

# 巾広げき越流係数の理論的研究

山 辺 春 雄\*  
吉 木 正\*\*

**要 旨** 双曲線断面の巾広げきを越える流れにおいて、その流れ関数を適当に仮定して、巾広げきの越流係数とせきの壁面に沿う圧力分布とを近似的に計算した。また関連する二、三の実験も行なった。

## 1. 緒 言

巾広げきを越える流れにおいては、せきの壁面に沿って発達する境界層の領域を除けば粘性の効果は無視できるから、完全流体の二次元渦なし流れとして取扱って差し支えない。

剛体壁に沿う越流の問題については、完全流体の二次元渦なし流れとして、与えられた自由表面を持つ流れを形成するためにはいかなる剛体壁に沿わねばならないかという問題は原理的に解かれている<sup>1)</sup>。ところが、与えられた剛体壁に沿う流れはいかなる自由表面を形成するかという問題は境界条件の非線型性のためにいちじるしく困難である。工学的に特に重要な巾広げきの越流係数の評価についてもいくつかの試みが行なわれ文献<sup>2)</sup>にそれらの文献のリストも記されている。巾広げきの越流に当って、多くは流線の曲率半径がせきの壁面法線方向に linear に変化するという仮定にもとづいている。この小論のねらいは別の点から流れの解析を進めようとするもので、境界層の近似解法である Kármán-Pohlhausen の手法にならったものである。

## 2. 基礎方程式の導出

せき断面の形状は簡単のため双曲線とし、この巾広げきを越える完全流体の二次元渦なし流れを考えてみよう。壁面を表わす双曲線の方程式は直交座標系で鉛直上方に  $\eta$  軸を流下方向水平に  $\xi$  軸を取り

$$-\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \eta < 0, \dots \dots \dots (1)$$

とし上流側の静水面の位置は

$$\eta = -m \dots \dots \dots (2)$$

とする。

さて  $\psi$  を流れ関数とすれば、流速の  $\xi, \eta$  成分は  $\psi_\eta, -\psi_\xi$ 、さらに  $p$  を流れの中の圧力、 $p_0$  を大気圧、 $\rho$  を流体密度、 $g$  を重力加速度とすれば Bernoulli の定理により

図-1

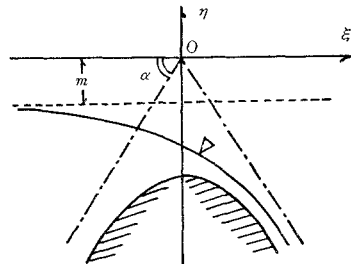
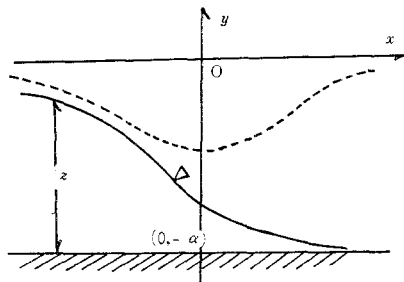


図-2



$$\frac{1}{2}(\psi_\xi^2 + \psi_\eta^2) + g\eta + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

上流側の静止水面では  $\psi_\xi = \psi_\eta = 0, \eta = -m, p = p_0$  であるから上式は

$$\frac{1}{2}(\psi_\xi^2 + \psi_\eta^2) + g\eta + \frac{p}{\rho} = -gm + \frac{p_0}{\rho}, \dots \dots \dots (3)$$

特に自由表面においては  $p = p_0$  であるから

$$\psi_\xi^2 + \psi_\eta^2 = -2g(m + \eta) \dots \dots \dots (4)$$

ところで  $\xi\eta$  面において問題は次のように設定される。明らかに  $\psi$  は渦なしの条件から、その満たすべき微分方程式は

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \psi = 0$$

境界条件は剛体壁（せきの壁面）に沿い

$$\psi = 0$$

自由表面に沿い（越流流量を単位巾につき  $q$  とすれば）

$$\psi = q$$

また自由表面は大気圧に接するから（4）式の条件が成立せねばならない。すなわち

$$\psi_\xi^2 + \psi_\eta^2 = -2g(m + \eta)$$

便宜上  $\xi\eta$  面の代りに等角写像

$$\left. \begin{aligned} \xi &= C \sinh x \cos y \\ \eta &= C \cosh x \sin y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

\* 正員 福井大学講師 工学部機械工学科  
\*\* K.K.奥村組 (元政草大学助手 工学部土木工学科)

によって  $xy$  面に写して問題を考えてみよう。そうすると  $\xi\eta$  面上の双曲線壁は  $xy$  面上の直線壁  $x=-\alpha$  に写される。 $a, b, c$  と  $\alpha$  との間には

$$\left. \begin{aligned} C \cos \alpha &= a & C > 0 \\ C \sin \alpha &= b & 0 < \alpha < \pi/2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

という関係が成立する。

さらに自由表面の上流側の漸近線  $\eta = -m$  は

$$C \cosh x \sin y = -m \dots\dots\dots (7)$$

に写される (図-2 には点線で記されている)。 $z(x)$  を  $xy$  面での越流の厚さ (図-2 参照) とすれば  $\psi$  の満たすべき微分方程式と境界条件は

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$\begin{aligned} -\infty < x < +\infty, & -\alpha \leq y \leq -\alpha + z, \\ y = -\alpha : & \psi = 0, \dots\dots\dots (9) \\ y = -\alpha + z : & \psi = q \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_x^2 + \psi_y^2 &= -2(q^2/\sigma^2)(\cosh x \sin y + \mu) \\ &(\cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y) \dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

