(\frac{x'}{L_f} \right)^{0.75} \times \phi_2 \left(S_0, \frac{L_s}{L}, \frac{q_{s0}'}{q} \right) \dots\dots(33)$$

図-14 $q/U \cdot L_f$ と x'/L_f との関係

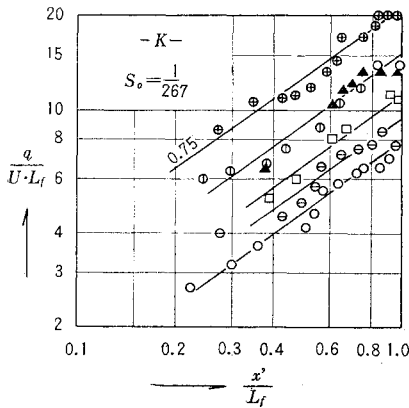
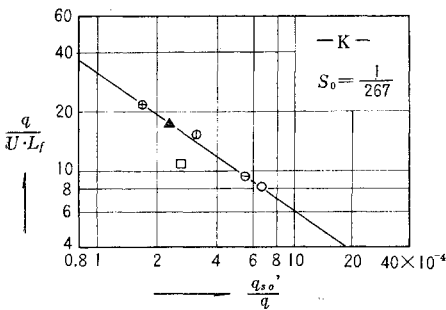


図-15 $q/U \cdot L_f$ と q_{s0}'/q との関係



となる。さらに $x'/L_f, S_0, L_s/L$ を一定として左辺と砂水比との関係を点描すると 図-15 が得られる。すなわち

$$\frac{q}{U \cdot L_f} = \left(\frac{x'}{L_f} \right)^{0.75} \times \left(\frac{q_{s0}'}{q} \right)^{-0.7} \times \phi_3 \left(S_0, \frac{L_s}{L} \right) \dots\dots(34)$$

と書くことができる。 ϕ_3 の値は、 $S_0=1/267, L_s/L=8.38/6.68$ のときに 0.0489 となった。このような場合には U と t は

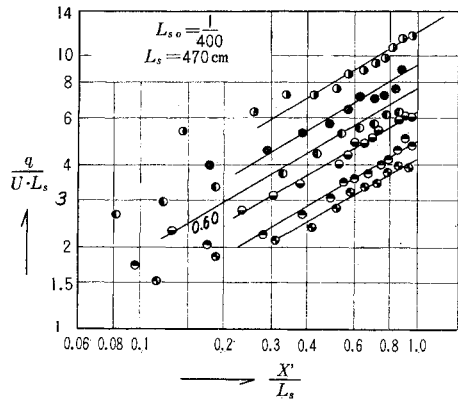
$$U = \frac{q^{0.3} q_{s0}'^{0.7}}{0.0489 x'^{0.75} L_f^{0.25}} \dots\dots\dots(35)$$

$$t = \frac{0.0279 L_f^{0.25} x'^{1.75}}{q^{0.3} q_{s0}'^{0.7}} \dots\dots\dots(36)$$

で表わされる。

② 給砂点がプール内部にあるとき：給砂器から落ちた砂粒は落下地点に堆積し、それがある厚さに成長して始めて段丘の前進がおこる。そこで段丘肩の位置をむすぶ線から仮想上の段丘始点 F をきめると、それはせきの上流 $L_f=9m$ 付近であることがわかる。 F を起点として段丘肩までの距離を x' とすれば、(13)式とまったく同様な式が得られる。まゝと同様に $q/U \cdot L_f$ と x'/L_f との関係をしらべると、これまでのような好結果は得られない。そこで段丘の前進は給砂点から始まることを考え、給砂点を起点としてみよう。給砂点から段丘までの距離を X' とおき、 $q/U \cdot L_s$ と X'/L_s とを両対数紙の両軸にとれば、各実験ごとの描点はその勾配が 0.60 の直線上に集中する傾向がみられる(図-16)。さらにまゝと同様の方法により

