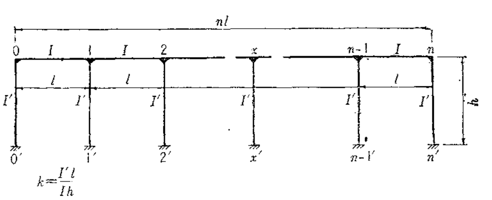
一層連続ラーメンの一般公式について

佐　武　正　雄*

1. 緒　　言

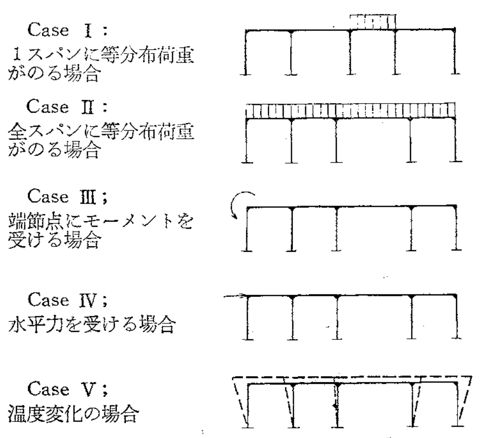
高架橋の設計に当って，その構造・荷重の状態などが特殊である場合はもちろん個々に問題を解かなくてはならないが，われわれの接する問題はかなり単純で一般的に取扱える場合が多いから，その解を公式として与えておけば，いちいち同じ計算をくり返す必要がなく便利である。特に経済比較の立場から，そのスパン数・スパン長・剛比などをいろいろ変えて結果を検討するような場合には速かに解を得ることが必要であって，解の公式は非常に有力である。また，設計用計算機が造られる場合にも，その計算過程を明示する意味でこの公式は役立つものと考えられる。

図—1



ここに述べる公式は**図—1**に示すような一層 n スパンの連続固定ラーメンについて，そのスパン l，高さ h，剛比 k は全体を通じて一定とし（実際問題において 10 % 程度の差異は無視して公式を適用しても差し支えない），荷重として，**図—2** に示す5つの状態を考察することにする。公式の誘導には差分方程式の理論を応用する。結果の公式は**表—2**に示すようにかなり複雑であるが，公式として使用するのに困難というほどではない。

図—2



2. 公式の誘導

たわみ角法の次の式から出発する。

$$\left.\begin{aligned}M_{x-1x}&=2\varphi_{x-1}+\varphi_x-C_{x-1x}\\M_{xx-1}&=\varphi_{x-1}+2\varphi_x+C_{xx-1}\\M_{xx'}&=k(2\varphi_x+\psi_x)\\M_{x'x}&=k(\varphi_x+\psi_x)\\&=\frac{1}{2}(M_{xx'}-k\psi_x)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

$$\text{節点方程式：}M_{xx-1}+M_{xx+1}+M_{xx'}=M_x\cdots\cdots(2)$$

$$\text{層方程式：}\quad\Sigma(M_{xx'}+M_{x'x})=-Ph\cdots\cdots(3)$$

ただし，k は剛比，φ_x および ψ_x はそれぞれ節点回転角および柱材回転角に適当な係数を乗じた未知量，C_{x-1x} および C_{xx-1} は第 x スパン載荷による荷重項，M_x は節点 x に働く外力モーメント，P は層に作用する水平力である。

（1）式を（2）式および（3）式に代入すれば，

$$\left.\begin{aligned}2(1+k)\varphi_0+\varphi_1&=-K_0\\&\cdots\cdots\\\varphi_{x-1}+2(2+k)\varphi_x+\varphi_{x+1}&=-K_x\\&\cdots\cdots\\\varphi_{n-1}+2(1+k)\varphi_n&=-K_n\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