となる。ここに  $\sigma$  は一種の Froude 数であり、 $\mu$  も次のように定義される。

$$\sigma = q/\sqrt{gc^3}, \mu = m/c \dots\dots\dots (12)$$

もちろん、この問題を正確に解くことは容易ではない。それゆえに Kármán-Pohlhausen の方法にならって  $\psi$  を  $y$  の多項式 (ここでは二次式) で近似的に表示してみよう。もっとも Kármán-Pohlhausen の方法は境界層内部の速度分布を多項式で近似するものであるが、境界条件 (9) 式, (10) 式を満たすよう指定し、未定のパラメーターを  $f(x)$  とすれば、 $\psi$  は

$$\psi = \{v + f(x)v(1-v)\}q \dots\dots\dots (13)$$

と書くことができる。ここに  $v$  は  $v = (\alpha + y)/z$  で定義され変域  $0 \leq v \leq 1$  をもつ新しい変数であり、 $v=0$  は壁面を、 $v=1$  は自由表面を示すことになる。

ここで計算をすずめる便宜上変数変換  $x, y \rightarrow u, v$

$$\left. \begin{aligned} u &= x \\ v &= (\alpha + y)/z(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

を行なっておこう。そうすると

$$\left. \begin{aligned} \psi_x/q &= \{1 + f(u)(1-2v)\} \{-z'(u)/z(u)\}v \\ &+ f'(u)v(1-v), \\ \psi_y/q &= \{1 + f(u)(1-2v)\}/z(u) \\ \therefore [\psi_x^2]_{v=1} + [\psi_y^2]_{v=1} &= q^2 \{1 - f(u)\}^2 \{1/z^2(u)\} \\ &+ \{z'(u)/z(u)\}^2 \dots\dots\dots (15) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \psi_{xx}/q &= \psi_{uu} - \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \frac{z'(u)}{z(u)} v \psi_v \right\} - \frac{z''(u)}{z(u)} v \psi_{uv} \\ &+ \left\{ \frac{z'(u)}{z(u)} \right\}^2 v \frac{\partial}{\partial v} \{v \psi_v\} \\ \psi_{yy}/q &= \psi_{vv}/z^2(u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{aligned} \therefore (\sigma/q) \int_0^1 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi dv &= f''(u) + 2 \frac{z'(u)}{z(u)} f'(u) \\ &+ \left[ 5 \frac{z'(u)}{z(u)} + \frac{d}{du} \left\{ \frac{z'(u)}{z(u)} \right\} - \frac{12}{z^2(u)} \right] f(u) \\ &- 3 \frac{d}{du} \left\{ \frac{z'(u)}{z(u)} \right\} - 3 \frac{z''(u)}{z(u)} \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

以上のような諸式が得られる。なお、以後混乱のおそれ

がない限り  $u$  と  $x$  とは特に区別せず、ともに  $x$  と書く。

$\psi$  に (13) 式の表現を使うと第3の境界条件を表わす (11) 式は (16) 式により

$$\begin{aligned} &\{1 - f(x)\}^2 \{1 + \{z'(x)\}^2/z^2(x)\} \\ &- (2/\sigma^2) [\mu + \cosh x \sin \{-\alpha + z(x)\}] \\ &[\cosh^2 x \cos^2 \{-\alpha + z(x)\} \\ &+ \sinh^2 x \sin^2 \{-\alpha + z(x)\}] \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

となる。また  $\psi$  の微分方程式 (8) 式についてはそれを縦方向に (壁面に垂直な方向に) 平均した

$$\int_0^1 \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi dv = 0$$

をもって代えることにしよう。したがってこれから (18) 式により

$$\begin{aligned} f''(x) + 2 \frac{z'(x)}{z(x)} f'(x) + \left[ 5 \frac{z'(x)}{z(x)} + \frac{d}{dx} \left\{ \frac{z'(x)}{z(x)} \right\} \right. \\ \left. - \frac{12}{z^2(x)} \right] f(x) - 3 \frac{d}{dx} \left\{ \frac{z'(x)}{z(x)} \right\} - 3 \frac{z''(x)}{z(x)} = 0 \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

を得る。(19) 式と (20) 式は二つの未知変数  $z(x)$  と  $f(x)$  とに関する微分方程式で、これを解こうとするのがわれわれの試みである。

### 3. 0 次近似

微分方程式 (19) 式を書き改めると

$$\epsilon z'^2 = -\epsilon + F(x, z, \mu) \{1/(1-f)^2\} \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned} F(x, z, \mu) &= -z^2 \{ \mu + \cosh x \sin(-\alpha + z) \} \{ \cosh^2 x \cos^2 \\ &(-\alpha + z) + \sinh^2 x \sin^2(-\alpha + z) \} \dots\dots\dots (22) \\ &\epsilon = \sigma^2/2 \end{aligned}$$

通常  $\epsilon$  は  $10^{-2}$  程度の微小量であり、また  $f$  は後述するように  $\epsilon$  の程度であるから、(21) 式において左辺の  $\epsilon$  と  $f$  とを省略すれば

$$0 = -\epsilon + F(x, z, \mu) \dots\dots\dots (23)$$

を得る。明らかに越流の自由表面は上流側では静水面に、また下流側では壁面に漸近せねばならない。したがって (7) 式から

$$x \rightarrow -\infty : \cosh x \sin(-\alpha + z) + \mu \rightarrow 0, \dots\dots\dots (24)$$

