

ねじり剛性をもつ斜連続箱桁橋の解析について

—単体箱桁橋の場合—

成瀬 輝 男*

要旨 箱桁が斜に支持される場合、桁のもつ大きなねじり剛性のために直橋の場合と異なった解析が要求される。

最近箱桁型式の橋梁の架設が一般化しており、それと同時に箱桁斜橋の施工されることも多くなってきているにもかかわらず、この種の問題を取り扱った文献は少ない^{(1),(2),(3)}。そこで以下筆者の検討したところを記し、参考に供したいと考える。

1. まえがき

一般に斜橋はたわみ曲線のずれの関係から偏心載荷の場合だけでなく、橋軸中心のつた荷重によってもねじれを生ずる。桁の断面構成がねじり剛性とほしい場合、たとえば2本のI桁を並列したような場合には、このねじれ影響は局部的なものにとどまり、さして問題にならないが、箱桁のように大きなねじり剛性をもつ断面構成の場合、もはやこのねじり影響を無視することはできない。すなわちこの種の斜橋では死・活荷重によるせん断力・反力が橋軸線に対して非対称に分布し、反力についていえば一般に鈍角端部支承反力は増大し鋭角端部支承反力は減少する。特に斜角の大きい場合この傾向はいちじるしく、鋭角端部における負反力の発生を照査する必要も生じてくる。

しかしながら、この種の斜橋が単純桁である場合にはその解析は比較的簡単であるが、連続桁を形成するとするとその不静定次数の高さのために、また全構造系を立体的に把握することを要求される点から、その解析は必ずしも簡単ではない。

筆者は当地において設計計算に従事する間に何回かこの種の橋梁を担当する機会をもったが、計算を簡単化する方法として次のことを意図した。すなわち連続斜橋を2つの系にわけて考えた。

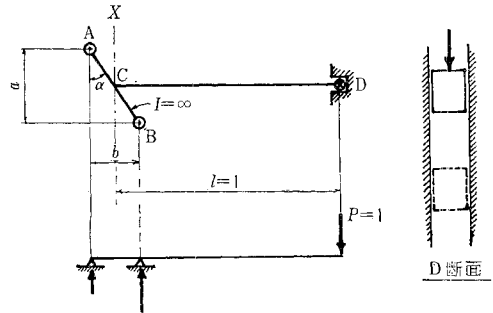
- (1) 普通の連続桁：ほとんどの場合既製の数表⁵⁾を利用できるので不静定計算を行なう必要はない。
- (2) 斜支承の影響：これは主桁に曲げモーメント、ねじりモーメント、せん断力を与える。

したがって問題は斜支承から生ずる影響のみに集約されることになり、このことは事実上の未知量を半減するという利点のほか、計算の各段階における把握がいちじるしく容易となることを意味する。

2. 斜支承に対する考察

斜支承部のもつ特異性を明らかにするために、まず斜支承そのものに対して考察を加えてみよう。図-1において桁C~DはC端で小桁A~Bと斜に交り交点は剛に結合されている。D端は鉛直方向には支持されていないでただねじれ回転できないように拘束されている。D点に外力 $P=1$ を加えるとき反力 A, B は