および

$$k(3\,\Sigma\varphi_x+2\,\Sigma\psi_x)=-Ph\cdots\cdots(5)$$

を得る。ここに

$$K_x=C_{xx-1}-C_{xx+1}-M_x+k\psi_x\cdots\cdots(6)$$

である。

φ_x に関する n 元一次連立方程式（4）の解は K_y に無関係な係数 A_{xy} によって線形に

$$\varphi_x=\sum_y A_{xy}K_y\cdots\cdots(7)$$

とかくことができる。係数 A_{xy} を求めるには種々の方法がある**が，ここでは最も簡便な差分方程式の理論を応用する方法による。

まず，連立差分方程式（4）において特定の K_y 以外を0とおいた場合を考えれば，これは2階の同次差分方程式

$$\varphi_{x-1}+2(2+k)\varphi_x+\varphi_{x+1}=0\cdots\cdots(8)$$

を境界条件

$$\left.\begin{aligned}2(1+k)\varphi_0+\varphi_1&=0\\\varphi_{y-1}+2(2+k)\varphi_y+\varphi_{y+1}&=-K_y\\\varphi_{n-1}+2(1+k)\varphi_n&=0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

で解く問題となる。（8）式の固有方程式

$$\beta^2+2(2+k)\beta+1=0\cdots\cdots(10)$$

の1根

$$\beta=-(2+k)+\sqrt{(1+k)(3+k)}\cdots\cdots(11)$$

＊正員　京浜急行電鉄ＫＫ工務部改良課工事係長

** たとえば，参考文献 1）の p. 339 参照

を用いれば，(8)式の解は

$$\left.\begin{array}{ll} 0\leq x\leq y & \varphi_x=A\beta^x+B\beta^{-x} \\ y\leq x\leq n & \varphi_x=C\beta^x+D\beta^{-x} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

とおくことができる。ここに未定係数 A, B, C, D は境界条件(9)から求めることができる。すなわち，

$$\left.\begin{array}{l} A=\dfrac{a(a\beta^{n-y}-b\beta^{-n+y})}{(\beta-\beta^{-1})(a^2\beta^n-b^2\beta^{-n})}K_y \\ B=\dfrac{-b(a\beta^{n-y}-b\beta^{-n+y})}{(\beta-\beta^{-1})(a^2\beta^n-b^2\beta^{-n})}K_y \\ C=\dfrac{-b\beta^{-n}(a\beta^y-b\beta^{-y})}{(\beta-\beta^{-1})(a^2\beta^n-b^2\beta^{-n})}K_y \\ D=\dfrac{a\beta^n(a\beta^y-b\beta^{-y})}{(\beta-\beta^{-1})(a^2\beta^n-b^2\beta^{-n})}K_y \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

ただし

$$\left.\begin{array}{l} \beta^{-1}=-(2+k)-\sqrt{(1+k)(3+k)} \\ \qquad \text{((10) のほかの1根)} \\ a=\beta+2=-2(1+k)-\beta^{-1} \\ b=\beta^{-1}+2=-2(1+k)-\beta \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

である。従って(12)式は

$$\left.\begin{array}{l} 0\leq x\leq y \\ \qquad \varphi_x=\dfrac{(a\beta^x-b\beta^{-x})(a\beta^{n-y}-b\beta^{-n+y})}{(\beta-\beta^{-1})(a^2\beta^n-b^2\beta^{-n})}K_y \\ y\leq x\leq n \\ \qquad \varphi_x=\dfrac{(a\beta^{n-x}-b\beta^{-n+x})(a\beta^y-b\beta^{-y})}{(\beta-\beta^{-1})(a^2\beta^n-b^2\beta^{-n})}K_y \end{array}\right\}$$

となる。しかるに一方(7)式より

$$\varphi_x=A_{xy}K_y$$

であるから，

$$\left.\begin{array}{l} y\leq x \\ \qquad A_{xy}=\dfrac{(a\beta^{n-x}-b\beta^{-n+x})(a\beta^y-b\beta^{-y})}{(\beta-\beta^{-1})(a^2\beta^n-b^2\beta^{-n})} \\ x\geq y \\ \qquad A_{xy}=\dfrac{(a\beta^x-b\beta^{-x})(a\beta^{n-y}-b\beta^{-n+y})}{(\beta-\beta^{-1})(a^2\beta^n-b^2\beta^{-n})} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(15)$$