また

$$x \rightarrow +\infty : z \rightarrow 0 \dots\dots\dots (25)$$

が成立しなければならぬ。(23) 式は  $z$  の  $x$  についての陰関数表示で (24) 式と (25) 式に矛盾しない分枝を拾うと

$$\begin{aligned} x \sim -\infty : \\ z &= \alpha - 2\mu \exp(x) + \{-8(\epsilon/\alpha^2) + 2\mu - (4/3)\mu^3\} \exp(3x) \\ &- 32\mu(\epsilon/\alpha^3) \exp(4x) + \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \sim +\infty : \\ z &= 2\sqrt{2\epsilon/\sin \alpha} \{ \exp(-3x/2) + (\mu/\sin \alpha) \exp(-4x/2) \\ &+ \sqrt{2\epsilon/\sin \alpha} \cot \alpha \exp(-5x/2) + \dots\dots \} \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

のように展開される。

ここで越流に関する critical condition を記しておこう。文献<sup>3)</sup>によれば、限界水深を与える位置では  $\xi\eta$  面において

$$\left( \frac{\partial m}{\partial \xi} \right)_q = \left( \frac{\partial m}{\partial \eta} \right)_q = 0$$

が成立する。これを  $\mu, \varepsilon, x, y$  で表わせば

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(28)$$

ただし、偏微分は  $\varepsilon$  一定のもで行なうものとする。これを (23) 式に適用すれば  $\partial \mu / \partial x = -(\partial F / \partial x) / (\partial F / \partial \mu)$  などであるから、

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(29)$$

となる。この方程式の二根を

$$x = E, z = A \dots\dots\dots(30)$$

とすれば、(22) 式の  $F$  は  $x$  の偶関数であるから  $E=0$  とすれば  $\partial F / \partial x = 0$  は満たされる。また  $E=0$  のとき  $\partial F / \partial z = 0$  は簡単な計算の結果

$$\frac{2}{A} + \frac{\cos(-\alpha+A)}{\mu + \sin(-\alpha+A)} - 2 \tan(-\alpha+A) = 0, \dots\dots(31)$$

また  $x = E, z = A$  は (23) 式を満たすから

$$F(E, A, \mu) - \varepsilon = 0$$

すなわち

$$F(0, A, \mu) - \varepsilon = 0 \dots\dots\dots(32)$$

これらから  $\mu$  が与えられたとき  $A, \varepsilon$  は既知となる。末尾には表がのせられている。表中  $\varepsilon_0$  の添字の 0 は 0 次近似を意味するものである。

(31) 式と (32) 式から  $\mu$  を消去すれば

$$\varepsilon = (1/2)A^3 \cos^3(A-\alpha) / \{1 - A \tan(-\alpha+A)\} \dots\dots(33)$$

$$\therefore A^3 = (2\varepsilon^3 / \cos^3 A) \{1 + O(\beta^2)\}$$

$$\therefore A = O(\beta) \dots\dots\dots(34)$$

ただし  $\beta^3 \equiv \varepsilon$  とする。同様にして

$$\mu = \sin \alpha - (3/2)A \cos \alpha - (3/2)A^2 \sin \alpha + \dots \dots(35)$$

次にすすむ前に  $x=0$  近傍の諸量を評価しておく。肩に付した添字 0 をもって  $x=0, z=A$  のときの値を示すものとすれば、明らかに

$$F^0 = \varepsilon, F_x^0 = F_z^0 = 0 \dots\dots\dots(36)$$

$F$  は  $x$  に関して偶関数であるから

$$\left. \begin{aligned} F_{xx}^0 &= F_{xxx}^0 = F_{xxx}^0 = \dots\dots = 0 \\ F_{xx}^0 &= A^2 \sin \alpha (\cos^2 \alpha + 2A \sin \alpha \cos \alpha + \dots) \\ F_{zz}^0 &= -3A \cos^3 \alpha - 15A^2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + \dots \\ F_{xxz}^0 &= 2A \sin \alpha \cos^2 \alpha - 3A^2 (\cos^3 \alpha \\ &\quad - 6 \cos \alpha \sin^2 \alpha) + \dots\dots \\ F_{xxz}^0 &= -6 \cos^3 \alpha - 36A \sin \alpha \cos^2 \alpha + \dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots(37)$$

$z(x)$  を  $x=0$  の近傍でべき級数に展開すれば

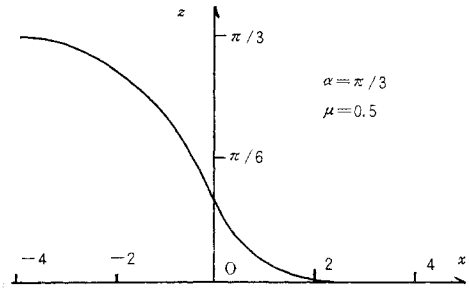
$$z = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots\dots\dots(38)$$

$$\begin{aligned} B &= -\sqrt{-F_{xx}^0 / F_{zz}^0} \\ &= -\sqrt{\frac{\sin(-\alpha+A)}{\mu + \sin(-\alpha+A)} + \frac{2}{\cos^2(-\alpha+A)}} \\ &= -\sqrt{\frac{1 + \mu \sin(-\alpha+A)}{(\mu + \sin(-\alpha+A))^2} + \frac{2}{A^2} + \frac{2}{\cos^2(-\alpha+A)}} \\ &= -\sqrt{(A/3) \tan \alpha + O(A^2)} \dots\dots\dots(39) \end{aligned}$$

$$C = -\{3F_{xxz}^0 + B^2 F_{zzz}^0\} / 6F_{zz}^0 = (2/9) \tan \alpha + O(A) \dots\dots\dots(40)$$