図-1



◎ 上向きの力 ⊗ 下向きの力

$$\sum V=0 \text{ より } A+B+1=0$$

$$\sum M=0 \text{ より } \frac{b}{2}(A-B)+1=0$$

したがって両反力の大きさは

$$A = \frac{1}{2} - \frac{1}{b}, \quad B = \frac{1}{2} + \frac{1}{b}$$

この反力から点Cにおける曲げモーメント・ねじりモーメントを求めると

$$M = -\frac{b}{2}(A-B) = -1$$

$$M_T = \frac{a}{2}(A-B) = -\frac{a}{b} = -\cot \alpha$$

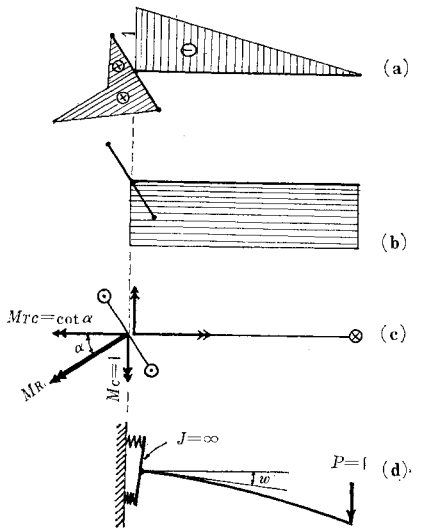
図-2 (a), (b) は M, M_T の分布を、同じく (c) は各モーメントベクトルの点Cにおける釣合状態を示す。太線で示したモーメントベクトル M_R は点Cにおける反モーメントの合モーメントである。

次にこの系の変形状態について検討を加えてみる。桁C~Dの曲げ変形は一端埋込の片持ちりと同様であるが、本例の場合は点Cにおいてx軸に関し桁端の回転が生ずる。点Cに仮想モーメント $\bar{M}_C=1$ をかけそれによって生ずる \bar{M}, \bar{M}_T を図-2 (a), (b) の M, M_T と重ね合わせてこの回転量を求めると、

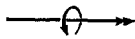
$$w = \int_0^D \frac{D}{EI} \bar{M} dx + \int_0^D \frac{D}{GI_T} \bar{M}_T dx = 0 + \frac{\cot^2 \alpha}{GI_T} \dots (1)$$

* 正員 松尾橋梁KK東京支店設計部 (西独 Dörnen 橋梁会社に実習勤務中に発表)

図-2



図中2重矢印はモーメントベクトル(時計方向)を示す



次に小桁 A~B の変形について考察するとこの小桁はその桁軸に関して回転はするがねじり変形・曲げ変形は生じない ($M_T=0, J=\infty$)。

以上本例について検討したところをとりまとめると次のことがいえる。

- (1) 本例は片持ばりに似ているが桁端Cで弾性回転が可能である。
- (2) 弾性回転量は点Cにおける曲げモーメント M_C に比例し、そのバネ剛さは桁のもつねじり剛さによってきまる。
- (3) 外力 P によって生ずるモーメントに対して抵抗するのは結局 M_R であり、 M_R に関して変位(回転)は0である。

連続桁が斜に支持される場合にも、同様のことがいえる。すなわち、桁は支承部で自由に回転しえず弾性的な拘束をうける。この回転抵抗は支承線に直角方向に作用するモーメントベクトル M_R によって生じる。そこで各支承部に1個ずつ存在する M_R を求めることができれば斜連続桁の全系を解くことができる。

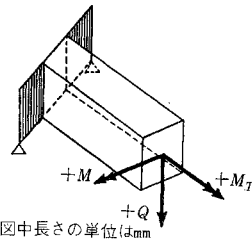
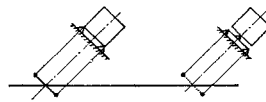
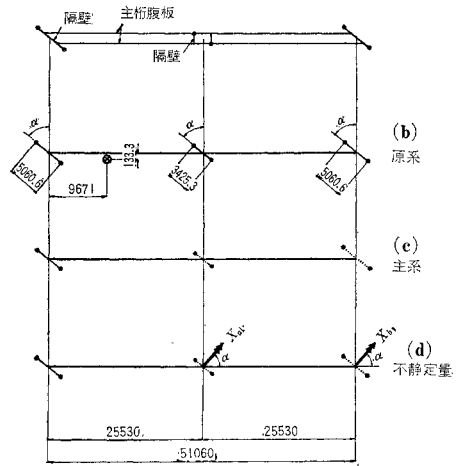
3. 斜連続桁の解析