図-16 $q/U \cdot L_s$ と X'/L_s との関係



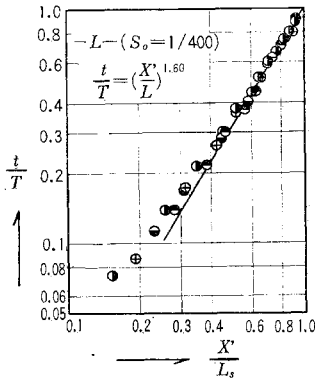
$$\frac{q}{U \cdot L_s} = \left(\frac{X'}{L_s} \right)^{0.6} \times \left(\frac{q_{s0}'}{q} \right)^{-0.7} \times \phi_3 \left(S_0, \frac{L_f}{L_s} \right) \dots\dots(37)$$

が得られる。ここで S_0 と L_f/L_s を種々変化させた実験がないので ϕ_3 の形を定めることは困難であるが、 $S_0=1/400, L_f/L_s=900/470$ のとき $\phi_3=1.0$ となる。このときは

$$U = \frac{q^{0.3} q_{s0}'^{0.7}}{0.0484 L_s^{0.4} X'^{0.6}} \dots\dots\dots(38)$$

$$t = \frac{0.03 L_s^{0.4} X'^{1.6}}{q^{0.3} q_{s0}'^{0.7}} \dots\dots\dots(39)$$

図-17 t/T と X'/L_s との関係



$$t/T = (X'/L_s)^{1.6} \dots\dots\dots(40)$$

となる。図-17 は実験 L について t/T と X'/L_s との関係点を点描したもので、 X' が小さい区間を除けば描点は勾配が 1.6 の直線上に配列することが明らかである。

(6) 段丘部流砂量

段丘部流砂量 q_{sf} はプールの容量を次第に埋積していくから、せきの堆砂現象の重要部分をしめるもので、段丘の前進速度 U と次式で結びつけられる。

$$q_{sf} = U \xi (1-\lambda) \dots\dots\dots(41)$$

ここに、 ξ は段丘の厚さ、 λ は砂の空けき率である。 ξ はまた、段丘を起点とすると段丘前進距離 x' に比例しやはり (13) 式が成立する。

a) 背水区域外に給砂する場合 (case ①) case ①

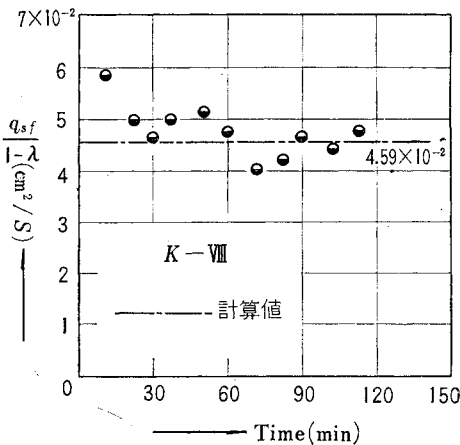
に対しては (28) 式が成立するので、(28), (41), (13) 式より ξ と x' とを消去すれば次式が得られる。

$$q_{sf}/(1-\lambda) = 0.943 q^{0.6} q_{so}^{0.4} W/L_f \dots\dots\dots(42)$$

実験中は q と q_{so} とは一定であるから、上式より q_{sf} は一定となる。図-18 は計算値と測定値を比較した一例で、大体両者は一致していることがわかる。上式を変形すると

$$q_{sf}/q_{so} = 0.943(1-\lambda)(W/L_f)(q_{so}/q)^{-0.6} \quad (43)$$

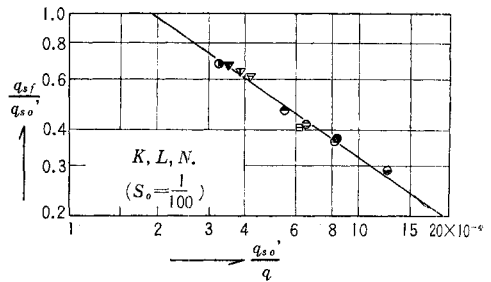
図-18 段丘部流砂量の時間的变化



となるが、上式の左辺は給砂量の何パーセントが段丘の前進に役立つかを示す割合で、この割合は砂水比が大きいくほど減少することがわかる。この関係を図示したのが図-19 で、砂水比が大きいくときは段丘として前進するよりもむしろ堆積の傾向が大きいくことを示す。上式における W/L_f の値が同一ならば図の描点の傾斜は -0.6 となるべきであるが、(10) 式でのべたように L_f は h_c/d の関数で、 q が大きいくほど小くなる傾向があるため、図の描点の傾斜はむしろ -0.7 を示した。つまり W/L_f の影響を考慮しなければ