このようにしてえられた (26), (27), (38) 式を用いて  $z(x)$  のグラフを書くことができる。図-3 は  $\mu=0.5, \alpha=\pi/3$  と指定したときの  $z(x)$  のグラフである。

図-3



4. 第一近似

次にこのようにして決定された  $z(x)$  を用いて  $f(x)$  を求めてみよう。  $f$  に課すべき境界条件を考えてみる。 $\xi\eta$  面において (図-1 参照) 十分上流側では流速はほぼ一様でその方向は  $\xi\eta$  面の原点 (漸近線の交わり) を向いていると見なしても差し支えなからう。また十分下流側でも流速はほぼ一様で壁面に平行に流れていると考えてよからう。これは  $xy$  面でいえば流れ関数が  $\psi = (y+\alpha)q/z$ , すなわち  $\psi = qv$  であることに対応する。(13) 式と比較すればただちに

$$x \rightarrow \pm\infty : f \rightarrow 0 \dots\dots\dots(41)$$

を得る。

$z(x)$  が  $x$  の既知関数とすれば (20) 式は  $f$  に関する二階線型常微分方程式となる。これももちろん簡単な求積法で解くことはできない。数値解法によって  $f(x)$  を決定するには  $x$  の変域を二分し (今の場合は  $x \geq 0$  と  $x \leq 0$  とが適当であろう) それぞれ解を求め両者を接合すればよい。すなわち非斉次方程式 (20) の非斉次項を落した斉次方程式において  $C_1, C_2$  を積分定数とし、 $x \leq 0$  の領域で境界条件  $x = -\infty : f = 0$  を満たす解  $C_1 f_1(x)$  を得、 $x \geq 0$  の領域で  $x = +\infty : f = 0$  を満たす解  $C_2 f_2(x)$  を得、次に元の非斉次方程式において  $x \leq 0$  の領域で  $x = -\infty : f = 0$  を満たす特殊解  $\varphi_1(x)$  を、 $x \geq 0$  で  $x = +\infty : f = 0$  を満たす特殊解  $\varphi_2(x)$  を得てこれを  $x = 0$  で接合し ( $f$  ならびに  $df/dx$  を等置する)

$$\left. \begin{aligned} C_1 f_1(0) + \varphi_1(0) &= C_2 f_2(0) + \varphi_2(0) \\ C_1 f_1'(0) + \varphi_1'(0) &= C_2 f_2'(0) + \varphi_2'(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

これから積分定数  $C_1, C_2$  が定まり  $f(x)$  は

$$\left. \begin{aligned} x \leq 0 : f &= C_1 f_1(x) + \varphi_1(x) \\ x \geq 0 : f &= C_2 f_2(x) + \varphi_2(x) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

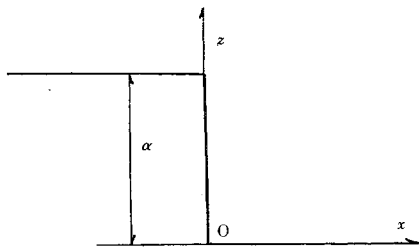
として求められたことになる。ところでこれを計算機によらずに行なうことは大変な手数であり、そのため、次のような簡易化を試みた。図-3 からわかるとおり  $z(x)$  は  $x=0$  の近くで大きく変化し、ほかではそれほど変わらないから  $z(x)$  を階段関数

$$x < 0 : z = \alpha, \quad x > 0 : z = 0$$

でおきかえることも許されるであろう。

このように  $z$  を取ると  $f$  の方程式は

図-4



$$x < 0 : f'' - (12/\alpha^2)f = 0 \dots\dots\dots(44)$$

$$x > 0 : f'' - 3f' - (3 \sin \alpha/2 \varepsilon) \exp(3x) f + (9/2) = 0 \dots\dots\dots(45)$$

となり  $x = -\infty : f = 0$  を満たす (44) 式の解は

$$f = C_1 \exp(\sqrt{12} x/\alpha) \dots\dots\dots(46)$$

他方 (45) 式は変換  $x \rightarrow t$  を施せば

$$t^2 \frac{d^2 f}{dt^2} - t \frac{df}{dt} - t^2 f = 2 \dots\dots\dots(47)$$

$$t = \lambda \exp(3x/2), \lambda = \sqrt{2 \sin \alpha/3 \varepsilon} \dots\dots\dots(48)$$