以下数値計算例の形で図-3に示す2径間斜連続桁を解析の対象として扱う。

平面的に支持される構造物は3個の支点によって静定的に支承される。図-3(b)に示された原系は6個の支点を有するから3次の不静定である。図-3(c)は主系としてえらばれ、左端支承のみ原系のまま残され残余の2個の支承部では主桁は桁の直下に各1個ずつ設けられ

図-3

$\alpha=57.992$ Neugrad ($\sim 58^\circ$)
 $\sin \alpha=0.79042$
 $\cos \alpha=0.61258$
 $\frac{EI}{GI_T}=2.85$

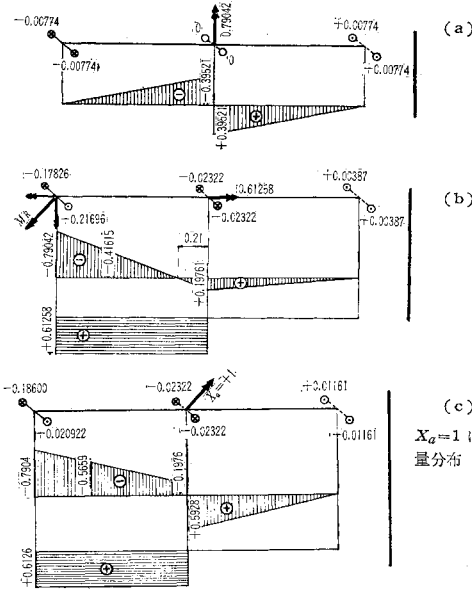


図中長さの単位はmm

た揺支承によって支持されている。換言すれば桁は各支承部で1個ずつの揺支承によって支持されるが桁の横倒れ安定を保つために左端部支承のみは原系のまま残され2個の支点で支えられている。このようにえらばれた主系に応じて図-3(d)に見るように2個のモーメントベクトル X_a, X_b が未知量として導入される。残る1個の不静定量は主系にふくまれるが、この量は一般に既製の数表から求めるから最初から既知として扱うことができる。

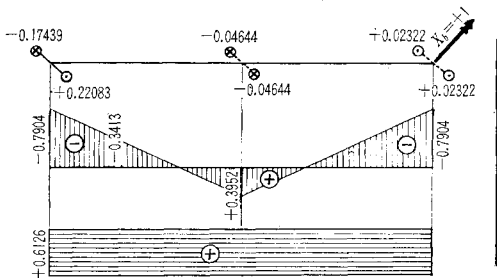
図-4(c)は $X_a=1$ によって生ずる M, M_T の分布を示す。この分布は図-4(a), (b)にみるような X_a の2個の分モーメントを重ね合わせることによって求められる。このうち桁軸に平行方向の分モーメント $\cos \alpha=0.61258$ はねじりモーメントとして桁に働き主桁左端部で支持される。ところで同点における反モーメント M_R との間の釣合条件を満たすために、この点には端曲げモーメント $\sin \alpha=0.79042$ が生じる。