$$q_{sf}/q_{so} = 0.0025(q_{so}/q)^{-0.7} \dots\dots\dots(44)$$

図-19 q_{sf}/q_{so} と q_{so}/q との変化



が得られる。図-19 から明らかなように、砂水比が小さければ左辺は次第に大となり 1 に近づく。これは給砂量のほとんど全部が段丘の前進に消費されることを意味し、いわば砂面はほとんど平衡状態にちかい場合に相当する。換言すればこの実験では、流量とバランスする量よりはるかに多量の給砂量を与えた実験が多かったことになる。なお (43) 式と (44) 式はともに、 $q_{so}/q = 3 \times 10^{-4} \sim 12.3 \times 10^{-4}$ の範囲内で適用される。

b) 背水区域内に給砂する場合 この場合は実験数が少ないので一般的な実験式は得られなかったが、 $S_0 = 1/267$ と $1/400$ の場合についてのべる。

① $S_0 = 1/267$ の場合：(41) 式に (35) 式と (13) 式とを代入すれば

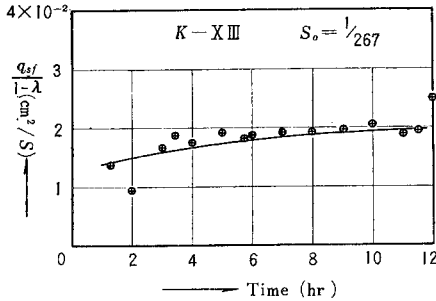
$$q_{sf} = \frac{0.6 x'^{0.25} W q^{0.3} q_{so}^{0.7}}{0.0489 L_f^{1.25}} = 12.3 W x'^{0.25} q^{0.3} q_{so}^{0.7} L_f^{-1.25} \dots\dots\dots(45)$$

となる。一例として実験 $K-X$ について q_{sf} を計算してみよう。(11) 式より $L_f = 667.5$ cm となり、従って (36) 式より $x'^{1.75} = 1.801$ t が得られる。1 時間ごとの x' を上式から計算し、さらにその x' を用いて (45) 式より $q_{sf}/(1-\lambda)$ を

$$\frac{q_{sf}}{1-\lambda} = 3.854 \times 10^{-3} (x')^{0.25} \dots\dots\dots(46)$$

によって計算すると 図-20 に示す曲線が得られる。また測定から得られた $\xi \times U$ を同図に点描してあるが、これによれば計算値は大体実験値にちかい値となるようである。

図-20 段丘部流砂量の時間的变化



② $S_0=1/400$ の場合: このときには段丘は給砂点の位置から始まると考え、(13)式における x' を

$$x' = L_f - L_s + X' \dots\dots\dots(47)$$

と書き直し、かつ(41)式に(38)式の U を代入すれば次式が得られる。

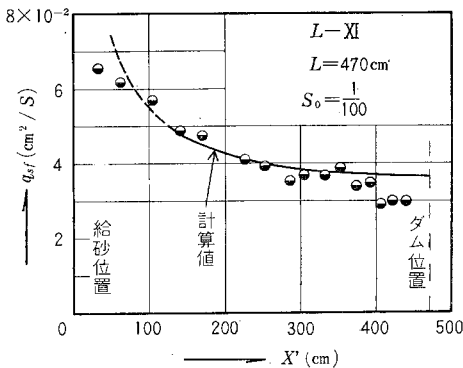
$$q_{sf} = \frac{(1-\lambda)Wq^{0.3}q_{so'}^{0.7}(L_f - L_s + X')}{0.0484L_s^{0.4}L_fX'^{0.6}} \dots\dots(48)$$