その齊次方程式は

$$t^2 \frac{df}{dt} - t \frac{df}{dt} - t^2 f = 0 \dots\dots\dots(49)$$

この方程式の基本解を  $\psi_1, \psi_2$  とすれば  $I_1, K_1$  をそれぞれ変形第一種第一種, 第二種ベッセル関数として

$$\psi_1 = t I_1(t), \psi_2 = t K_1(t) \dots\dots\dots(50)$$

であり両者のうち  $x = +\infty : f = 0$  に矛盾しないものは  $t K_1(t)$  の方である。

$\psi_1, \psi_2$  を利用し (47) 式の特解を見出してみよう。特解を

$$f = D_1(u)\psi_1 + D_2(u)\psi_2 \dots\dots\dots(51)$$

とおけば, 線型常微分方程式の性質から

$$D_1' = 2\psi_2/D, D_2' = -2\psi_1/D \\ D = \psi_1\psi_2' - \psi_2\psi_1'$$

またベッセル関数の性質  $I_1 K_1' - I_1' K_1 = -(1/t)$  を利用し  $D = -t$  を得る。

$$\therefore D_1' = -2K_1(t)/t^2, D_2' = 2I_1(t)/t^2$$

したがって  $x = +\infty : f = 0$  を満たす解を作れば

$$f = 2 \left[ \int_t^\infty \{K_1(s)/s^2\} ds \cdot t I_1(t) + \int_\lambda^t \{I_1(s)/s^2\} ds \cdot t K_1(t) \right] \dots\dots\dots(52)$$

この式に表われた定積分の漸近評価を行なってみよう。

$$U(x) \equiv \int_x^\infty \{K_1(s)/s^2\} ds, \\ S(x, y) \equiv \int_x^y \{I_1(s)/s^2\} ds \dots\dots\dots(53)$$

部分積分をくり返し使用すれば

$$2U(x) = 2 \frac{K_0(x)}{x^2} - 2 \frac{K_1(x)}{x^3} + 2^2 \cdot 4 \frac{K_0(x)}{x^4} - 2^2 \cdot 4^2 \frac{K_1(x)}{x^5} \\ + 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6 \int_x^\infty \frac{K_1(s)}{s^6} ds \dots\dots\dots(54)$$

$$2S(x, y) = 2 \left\{ \frac{I_0(y)}{y^2} - \frac{I_0(x)}{x^2} \right\} + 2^2 \left\{ \frac{I_1(y)}{y^3} - \frac{I_1(x)}{x^3} \right\} \\ + 2^2 \cdot 4 \left\{ \frac{I_0(y)}{y^4} - \frac{I_0(x)}{x^4} \right\} + 2^2 \cdot 4^2 \left\{ \frac{I_1(y)}{y^5} - \frac{I_1(x)}{x^5} \right\}$$

$$+ 2^2 \cdot 4^2 \cdot 6 \int_x^y \frac{I_1(s)}{s^6} ds \dots\dots\dots(55)$$

定積分で表示される最終項を打ち切った場合の誤差を調べてみよう。  $I_1(s) < I_7(s), K_1(s) < K_7(s)$  の不等式を用いると  $0 < x < y$  に対し

$$\left. \begin{aligned} \int_x^\infty \frac{K_1(s)}{s^6} ds &< \int_x^\infty \frac{K_7(s)}{s^6} ds = \frac{K_6(x)}{x^6} \\ \int_x^y \frac{I_1(s)}{s^6} ds &< \int_x^y \frac{I_7(s)}{s^6} ds = \frac{I_6(y)}{y^6} - \frac{I_6(x)}{x^6} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(56)$$

したがって問題にしている引数が十分大きければ (54), (55) 式の最後の項を落しても精密な値を示し得る。引数の大きくないところでは  $U, S$  は Simpson 公式によってそれらの値を算出した。いずれも終りに表がのせてある。  $t \rightarrow \infty$  なるとき  $U(t) \sim t^{-2} K_0(t), S(\lambda, t) \sim t^{-2} I_0(t)$  であるから  $f \sim O(t^{-2})$  と推定され, 確かに  $x \rightarrow +\infty : f \rightarrow 0$  の条件を満たしている。したがって  $f$  の一般な解は  $C_2$  を積分定数として

$$x > 0 : f = C_2 t K_1(t) + 2U(t) t I_1(t) + 2S(\lambda, t) t K_1(t), \\ t = \lambda \exp(3x/2) \dots\dots\dots(57)$$

一方  $x < 0$  に対しては, すでに求められたごとく

$$x < 0 : f = C_1 \exp(\sqrt{12} x/\alpha) \dots\dots\dots(46)$$

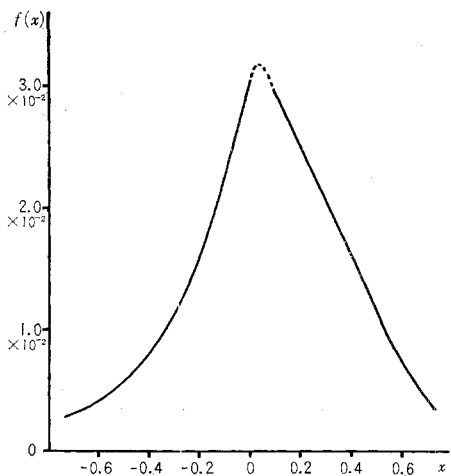
したがって接合の条件を適用すると

$$C_1 = C_2 \lambda K_1(\lambda) + 2U(\lambda) \lambda I_1(\lambda) \\ C_1 2/\sqrt{3} \alpha = -(c_0/2) \lambda^2 K_0(\lambda) + \lambda^2 U(\lambda) I_0(\lambda) \dots\dots\dots(58)$$

$$\therefore C_1 = \lambda U(\lambda) / \{ (\lambda/2) K_0(\lambda) + (2/\sqrt{3} \alpha) K_1(\lambda) \} \\ C_2 = \{ f(0) - 2U(\lambda) \lambda I_1(\lambda) \} / \lambda K_1(\lambda) \dots\dots\dots(59)$$