をうる。

(11)式に示すように，β は k の無理関数で取扱いが不便であるので，今後の計算に便利なようにここで次の9個の有理関数を導入する（ちょうど複素関数 e^{ix} の代りに実関数 $\sin x$ などを用いるのと同様）。

$$\left.\begin{array}{ll} s_x=\dfrac{\beta^{x+1}-\beta^{-x-1}}{\beta-\beta^{-1}}, & f_x=\dfrac{a\beta^x-b\beta^{-x}}{\beta-\beta^{-1}}, \\ t_x=\dfrac{\beta^{x+1}-\beta^{-x}}{\beta-1}, & g_x=\dfrac{a\beta^x-b\beta^{-x+1}}{\beta-1}, \\ u_x=\dfrac{\beta^{x+1}+\beta^{-x}}{\beta+1}, & p_x=\dfrac{a\beta^x+b\beta^{-x+1}}{\beta+1}, \\ v_x=\beta^x+\beta^{-x}, & q_x=a\beta^{x-1}+b\beta^{-x+1}, \\ d_x=\dfrac{a^2\beta^{x-1}-b^2\beta^{-x+1}}{\beta-\beta^{-1}} & \end{array}\right\} \cdots\cdots(16)$$

これらの諸関数はいずれも差分方程式（8）を満たす k の x 次多項式で，相互には次の関係が成り立つ。

i) $t_x=s_x+s_{x-1}$, $u_x=s_x-s_{x-1}$, $v_x=s_x-s_{x-2}$
$g_x=f_x+f_{x-1}$, $p_x=f_x-f_{x-1}$, $q_x=f_x-f_{x-2}$

ii) $f_x=s_x+2s_{x-1}$, $s_x=-\dfrac{1}{3+4k}(2f_{x+1}+f_x)$
$g_x=t_x+2t_{x-1}$, $t_x=-\dfrac{1}{3+4k}(2g_{x+1}+g_x)$
$p_x=u_x+2u_{x-1}$, $u_x=-\dfrac{1}{3+4k}(2p_{x+1}+p_x)$
$q_x=v_x+2v_{x-1}$, $v_x=-\dfrac{1}{3+4k}(2q_{x+1}+q_x)$

iii) $u_x=s_x-s_{x-1}$, $\int u_x\Delta x=s_{x-1}$*
$v_x=t_x-t_{x-1}$, $\int v_x\Delta x=t_{x-1}$
$p_x=f_x-f_{x-1}$, $\int p_x\Delta x=f_{x-1}$
$q_x=g_x-g_{x-1}$, $\int q_x\Delta x=g_{x-1}$

iv) $s_x=-\dfrac{1}{2(3+k)}(u_{x+1}-u_x)$, $\int s_x\Delta x=-\dfrac{1}{2(3+k)}u_x$
$t_x=-\dfrac{1}{2(3+k)}(v_{x+1}-v_x)$, $\int t_x\Delta x=-\dfrac{1}{2(3+k)}v_x$
$f_x=-\dfrac{1}{2(3+k)}(p_{x+1}-p_x)$, $\int f_x\Delta x=-\dfrac{1}{2(3+k)}p_x$
$g_x=-\dfrac{1}{2(3+k)}(q_{x+1}-q_x)$, $\int g_x\Delta x=-\dfrac{1}{2(3+k)}q_x$

v) $s_{-x}=-s_{x-2}$, $t_{-x}=-t_{x-1}$, $u_{-x}=u_{x-1}$, $v_{-x}=v_x$

vi) (8)式を満たす任意の k に関する x 次多項式 F_x について

$$F_{m+x}-F_{m-x-2}=(F_m-F_{m-2})s_x$$
$$F_{m+x}-F_{m-x-1}=(F_m-F_{m-1})t_x$$
$$F_{m+x}+F_{m-x-1}=(F_m+F_{m-1})u_x$$
$$F_{m+x}+F_{m-x}\ =F_mv_x$$

vii) $d_x=f_x+2f_{x-1}=f_if_{x-i}-f_{i-1}f_{x-i-1}$
$d_{2m}=g_mp_m$, $d_{2m+1}=f_mq_{m+1}$