図-4



同様に $X_b=1$ によって生じる力量の分布も 2 個のモーメントの影響を重ね合わせてえられ、図-5 にみるごとくである。

図-5
 $X_b=1$ による力量分布

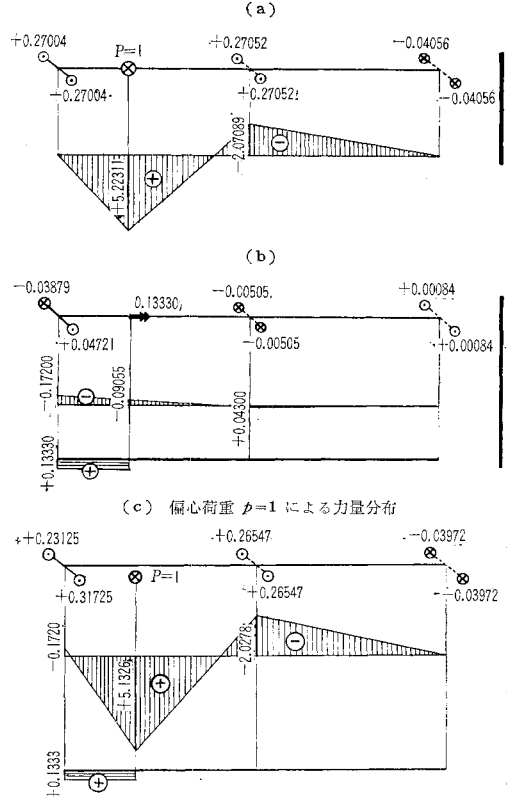


次に偏心荷重 $P=1$ によって主系に生ずる M, M_T の分布を求める。この偏心荷重 図-6 (a), (b) にみるように垂直力とねじりモーメントの 2 つにわけて各力量分布を求め両者の結果を重ね合わせてえられる。図-6 (a) の曲げモーメントの分布は普通の連続桁と全く同様である。ただ桁は左端で斜に支持されているため同点における桁の垂直方向傾角の大きさに応じて桁の全長にわたって回転する。しかし桁はねじりモーメントはうけていないから桁の全長にわたって回転角は一定であり、この回転は内的仕事量には関与しない。ねじりモーメントの影響は X_a で説明したところと同様であり 図-6 (b) のごとくである。

弾性方程式は

$$\left. \begin{aligned} \int \frac{M_a M}{EJ} dx + \int \frac{M_T M_T}{GJ_D} dx = i_a = 0 \\ \int \frac{M_b M}{EJ} dx + \int \frac{M_{T_b} M_T}{GJ_D} dx = i_b = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

図-6



ここに i_a, i_b は原系主桁が斜支承部で斜方向に有する回転角であるが、原系主桁は支持桁によりこの方向の回転を抑えられているから i_a, i_b はいずれも 0 である。

式 (2) に $M=M_0+M_a X_a+M_b X_b, M_T=M_{T_0}+M_{T_a} X_a+M_{T_b} X_b$ および $\frac{EJ}{GJ_D} = n$ を代入すると、

$$\begin{aligned} & \int M_a M_0 dx + n \cdot \int M_{T_a} M_{T_0} dx \\ & + X_a \left(\int M_a^2 dx + n \cdot \int M_{T_a}^2 dx \right) \\ & + X_b \left(\int M_b M_0 dx + n \cdot \int M_{T_b} M_{T_0} dx \right) = 0 \\ & \int M_b M_0 dx + n \cdot \int M_{T_b} M_{T_0} dx \\ & + X_a \left(\int M_b M_a dx + n \cdot \int M_{T_b} M_{T_a} dx \right) \\ & + X_b \left(\int M_b^2 dx + n \cdot \int M_{T_b}^2 dx \right) = 0 \end{aligned}$$

主系主桁の斜支承部における斜方向回転角を τ とすれば

$$\left. \begin{aligned} EJ \cdot \tau_{a0} &= \int M_a M_0 dx + n \cdot \int M_{T_a} M_{T_0} dx \\ EJ \cdot \tau_{b0} &= \int M_b M_0 dx + n \cdot \int M_{T_b} M_{T_0} dx \\ EJ \cdot \tau_{aa} &= \int M_a^2 dx + n \cdot \int M_{T_a}^2 dx \\ EJ \cdot \tau_{ab} &= \int M_a M_b dx + n \cdot \int M_{T_a} M_{T_b} dx \\ EJ \cdot \tau_{ba} &= EJ \cdot \tau_{ab} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$$EJ \cdot \tau_{bb} = \int M_b^2 dx + n \cdot \int M_{Tb}^2 dx$$

式(2),(3)より

$$\left. \begin{aligned} EJ \cdot (\tau_{aa} + \tau_{aa} X_a + \tau_{ba} X_b) &= 0 \\ EJ \cdot (\tau_{bb} + \tau_{bb} X_a + \tau_{bb} X_b) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