実験 L の $S_0=1/400$ の場合には $L_f=900$ cm, $L_s=470$ cm, $W=2$ cm, $\lambda=0.40$ であるから上式は

$$q_{sf} = 2.35 \times 10^{-3} q^{0.3} q_{so'}^{0.7} (430 + X') X'^{-0.6}$$

となる。図-21 は実験 $L-XI$ について計算値と測定値とを比較したものである。(48)式を変形すれば

図-21 q_{sf} と段丘位置 X' との関係



$$\frac{q_{sf}}{q_{so'}} = \left(\frac{q_{so'}}{q}\right)^{-0.3} \frac{(1-\lambda)WX'^{-0.6}(L_f - L_s + X')}{0.0484L_s^{0.4}L_f} \dots\dots\dots(49)$$

となるから、実験 L の VII~XII にいたる6組の実験では、 X' が同一ならば砂水比大なるほど $q_{sf}/q_{so'}$ は小になる。

(7) 堆砂面の平均勾配

せきによる堆砂面勾配は実用的観点からきわめて重要である。流量 q と給砂量 $q_{so'}$ および砂の性質が与えられたときの等流平衡状態の砂面勾配は、等流における流砂量式と流れの運動および連続式をみだす勾配を求めることによって決定される。ここでは段丘が前進しつつある、いわゆる非平衡状態にあるときの堆砂面勾配を次元解析で求めよう。

ある時刻における堆砂面勾配 i は、段丘位置によって若干異なるが、測定された縦断面図からみるとほぼ一定とみなしてよい。このように、ある時刻における堆砂面勾配を一様とみなし、これを i とすれば次式が得られる。

$$i = F(S_0, W, t, q, \rho, \tau, d, q_{so'}) \dots\dots\dots(50)$$

さらに従来の実験結果からみると、時間の経過とともに堆砂は上下流ともほとんど均一に行なわれていることが知られているので²⁾、 t を上式から除外する。こうして段丘がせきにつくまでの全期間を通じての平均勾配を i_m と名づけると

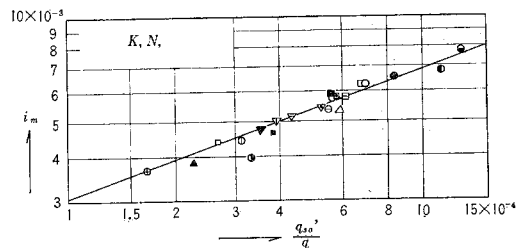
$$i_m = \phi\left(S_0, \frac{d}{W}, \frac{q^2}{gd^3}, \frac{q_{so'}}{q}\right) \dots\dots\dots(51)$$

なる無次元式が得られる。表-3 は実験 K, N について $i_m, S_0, h_c/d, q_{so'}/q$ を表示したものである。さて上式の右辺の各項のうち最も大きい影響を与える砂水比を横軸にとり、 i_m を縦軸にとって点描すると図-22 が得られる。これより

表-3 平均堆砂面勾配に関する実験結果

実験番号	i_m	S_0	h_c/d	$q_{so'}/q$
K-I	4.64×10^{-8}	1/267	35.0	3.767×10^{-4}
II	4.42		38.2	2.63
IV	3.80		38.7	2.29
V	5.34		37.3	5.89
VI	6.24		27.8	6.67
VII	4.42		28.2	3.05
IX	5.40		28.1	5.44
X	3.70		27.8	1.62
XI	3.97		26.6	3.25
XII	6.80		26.8	11.0
XIII	7.80		1/100	21.4
XIV	5.70	20.4		5.51
XV	6.50	20.5		8.25
N-A1	(5.51)	1/100		21.6
A2	5.01		23.7	3.87
A3	5.20		25.1	4.13
A4	4.80		28.3	3.44
B1	5.80		21.3	5.69
B2	6.25		23.9	6.63
B3	5.75		25.4	6.10
B4	5.80		28.0	5.61

図-22 i_m と砂水比との関係



$$i_m = \left(\frac{q_{so'}}{q}\right)^{0.35} \times \phi_1\left(S_0, \frac{W}{d}, \frac{h_c}{d}\right) \dots\dots\dots(52)$$

なる関係式が得られるが、表-4 によれば $S_0, h_c/d, W/d$ は ϕ_1 にほとんど影響を与えないと思われ、結局

$$i_m = 0.0774(q_{s0}/q)^{0.35} \dots \dots \dots (53)$$

となる。ここに、砂水比 $q_{s0}/q = (1.6 \sim 12.2) \times 10^{-4}$ で、砂粒径 $d = 0.844 \sim 0.89 \text{ mm}$ であった。