ここに (46) 式から容易にわかるように  $C_1$  は  $f(x)$  の  $x=0$  における値を与えるものでこれを  $f(0)$  と書いておく。  $C_1, C_2$  が確定すれば (57), (46) 式により  $f(x)$  が定まる。

図-5



グラフからもわかるように  $f(x)$  は  $x=0$  の近くで最大に達し  $x$  の正負の方向に裾を引く形をしている。  $f(x)$  の大きさをしらべる目安として  $f(0)$  を評価してみよう。  $\lambda = \sqrt{2 \sin \alpha/3 \varepsilon}$  であるから,  $\varepsilon$  が小さいとき  $\lambda$  はかな

り大きいと考えられる。(59) 式より

$$f(0) = C_1 \sim \lambda^{-1} K_0(\lambda) / \{ (\lambda/2) K_0(\lambda) + (2/\sqrt{3}) K_1(\lambda) \} \\ \sim 2/\lambda^2 = 3 \varepsilon / \sin \alpha$$

すなわち  $f(0)$  は  $\varepsilon$  と同程度の量と考えられる。

さて、 $f(x)$  を既知として方程式 (21) 式に不完全な方法ながら再びあたってみよう。

$$\varepsilon(1+z^{\mu})(1-f)^2 = F(x, z, \mu) \dots\dots\dots(21)$$

前に述べたように  $z$  の第0近似  $z_0$  は

$$0 = F(x, z_0, \mu) - \varepsilon$$

であったから  $z$  の第一近似は (21) 式の左辺に  $z_0$  を入れた。

$$\varepsilon(1+z_0^{\mu})(1-f)^2 - \varepsilon = F(x, z, \mu) - \varepsilon \dots\dots\dots(60)$$

を用いることにする。そうすると上式の左辺はいずれも  $x$  の既知関数ばかりである。この  $z$  と  $x$  の関係式に critical condition を前回同様適用すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \{ F(x, z, \mu) - \varepsilon(1+z_0^{\mu})(1-f)^2 \} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} F(x, z, \mu) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(61)$$

限界状態はせき頂部の付近で生ずるはずであり、 $x=0$  (せき頂に対応する) における order は  $z_0' \sim \sqrt{\beta}$ ,  $z_0'' \sim 1$ ,  $f \sim \beta^3$ ,  $f' \sim \beta^3$  であるから、この場合  $z_0'^2$  に比し  $f$  を無視してさしつかえない。ゆえに

$$F_x - 2 \varepsilon z_0' z_0'' = 0, \quad F_\varepsilon = 0 \dots\dots\dots(62)$$

この方程式の二根を  $x = E_1$ ,  $z = A + A_1$  とすれば (ここに  $x=0$ ,  $z=A$  は0次近似にあたる)

$$F_x(E_1, A + A_1, \mu) \cong F_{xx}(0, A, \mu) E_1, \\ z_0'(E_1) \cong z_0'(0) = B, \quad z_0''(E_1) \cong z_0''(0) = 2C$$

であるから

$$E_1 \cong 4 \varepsilon B C / F_{xx} \cong O(\beta \sqrt{\beta}) \dots\dots\dots(63)$$

一方  $F_x(E_1, A + A_1, \mu) \cong F_{xx}^0 A_1 + (1/2) F_{xxx}^0 E_1^2$  であるから

$$A_1 \cong -E_1^2 F_{xxx}^0 / F_{xx}^0 \cong O(\beta^3) \dots\dots\dots(64)$$

$\varepsilon$  の第一近似  $\varepsilon_1$  は元の方程式 (21) 式に帰って

$$\varepsilon_1 = [F(x, z, \mu) / (1+z^{\mu})(1-f)^2]_{x=E_1, z=A+A_1} \dots\dots\dots(65)$$

として与える。

$x = E_1$ ,  $z = A + A_1$  においては

$$F(x, z, \mu) \cong F^0 + (1/2) F_{xx}^0 E_1^2, \\ f(x) \cong f(0),$$

$$z' = \frac{-G_{xx} + \sqrt{G_{xx}^2 - G_{xxx} G_{xx}}}{G_{xx}} \cong -\sqrt{(F_{xx}^0 - 4 \varepsilon C^2) / -F_{xx}^0},$$

$$G = F(x, z, \mu) - \varepsilon(1+z^{\mu})$$

であるから、

$$\varepsilon_1 \cong [F^0 + (1/2) F_{xx}^0 E_1^2] / \{ [1-f(0)]^2 [1 + \{(F_{xx}^0 - 4 \varepsilon C^2) / -F_{xx}^0\}] \} \dots\dots\dots(66)$$

となる。なお  $F^0$  は  $\varepsilon_0$  にほかならない。

### 5. 越流係数

$H$  をせき上げ高、 $q$  を単位巾当りの流量とし、越流係数  $r$  を次式のように定義すれば  $\sigma$  の定義、 $\varepsilon$  の定義を参照すれば  $r$  と  $\varepsilon$  との間には (30) 式の関係が成り立つ。

$$q = r \sqrt{2g} H^{3/2} \dots\dots\dots(67)$$

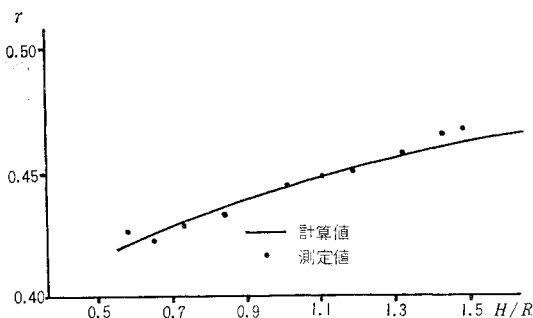
$$r = \sqrt{\varepsilon} / [\sin \alpha - \mu]^{3/2}, \quad H = b - m \dots\dots\dots(68)$$