上式中の τ を計算するのは式(3)によるわけであるが既製の計算公式^{6),7)}を利用するのが便利である。

$$25.530 \cdot \frac{1}{3} \cdot (0.790^4 + 0.790 \cdot 4 \cdot 0.1976 + 0.1976^3) = 6.9778$$

$$25.530 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.5928^3 = 2.9905$$

$$2.85 \cdot 25.530 \cdot 0.6126^2 = 27.3053$$

$$EJ \cdot \tau_{aa} = 37.2736$$

$$25.530 \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 0.790^4 - 0.790 \cdot 4 \cdot 0.3952 + 0.1976 \cdot 0.790 \cdot 4 - 2 \cdot 0.1976 \cdot 0.3952) = 3.9874$$

$$25.530 \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 0.5298 \cdot 0.3952 - 0.5928 \cdot 0.790 \cdot 4) = 27.3053$$

$$2.85 \cdot 25.530 \cdot 0.6126^2 = 27.3053$$

$$EJ \cdot \tau_{ab} = EJ \cdot \tau_{ba} = 31.2927$$

$$25.530 \cdot \frac{1}{3} \cdot (0.790^4 - 0.790 \cdot 4 \cdot 0.3952 + 0.3952^3) \cdot 2 = 7.9745$$

$$2.85 \cdot 51.06 \cdot 0.6126^2 = 54.6108$$

$$EJ \cdot \tau_{bb} = 62.5853$$

$$9.671 \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 0.790 \cdot 4 \cdot 0.1720 - 0.790 \cdot 4 \cdot 5.1326 + 0.5659 \cdot 0.1720 - 2 \cdot 0.5659 \cdot 5.1326) = -15.3071$$

$$15.859 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2 \cdot 0.5659 \cdot 5.1326 + 0.5659 \cdot 2.0278 - 0.1976 \cdot 5.1326 + 2 \cdot 0.1976 \cdot 2.0278) = -12.8839$$

$$-25.530 \cdot \frac{1}{3} \cdot 0.5928 \cdot 2.0278 = -10.2297$$

$$2.85 \cdot 9.671 \cdot 0.6126 \cdot 0.1333 = 2.2507$$

$$EJ \cdot \tau_{a0} = -36.1700$$

$$9.671 \cdot \frac{1}{6} \cdot (2 \cdot 0.790 \cdot 4 \cdot 0.1720 - 0.790 \cdot 4 \cdot 5.1326 + 0.3413 \cdot 0.1720 - 2 \cdot 0.3413 \cdot 5.1326) = -11.6531$$

$$15.859 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2 \cdot 0.3413 \cdot 5.1326 + 0.3413 \cdot 2.0278 + 0.3952 \cdot 5.1326 - 2 \cdot 0.3952 \cdot 2.0278) = -6.3071$$

$$25.530 \cdot \frac{1}{6} \cdot (-2 \cdot 0.3952 \cdot 2.0278 + 2.0278 \cdot 0.790 \cdot 4) = 0$$

$$2.85 \cdot 9.671 \cdot 0.6126 \cdot 0.1333 = 2.2507$$

$$EJ \cdot \tau_{b0} = -15.7095$$

弾性方程式は

$\cdot X_a$	$\cdot X_b$	$\cdot 1$	$\cdot X_a$	$\cdot X_b$	$\cdot 1$
τ_{aa}	τ_{ba}	$-\tau_{a0}$	37.2732	31.2927	36.1700
τ_{ab}	τ_{bb}	$-\tau_{b0}$	31.2926	62.5853	15.7095

上式を解くと

$$X_a = +1.30924 \quad X_b = -0.40361$$

この不静定量から最終的な反力分布を求め、さらに反力分布から最終的な曲げモーメント・ねじりモーメントの分布を算出すると 図-7,8 のごとくである。曲げモーメント図に破線で画いたものは直支承連続桁の曲げモーメント図であり、斜支承連続桁との比較を示したものである。