つぎに q と q_{s0} とが与えられたとき等流状態でちょうど砂面が平衡勾配 I_0 となったとしよう。このような勾配は 1 種類しかないことは理論的にも正しいから、(51) 式において変数 S_0 の代りに I_0 代入すれば

$$\frac{i_m}{I_0} = \phi_2 \left(\frac{q_{s0}}{q}, \frac{W}{d}, \frac{h_c}{d} \right) \dots \dots \dots (54)$$

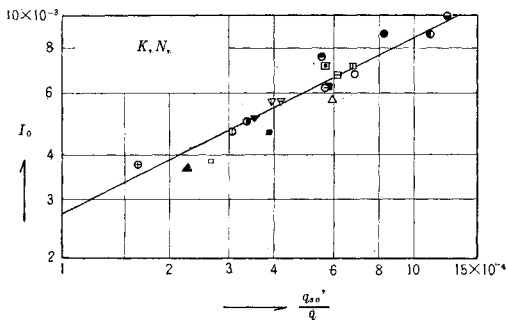
が得られる。ここに I_0 は実験値をそのまま用いるのが望ましいが、この実験では平衡の段階にまで長時間にわたり実験を継続することができなかつたので、やむなく以下の理論計算から推定することにした。まず流砂量公式としては著者の提案した (19) 式において $q_s = q_{s0}$ とおき、上式を満足する v^* を逆算する。粗度係数 n は著者の提案した (22) 式を用い、次式から平衡勾配を算出することにした。

$$I_0 = v^{*2}/gR \dots \dots \dots (55)$$

さて実験 K, N などの結果にもとづき、上式で計算した I_0 と砂水比とを両対数紙の両軸にとって点描すると **図-23** が得られ、これを実験式で示せば

$$I_0 = 0.272(q_{s0}/q)^{1/2} \dots \dots \dots (56)$$

図-23 平衡堆砂面勾配と砂水比との関係

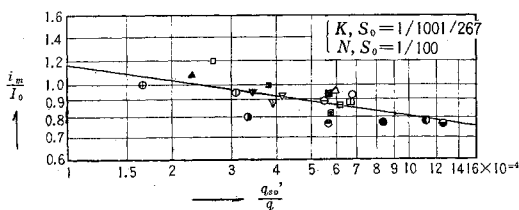


となる¹¹⁾。また i_m/I_0 を砂水比とともに図示すれば **図-24** となる。描点の散在ははかなり大きいですが、砂水比の増大とともに i_m/I_0 は減少する傾向がみられ、実験式で示せば $q_{s0}/q > 2.3 \times 10^{-4}$ の範囲に対し

$$\frac{i_m}{I_0} = 0.285(q_{s0}/q)^{-0.15} \dots \dots \dots (57)$$

となる。 $q_{s0}/q < 2.3 \times 10^{-4}$ の範囲については実験点が少ないので明確に断言することはできないが、恐らく $i_m/I_0 \approx 1.0$ とみなしても差つかえないものと思われる。

図-24 i_m/I_0 と砂水比との関係



つまり給砂量に比して流量が大きいか、流量に比して給砂量がかかなり小さくて両者の比が前記の値以下になると、段丘が前進しつづけている非平衡状態であっても、堆砂勾配はほとんど平衡に達しているとみて大過ないものと推定できる。

4. 結 言

本論文は著者がこれまで数多く実施した、掃流によってせき上流に堆砂が進行する場合の各種実験結果を総合し、次元解析を用いて得た若干の実験式を示したものである。矩形水路に限定されているが、従来不明確であった各変数相互の関係がこれによってかなり明確になった。流砂量については、不等速定流の式を利用することにより、従来の等流状態に対する公式に類似した一実験式を得た。移動床上の抵抗法則については、Manningの n 、砂の粒径および掃流関数 ψ をふくむ実験式を得た。また段丘部水深、段丘厚さ、段立前進速度、段丘部流砂量などについて得られた実験式は、それぞれ解析的研究の基礎として役立った。ただし、段丘前進速度、段丘部流砂量については、実験の給砂点の位置を多く変えたそれぞれについて、すべての変数の影響を詳細にしらべることができなかつた。段丘が前進している状態においては、砂水比 q_{s0}/q がきわめて重要な量であること、段丘上ではつねに常流となる傾向があること、平均堆砂面勾配は砂水比が 2.2×10^{-4} 以上の範囲ではほぼ平衡勾配とみなしうることなどがわかつた。