図-6 は  $\alpha = \pi/3$  として計算した  $r$  のグラフが示されている。なお横軸は  $R$  (せき頂部の壁面の曲率半径) とせき高  $H$  との比  $H/R$  が目盛りされている。  $H/R$  と  $\mu$  とは次の関係で結ばれる。

$$H/R = \sin \alpha (\sin \alpha - \mu) / \cos^2 \alpha \dots\dots\dots(69)$$

図中に示されている点は測定値よりするもので  $a = 10$  cm,  $b = 10\sqrt{3}$  cm ( $\alpha = 60^\circ$ ,  $c = 20$  cm) のせきで行なった実験結果である。

図-6



### 6. 壁面に沿うせき頂部付近の圧力分布

壁面の  $\xi, \eta$  座標を  $\xi_w, \eta_w$ , そのほか壁面のところでの諸量を添字  $w$  を付して区別するものとする。Bernoulli の定理により  $V_w$  を流速、 $p_w$  を圧力 (大気を基準にして測ったものとする) とすれば (図-1 参照)

$$(V_w^2/2) + g\eta_w + (p_w/\rho) = -gm \dots\dots\dots(70)$$

しかるに

$$\xi_w = c \sinh \xi \cos \alpha, \quad \eta_w = c \cosh \xi \sin \alpha,$$

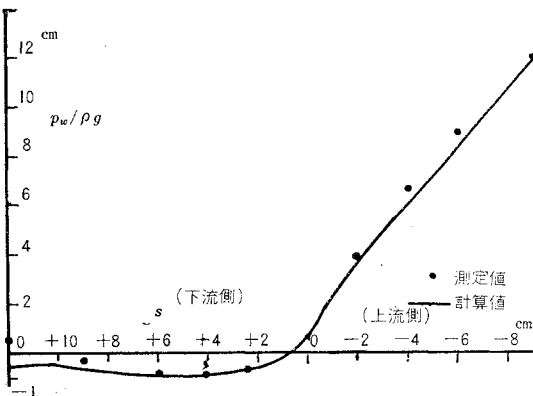
であり

$$V^2 = \psi_\xi^2 + \psi_\eta^2 = (\psi_x^2 + \psi_y^2) / (\cosh^2 x \cos^2 y + \sinh^2 x \sin^2 y)$$

であるから (15) 式により

$$V_w^2 = \left\{ \frac{2q}{c} \frac{1+f(x)}{z(x)} \right\}^2 / \{ \cosh^2 x + 3 \sinh^2 x \} \dots\dots\dots(71)$$

図-7



で与えられる。(71) 式を変形して

$$(p_w/\rho g) = c \cosh \xi \sin \alpha - (V_w^2/2g) - m \dots \dots \dots (72)$$

われわれは  $\alpha = \pi/3$ ,  $\mu = 0.451$  に対しこの  $p_w$  を計算した。図-7 にそれが示されている (図中  $s$  は壁面に沿う長さ)。なお、同時に実験からの測定結果も示されている。実験は前述のように  $a = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 10\sqrt{3} \text{ cm}$ , せき巾  $40 \text{ cm}$  の寸法を持ったせきに流量  $20.27 \text{ l/sec}$  を流して行なったものである。 $\mu = 0.451$  はこの時のせき上げ高を  $\mu$  に換算したものである。測定値と計算値との上流側における不一致は、設置したせき変形によるものと思われる。

7. その他

せきの壁面に沿って発達する境界層の厚さを見積るため、せき頂部の壁面近傍で外径  $0.8 \text{ mm}$  の動圧管をそう入して境界層内部の動圧分布を二、三の場合について測定し、これから (圧力分布を仮定して) 速度分布を推定してみた。せきの流量が少ないときは境界層は層流で流れ、流量の大きいときは乱流が流れていた。実験資料も少ないのでここには記載しない。なお、この実験は岐阜大学工学部土木工学科水理実験室で行なわれたものであ

表-1

$\mu$	$A$	$\epsilon_0$	$B^2$	$f(0)$	$\lambda$	$\tau$
0.40	0.4654	$2.261 \times 10^{-2}$	$1.4175 \times 10^{-1}$	$3.9274 \times 10^{-2}$	5.054	0.463
0.45	0.4256	$1.584 \times 10^{-2}$	$1.3463 \times 10^{-1}$	$3.1084 \times 10^{-2}$	6.037	0.457
0.50	0.3834	$1.059 \times 10^{-2}$	$1.2745 \times 10^{-1}$	$2.3538 \times 10^{-2}$	7.388	0.450
0.55	0.3394	$0.666 \times 10^{-2}$	$1.1932 \times 10^{-1}$	$1.4736 \times 10^{-2}$	9.311	0.447
0.60	0.2938	$3.863 \times 10^{-3}$	$1.0962 \times 10^{-1}$	$1.004 \times 10^{-2}$	12.225	0.438
0.65	0.2461	$1.998 \times 10^{-3}$	$9.788 \times 10^{-2}$	$5.523 \times 10^{-3}$	16.996	0.427
0.70	0.1958	$0.869 \times 10^{-3}$	$8.372 \times 10^{-2}$	$2.258 \times 10^{-3}$	25.777	0.422