表—1 は $x=-4\sim5$ に対するこれら諸関数の係数を表示したもので**，例えば

$$-f_1=2+2k \quad (\therefore\ f_1=-(2+2k))$$
$$f_2=7+12k+4k^2$$

などである。

前にもどって，(15)式は(16)式によって次のように書き直すことができる。

$$\left.\begin{array}{l} y\leq x \\ \qquad A_{xy}=\dfrac{f_{n-x}f_y}{d_{n+1}} \\ y\geq x \\ \qquad A_{xy}=\dfrac{f_xf_{n-y}}{d_{n+1}} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

従って，(7)式の係数マトリックスは次のような対称マトリックスである。

$$(A_{xy})=\frac{1}{d_{n+1}}\begin{array}{r} \\ \\ i+1) \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \overbrace{\phantom{f_{n-i}}}^{i+1} \\ \begin{Bmatrix} f_0f_n\cdots\cdots f_0f_{n-i}\cdots\cdots f_0f_0 \\ \vdots \\ f_0f_{n-i}\cdots f_if_{n-i}\cdots\cdots f_if_0 \\ \vdots \\ f_0f_0\cdots\cdots f_if_0\ \ \cdots\cdots f_nf_0 \end{Bmatrix} \end{array} \cdots(18)$$

いま，

$$\left.\begin{array}{l} A_x=\sum\limits_y A_{xy} \\ A=\sum\limits_v A_x=\sum\limits_{v,y}A_{xy} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

とおけば，

$$\begin{aligned} A_x&=\int_0^{n+1}A_{xy}\Delta y \\ &=\frac{1}{d_{n+1}}\left(f_{n-x}\int_0^x f_y\Delta y+f_x\int_0^{n-v+1}f_y\Delta y\right) \\ &=-\frac{1}{2(3+k)d_{n+1}}\{f_{n-x}(p_x-p_0)+f_x(p_{n-x+1}-p_0)\} \\ &=-\frac{1}{2(3+k)d_{n+1}}\{d_{n+1}-3(f_{n-x}+f_x)\} \end{aligned}$$

---

* $\int$ はこゝでは積分でなく和分を示す記号として用いる。以下同様。

** x が0または負の場合必ずしも $|x|$ 次多項式とはならない。

表—1

x	$(-1)^x s_x$						$(-1)^x t_x$						$(-1)^x u_x$					
−4	−15	−16	−4				41	76	44	8			−71	−108	−52	−8		
−3	−4	−2					11	14	4				−19	−18	−4			
−2	−1						3	2					−5	−2				
−1	0						1						−1					
0	1						1						1					
1	4	2					3	2					5	2				
2	15	16	4				11	14	4				19	18	4			
3	56	92	48	8			41	76	44	8			71	108	52	8		
4	209	464	372	128	16		153	372	324	120	16		265	556	420	136	16	
5	780	2 182	2 368	1 248	320	32	571	1 718	1 996	1 120	304	32	989	2 646	2 740	1 376	336	32

x	$(-1)^x v_x$						$(-1)^x f_x$						$(-1)^x g_x$					
−4	194	448	368	128	16		97	168	92	16			−265	−668	−604	−232	−32	
−3	52	90	48	8			26	30	8				−71	−138	−84	−16		
−2	14	16	4				7	4					−19	−26	−8			
−1	4	2					2						−5	−4				
0	2						1						−1					
1	4	2					2	2					1	2				
2	14	16	4				7	12	4				5	10	4			
3	52	90	48	8			26	60	40	8			19	48	36	8		
4	194	448	368	128	16		97	280	276	112	16		71	220	236	104	16	
5	724	2 090	2 320	1 240	320	32	362	1 254	1 624	992	288	32	265	974	1 348	880	272	32

x	$(-1)^x p_x$						$(-1)^x q_x$						$(-1)^x d_x$					
−4	459	1 004	788	264	32		−1 254	−3 732	−4 272	−2 352	−624	−64	−627	−1 504	−1 300	−480	−64	
−3	123	198	100	16			−336	−806	−688	−248	−32		−168	−306	−176	−32		
−2	33	34	8				−90	−164	−92	−16			−45	−56	−16			
−1	9	4					−24	−30	−8				−12	8				
0	3						−6	−4					−3					
1	3	2					0	2					0	2				
2	9	14	4				6	12	4				3	8	4			
3	33	72	44	8			24	58	40	8			12	36	32	8		
4	123	340	316	120	16		90	268	272	112	16		45	160	196	96	16	
5	459	1 534	1 900	1 104	304	32	336	1 194	1 584	984	288	32	168	694	1 072	768	256	32