図-7

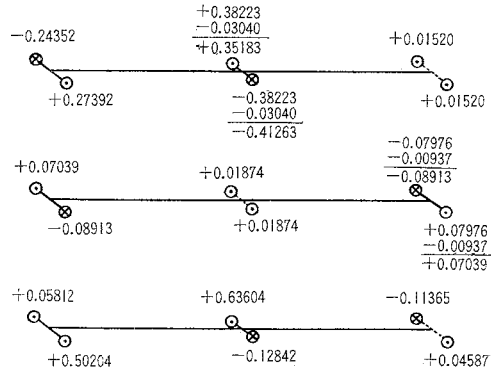
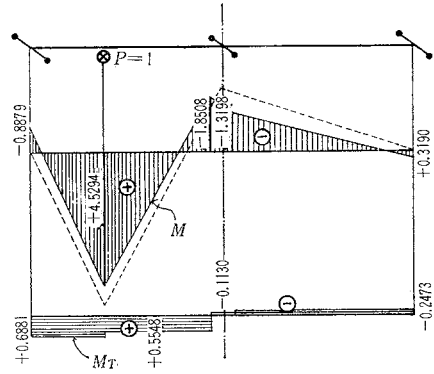


図-8



4. 考 察

上述の計算例でみるように斜支承による影響は非常に大きい。すなわち曲げモーメントは減少するがその代りに大きなねじりモーメントを生じている。直観的なつかみ方をすれば桁の仮想軸線は 図-9 に示すように走り、実際の支間長が短くなるために曲げモーメントは減少するが、減少分の耐荷エネルギーはねじりモーメントに肩がわりしているといえる。

図-9

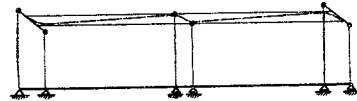


図-8 の M_T 分布図をみてもねじりモーメントの発生について垂直力自身が大きな影響を与えていることは明らかであり、したがって斜角の大きい場合には最大ねじりモーメントが偏心载荷の場合でなく満载荷の場合に生じうることも予期されなければならない。

大きなねじりモーメントの発生によって反力の分布が直橋の場合と異なったものとなってくることは 図-7 にみるごとくである。前に述べたように斜橋の一般性質として桁の鋭角端部の反力は減少し鈍角端部反力は増大する傾向がある。特にこの場合負反力の発生については支点の浮き上りに対する安全率を加味した上で十分照査す

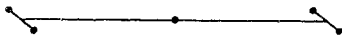
る必要がある。

斜角が大きいために過大なねじりモーメントおよびこれによって生ずる鋭角端部負反力の発生が避けられない場合には、この負反力を対重あるいはアンカーによって処理してしまうのも一方法であるが筆者の私見として次の2案を提案する。

(1) 鋭角端部に予反力を与える方法：鋭角端支承部を架設時に強制扛上し所要正反力を与えてやれば、このプレストレスによって鋭角端部負反力を消すことができると同時に鈍角端部の大きな正反力を軽減することができる。適切な大きさの予反力を与えることによって斜支承から生ずる大きなねじりモーメントを消滅し、応力および反力分布を直橋とほぼ同様の状態にひきもどすことができる。

(2) 中間支承を1個の揺支承とする方法：図-10のように中間支承が1点支持である場合、桁は垂直方向曲げ変形に対しては2径間連続桁であるがねじり変形に対しては全桁長を支間とする1径間の桁として働く。このことは桁のねじり変形がずっと自由になることを意味し斜支承から発生するねじりモーメントは激減する(文献⁴⁾ 計算例 参照)。

図-10



いずれにしても斜角が大きい場合に斜支承から生ずる過大なねじりモーメントをそのまま桁に封じ込めておく

のは不利であるから、前記のような方法でこれを開放する方向へもってゆくべきであろうと考える。

5. あとがき

本計算例は単体箱桁を巾のない棒として扱ったものである。したがって支間長に比して箱巾が大きい場合にはこの仮定条件と適合しないので、当然桁巾を加味して検討を加えることが必要となってくる。この問題について最近ドイツで実験的に取り扱った例があるが⁸⁾、今後理論的検討あるいは系統的な実験研究によってさらに解明していく必要がある。