( $\alpha = \pi/3$ )

表-2

$x$	$U(x)$	$x$	$S(5, x)$
5	$1.1121 \times 10^{-4}$	5	0
6	$2.7255 \times 10^{-5}$	6	1.2972
7	$7.1475 \times 10^{-6}$	7	3.2609
8	$1.8622 \times 10^{-6}$	8	7.7912
9	$5.0710 \times 10^{-7}$	10	$3.5694 \times 10$
10	$1.3293 \times 10^{-7}$	12	$1.6285 \times 10^2$
11	$4.4018 \times 10^{-8}$	13	$3.5437 \times 10^2$
13	$3.6927 \times 10^{-9}$	14	$7.9015 \times 10^2$
14	$3.8750 \times 10^{-11}$	16	$3.9575 \times 10^3$
17.4	$2.7031 \times 10^{-13}$	17.4	$1.3118 \times 10^4$
18.4	$8.6569 \times 10^{-14}$	18.4	$3.0703 \times 10^4$
		20	$1.0943 \times 10^5$
		24	$4.1232 \times 10^6$

る。

8. 結 語

巾広げきを越える流れにおいて、流れ関数の形を仮定し、さきの越流係数と、壁面に沿う圧力分布とを双曲線断面のせきについて計算した。これに比し、既往の方法は流線の形状を仮定している。後者の方法の方が計算の手続きは簡単であるが、仮定があまり簡単だと壁面に沿う圧力分布までは実測と計算とがよい一致をしないように思える。

参 考 文 献

- 1) Kin N. Ton : "Two dimensional Potential Flow in a gravitational field with a known free streamline", Proceedings of the second U.S. National Congress of Applied Mechanics pp. 603-606
- 2) 岩崎敏夫 : 「越流頂余水吐きの流量係数について」, 土木学会論文集 第43号, pp. 29-37
- 3) Charles Jaeger : "Engineering Fluid Mechanics", London, (1956) p. 103

(原稿受付 : 1961.1.26)

## A MATHEMATICAL STUDY OF A DISCHARGE COEFFICIENT OF THE BROAD CRESTED WEIR

*By Haruo Yamabe, C.E. Member, and Tadashi Yoshiki*

The aim of this paper consists in the estimation of a discharge coefficient of the broad-crested weir. A problem of the spilling flow over the broad-crested weir which has much investigated is fundamental in hydraulics. As in the situation of spilling the viscous effects are confined within a relatively thin region (a boundary layer) adjacent to the surface of the weir, the greater part of the flow is assumed to be inviscid and irrotational.

The difficulty of obtaining the solution for the irrotational flow with free stream line in the gravitational field, however, lies in the fact that the location of the free stream line which constitutes part of the boundary of the flow is unknown a priori. At the free stream, the stream function is constant and the Bernoulli equation for constant pressure must be satisfied. The problem is very complicated because of the non-linearity of the Bernoulli equation.

In the problem of the broad-crested weir, therefore, the analysis has performed on the basis of an assumption in which the configurations of the stream lines in the flow field are prescribed: The local radius of a curvature of the stream line varies linearly with a normal distance from the weir surface. On the other hand, we assume the stream function and propose a different procedure to analyze the problem, which is analogous to Karman-Pohlhausen's method in the boundary layer problem of flow of viscous fluid: We assume that the stream function is a quadratic polynomial of the normal distance from the weir surface.

For the simplicity of the shape the cross section of the weir is assumed hyperbolic:

$$-\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1$$

where  $\xi$ ,  $\eta$  axes are took horizontally and vertically upwards respectively.

Through the conformal mapping

$$\xi = c \sinh x \cos y, \quad \eta = c \cosh x \sin y,$$

$$a = c \cos \alpha, \quad b = c \sin \alpha,$$

$$c > 0, \quad 0 < \alpha < \pi/2$$

the above hyperbola is transformed to the straight line  $x = -\alpha$  in the  $x, y$  plane. The analysis of the flow is performed in the  $x, y$  plane for the convenience of the mathematical treatment. The resulted equations are as follows:

$$\varepsilon z'^2 = -\varepsilon + F(x, z, \mu) \{1/(1-f)^2\}$$

$$f'' + 2 \frac{z'}{z} f' + \left[ 5 \frac{z'}{z} + \frac{d}{dx} \left( -\frac{z'}{z} \right) - \frac{12}{z^2} \right] f$$

$$- 3 \frac{d}{dx} \left( -\frac{z'}{z} \right) - 3 \frac{z'}{z} = 0$$

$$\varepsilon = q/2 g c^3$$

, where

$z$ : the thickness of the spilling flow in the  $x, y$  plane,

$f(x)$ : a parameter associated with the stream function,

$F$ : a known function of  $x, z$  and  $\mu$ ,

$\mu$ : a parameter associated with the total head,

$g$ : gravitational acceleration,

$q$ : a discharge per unit breadth.

After the rough estimation,  $z$  is obtained. An application of the critical condition to  $z$  enables us to determine the discharge coefficient of the weir.