この研究を行なうに当り、京都大学 石原博士、岩垣博士の御指導と御示唆をいただいた。また実験には信州大学工学部助手 草間孝志氏ならびに多数の学生諸君の熱心な御協力をいただいたことを付記して謝意を表する。

参 考 文 献

- 1) 杉尾捨三郎：堰上流の堆砂に関する 解析的研究，土木学会論文集，第 32 号，1956，pp. 18-25.
- 2) 杉尾捨三郎：堰上流の堆砂現象に関する実験，土木学会誌，第 38 卷 第 11 号，1953，pp. 26-30.
- 3) 杉尾捨三郎：堰の堆砂に関する実験，第 3 報，信州大学工学部研究報告，No. 5，1955，pp. 119-136.
- 4) 杉尾捨三郎：矩形水路内の堰による 堆砂現象の実用的一解法，信州大学紀要，第 9 号，1960，pp. 97-117.
- 5) 岩垣雄一：限界掃流力の 流体力学的研究，土木学会論文集，第 41 号，1955，pp. 1-21.
- 6) 岩垣雄一：米国における 土砂水理学の現況，京都大学防災研究所年報，第 2 号，1958，pp. 148-162.
- 7) Rouse, H.: Engineering Hydraulics, John Wiley & Sons, New York and Chapman & Hall, Ltd., London, 1950, p. 799.
- 8) 杉尾捨三郎：移動床をもつ 流れの水路床状態の区分について，土木学会論文集，第 71 号，1960，pp. 7-13.
- 9) 樫東一郎：水路床砂れきの 掃流力について，九大流体研究所報告，第 7 卷第 4 号，1951，pp. 25-38.
- 10) 岩垣雄一：雨水流による 地面浸食機構に関する 基礎的研究，学位論文，1955，pp. 3-86.
- 11) 杉尾捨三郎：堰による堆砂現象に関する研究，学位論文，1960，p. 91. (原稿受付：1961.8.1)

A STUDY ON THE SEDIMENTATION UPSTREAM OF A WEIR IN A RECTANGULAR FLUME BY MEANS OF DIMENSIONAL ANALYSIS

By Dr. Eng., Sutesaburo Sugio, C.E. Member

A laboratory study was made on the characteristics of flowing water and sand movement in order to determine what factors govern the sedimentation upstream of a low dam by entrainment. Thirty-seven experimental runs were performed in rectangular flumes for various conditions, with graded sand ranging from 0.756 mm to 0.89 mm in diameter.

As were reported already, flume slope, flow discharge, and the quantity of supplied sand were maintained constant during each experiment. Several experimental formulas derived by means of dimensional analysis with the experimental results were proposed concerning the front thickness, water depth and the advancing velocity of the front, the rate of sediment transport, the resistance to flow and the mean slope of sand bed profile. As soon as sands were supplied, near the upstream end of the pool there appeared a small sand front, which advanced toward downstream becoming larger with the lapse of time. The capacity of the pool decreased gradually being buried with thick sand layer.

(1) Water depth at the front : The π theorem concerning the water depth at the front yields

$$\frac{h_F}{h_c} = \phi_2 \left(S_0, \frac{d}{W}, \frac{h_c}{d}, \frac{qt}{d^2}, \frac{\sigma - \rho}{\rho}, \frac{q_{s0'}}{q} \right) \quad (1)$$

in which h_F , water depth at the front; h_c , critical depth; S_0 , slope of the flume; W , height of a weir; σ and ρ density of sand and water respectively; q , flow discharge; $q_{s0'}$, quantity of supplied sand; d , diameter of sand grain; t , the time.

In the range $h_c/(\sigma/\rho - 1)d = 13$ to 25, the following equation is derived.

$$\frac{h_F}{h_c} = 0.56 \left\{ \frac{h_c}{(\sigma/\rho - 1)d} \right\}^{2/7} \quad (2)$$

Moreover, it was proved that h_F was nearly equal to the critical depth for sediment movement h_K theoretically. It should be

noted that even when the flume slope was steeper than the critical slope the flow at the front became always sub-critical flow.