参考文献

- 1) Wansleben, F.: "Beitrag zur Berechnung schiefer drillsteifer Brücken", Stahlbau 24 (1955) S. 224.
- 2) Homberg, H. und Marx, D.: "Schiefe Stäbe und Platten", Werner-Verlag, Düsseldorf 1958.
- 3) Hoeland, G.: "Der Kraftverlauf in schiefen Hohlkästen", Stahlbau 29 (1960) S. 77.
- 4) 成瀬輝男: "Ein Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger und torsionssteifer Durchlaufträger", Stahlbau 30 (1961) S. 144.
- 5) Anger, G.: "Zehnteilige Einflußlinien für durchlaufende Träger", Bd. III, 8. Aufl. (1955), Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin.
- 6) "Stahlbau" Bd. I, S. 84~91. Stahlbau-Verlag, Köln 1956.
- 7) 鶴岡鶴吉: "応用力学" pp.309~313
- 8) Homberg, H. und Marx, W.R.: "Modeluntersuchung an einem schiefen Kasten", Bautechnik, Hef. 4, 1961.

(原稿受付: 1961.7.22)

EIN BEITRAG ZUR BERECHNUNG SCHIEFWINKLIGER UND TORSIONSSTEIFER DURCHLAUFTRÄGER

von Teruo Naruse, C.E. Member

Eine schiefe Brücke wird im allgemeinen nicht nur bei außermittiger, sondern auch bei mittiger Belastung auf Torsion beansprucht. Wenn bei einer schiefen Brücke der Brückenquerschnitt nur geringen Torsionswiderstand aufweist, wie beispielsweise bei Anordnung torsionsweicher I-Träger, können die Torsionseinflüsse mit der Balkenstatik in einfacherweise berücksichtigt werden und sind vielfach so klein, daß sie als Größen zweiter Ordnung vernachlässigbar sind. Ist der Brückenquerschnitt torsionssteif, liegt ein räumlich statisches System vor, das entsprechend behandelt werden muß. Die Torsionseinflüsse aus der Schiefe der Lagerung können hier nicht vernachlässigt werden, da durch die verschiedenen großen Auflagerkräfte hervorgerufene Schubspannungen zu Bemessung einen erheblichen Beitrag liefern.

Bei torsionssteifen schiefen Durchlaufträgern wird die statische Behandlung durch wachsende räumlich statische Unbestimmtheit erschwert. Insbesondere ist es schwierig, ein geeignetes statisches Grundsystem zu finden, das mit möglichst geringem Rechenaufwand zum Ziele führt.

Die folgende Untersuchung sieht als Hauptsystem den einfachen auf Pendelstützen gelage-

rten Durchlaufträger vor, der an einem Ende kippstabil gehalten ist. Für dieses statisch unbestimmte Hauptsystem (Durchlaufträger) können die Einflußlinien Tabellenwerken entnommen werden. Die Einflüsse der schiefen Stützungen werden getrennt ermittelt, mit den Einflußlinien des Durchlaufträgers überlagert, wodurch die endgültigen Einflußlinien des Grundsystems bestimmt sind.

Diese Berechnungsmethode kann auch für die Berechnung der gekrümmten Kastenträger verwendet werden. Dabei kann man als Hauptsystem den auf Pendelstützen gelagerten, gekrümmten Durchlaufträger, das damit kippstabil ist, aufnehmen. Die statische Größe im Hauptsystem ist nicht mehr in den Tabellenwerten zu finden und die Berechnung wird dadurch wesentlich schwieriger als beim geraden Träger.

Der Träger wird hier schematisch als ein Stab, der eine sehr schmale Breite hat, angenommen, während der wirkliche Träger ein Faltwerk bildet. Infolgedessen bei Anwendung dieser Berechnungsmethode, soll das Verhältniss der Stützweite gegenüber der Trägerbreite nicht allzu klein sein.