$n=2m$ ならば,

$$=-\frac{1}{2(3+k)q_{m+1}}(q_{m+1}-3\,v_{m-x}) \quad \cdots\cdots\cdots(20)$$

$$A=\int_0^{n+1} A_x\,\varDelta x$$

$$=-\frac{1}{2(3+k)q_{m+1}}\{(n+1)q_{m+1}-3\int_{-m}^{m+1} v_x\,\varDelta x\}$$

$$=-\frac{1}{2(3+k)q_{m+1}}\{(n+1)q_{m+1}-6\,t_m\} \quad \cdots\cdots\cdots(21)$$

同様に, $n=2m+1$ ならば,

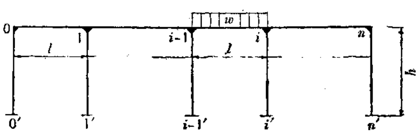
$$A_x=-\frac{1}{2(3+k)p_{m+1}}(p_{m+1}-3\,u_{m-x}) \quad \cdots\cdots\cdots(20)'$$

$$A=-\frac{1}{2(3+k)p_{m+1}}\{(n+1)p_{m+1}-6\,s_m\} \quad \cdots\cdots\cdots(21)'$$

となる。以下, **図—2** に示した5つの荷重状態にわけて説明することにする。

Case I: 第 i スパンに等分布荷重 w が載る場合(**図—3**)

図—3



$$C_{i-1i}=C_{ii-1}=C=\frac{1}{12}wl^2$$

$$C_{x-1x}=C_{xx-1}=0 \quad (x\neq i)$$

また,

$$M_x=0,\quad P=0,\quad \psi_x=\psi \qquad (\text{とおく})$$

(6) 式は

$$K_{i-1}=-C+k\psi$$

$$K_i=C+k\psi$$

$$K_x=k\psi \quad (x\neq i)$$

ゆえに, (7) 式より

$$\varphi_x=(A_{xi}-A_{xi-1})C+A_x k\psi \quad \cdots\cdots\cdots(22)$$

$$\therefore\ \Sigma\varphi_x=(A_i-A_{i-1})C+Ak\psi$$

従って, (5) 式は

$$3\{(A_i-A_{i-1})C+Ak\psi\}+2(n+1)\psi=0$$

となる。

$$\psi=-\frac{3(A_i-A_{i-1})}{3kA+2(n+1)}C \quad \cdots\cdots\cdots(23)$$

a) $n=2m$ の場合

(20) 式より

$$A_i-A_{i-1}=-\frac{3}{2(3+k)q_{m+1}}(-v_{m-i}+v_{m-i+1})=\frac{3\,t_{m-i}}{q_{m+1}}$$

また, (21) 式より

$$3kA+2(n+1)=\frac{D_{m+2}}{2(3+k)q_{m+1}}$$

ただし,

$$D_{m+2}=(n+1)(12+k)q_{m+1}+18\,kt_m \quad \cdots\cdots\cdots(24)$$

ゆえに, (23) 式は

$$\psi=-\frac{18(3+k)t_{m-i}}{D_{m+2}}C \qquad\cdots\cdots(25)$$

また，(22) 式は

$$\varphi_x=\begin{cases}\dfrac{C}{q_{m+1}}\left\{-\dfrac{p_{n-i+1}}{f_m}f_x+\dfrac{9kt_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}-3v_{m-x})\right\} & (0\leq x\leq i-1)\\ \dfrac{C}{q_{m+1}}\left\{\dfrac{p_i}{f_m}f_{n-x}+\dfrac{9kt_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}-3v_{m-x})\right\} & (i\leq x\leq n)\end{cases} \qquad\cdots\cdots(26)$$