(2) Thickness of the front : Since the thickness of the front ξ increases with time proportionally to the distance x' between the front and the beginning point of the front, the following expressions are given :

$$\frac{\xi}{W} = \frac{x'}{L_f} \quad (3)$$

$$\frac{\xi}{W} = \frac{1}{3.77} \frac{x'}{L} \left(\frac{d}{h_c} \right)^{0.4} \quad (4)$$

in which L is the pool length and L_f is the distance between weir and the beginning point of the front. They are applicable to the range in which S_0 is 1/100 to 1/267 and $h_c/(\sigma/\rho - 1)d$ is 13 to 25.

(3) Rate of sediment transport : Assuming the flow instantaneously as gradually varied flow and dividing the flume into 50 or 100 cm interval reaches, the mean frictional velocity v_R^* was evaluated in every reach. Observed data may be summarized by Eq. (5).

$$q_s/v_R^*d = 5.6(\psi - \psi_c)^{1.25} \quad (5)$$

in which $\psi = v_R^{*2}/(\sigma/\rho - 1)gd$; ψ_c , the value of ψ for the critical tractive force.

(4) Resistance to flow on the movable bed : Data of experiments K and N for the range $\psi = 0.03$ to 0.15 yield

$$ng^{1/2}/d^{1/6} = 0.34 \psi^{0.35} \quad (6)$$

in which the regime of bed conditions was found to be "transition" between plain bed and ripples, according to the $\log_{10} S \sim \log_{10} \psi$ chart proposed by the author.

(5) Advancing velocity of the front : Three cases were considered according to the position where sands were supplied.

(1) The position lies beyond the region of backwater.

(2) The position lies within the region of backwater, but in the upstream reach of

the pool.

- (3) The position lies within the region of backwater, and inside of the pool.

In the case (1), for instance, dimensional analysis yields

$$\frac{q}{U \cdot L_f} = 1.06 \frac{x'}{L_f} \left(\frac{q_{so'}}{q} \right)^{-0.4} \times \phi_3(S_0) \dots\dots\dots(7)$$

in which U is the advancing velocity of the front and ϕ_3 is evaluated as 1.0 when S_0 is equal to 1/100. Further clearer functional form for ϕ_3 was not determined because of lack of adequate data in these cases.

- (6) Rate of transport of bed materials at the front: The rate of transport of bed load at the front q_{sf} is an important factor to determine the decrease of pool capacity, and is estimated by the following formula:

$$q_{sf} = U \cdot \xi (1 - \lambda) \dots\dots\dots(8)$$

in which λ is the porosity of bed materials. Since q_{sf} also depends on the position where sands are supplied, experimental data permit the following expression

$$\frac{q_{sf}}{1 - \lambda} = 0.943 q^{0.6} q_{so'}^{0.4} \frac{W}{L_f} \dots\dots\dots(9)$$

If there is no influences of W/L_f upon q_{sf}

it follows

$$\frac{q_{sf}}{q_{so'}} = 0.0025 \left(\frac{q_{so'}}{q} \right)^{-0.7} \dots\dots\dots(10)$$

in which sand-water ratio $q_{so'}/q$ varies in the range from 3×10^{-4} to 12.3×10^{-4} and S_0 is equal to 1/100.

- (7) Mean slope on sand surface profile upstream of a weir: Let the mean slope on the sand surface where the sedimentation due to the bed load is in progress designate by i_m . Then observed data may be summarized as follows:

$$i_m = 0.0774 \left(\frac{q_{so'}}{q} \right)^{0.35} \dots\dots\dots(11)$$

$$\frac{i_m}{I_0} = 0.272 \left(\frac{q_{so'}}{q} \right)^{1/2} \dots\dots\dots(12)$$

in which I_0 is the computed equilibrium bed slope. They are applicable to conditions in which sand-water ratio varies from 1.6×10^{-4} to 12.3×10^{-4} and d varies from 0.844 mm to 0.89 mm.

Plotted data showed that if sand-water ratio was smaller than 2.3×10^{-4} the bed slope might be considered approximately as the equilibrium slope.