となる。これらを（1）式に入れれば次の結果が得られる。

$$\left.\begin{aligned}
M_{x-1x}&=\begin{cases}\dfrac{C}{q_{m+1}}\left\{-\dfrac{p_{n-i+1}}{f_m}d_x+\dfrac{27kt_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{x-m})\right\} & (1\leq x\leq i)\\ \quad(\because\ d_{n+1}+2p_{n-i+1}f_{i-1}-p_if_{n-i}=p_{n-i+1}d_i) & \\ \dfrac{C}{q_{m+1}}\left\{-\dfrac{(3+4k)p_i}{f_m}s_{n-x}+\dfrac{27kt_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{x-m})\right\} & (i+1\leq x\leq n)\end{cases}\\
M_{xx-1}&=\begin{cases}\dfrac{C}{q_{m+1}}\left\{\dfrac{(3+4k)p_{n-i+1}}{f_m}s_{x-1}+\dfrac{27kt_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{m-x+1})\right\} & (1\leq x\leq i-1)\\ \dfrac{C}{q_{m+1}}\left\{\dfrac{p_i}{f_m}d_{n-x+1}+\dfrac{27kt_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{m-x+1})\right\} & (i\leq x\leq n)\\ \quad(\because\ d_{n+1}+2p_if_{n-i}-p_{n-i+1}f_{i-1}=p_id_{n-i+1}) & \end{cases}\\
M_{xx'}&=\begin{cases}\dfrac{2kC}{q_{m+1}}\left\{-\dfrac{p_{n-i+1}}{f_m}f_x-\dfrac{27t_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}+kv_{m-x})\right\} & (0\leq x\leq i-1)\\ \dfrac{2kC}{q_{m+1}}\left\{\dfrac{p_i}{f_m}f_{n-x}-\dfrac{27t_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}+kv_{m-x})\right\} & (i\leq x\leq n)\end{cases}\\
M_{x'x}&=\frac{1}{2}M_{xx'}-\frac{9(3+k)t_{m-i}}{D_{m+2}}kC
\end{aligned}\right\} \qquad\cdots\cdots(27)$$

b)　$n=2m+1$ の場合

$$A_i-A_{i-1}=\frac{3s_{m-i}}{p_{m+1}}$$

$$3kA+2(n+1)=\frac{D_{m+2}}{2(3+k)p_{m+1}}$$

ただし，

$$D_{m+2}=(n+1)(12+k)p_{m+1}+18ks_m \qquad\cdots\cdots(24)'$$

$$\therefore\ \psi=-\frac{18(3+k)s_{m-i}}{D_{m+2}}C \qquad\cdots\cdots(25)'$$

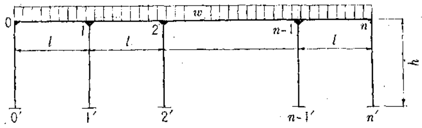
$$\varphi_x=\begin{cases}\dfrac{C}{p_{m+1}}\left\{-\dfrac{p_{n-i+1}}{g_{m+1}}f_x+\dfrac{9ks_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}-3u_{m-x})\right\} & (0\leq x\leq i-1)\\ \dfrac{C}{p_{m+1}}\left\{\dfrac{p_i}{g_{m+1}}f_{n-x}+\dfrac{9ks_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}-3u_{m-x})\right\} & (i\leq x\leq n)\end{cases} \qquad\cdots\cdots(26)'$$

ゆえに

$$\left.\begin{aligned}
M_{x-1x}&=\begin{cases}\dfrac{C}{p_{m+1}}\left\{-\dfrac{p_{n-i+1}}{g_{m+1}}d_x+\dfrac{27ks_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{x-m-1})\right\} & (1\leq x\leq i)\\ \dfrac{C}{p_{m+1}}\left\{-\dfrac{(3+4k)p_i}{g_{m+1}}s_{n-x}+\dfrac{27ks_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{x-m-1})\right\} & (i+1\leq x\leq n)\end{cases}\\
M_{xx-1}&=\begin{cases}\dfrac{C}{p_{m+1}}\left\{\dfrac{(3+4k)p_{n-i+1}}{g_{m+1}}s_{x-1}+\dfrac{27ks_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{m-x+1})\right\} & (1\leq x\leq i-1)\\ \dfrac{C}{p_{m+1}}\left\{\dfrac{p_i}{g_{m+1}}d_{n-x+1}+\dfrac{27ks_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{m-x+1})\right\} & (i\leq x\leq n)\end{cases}\\
M_{xx'}&=\begin{cases}\dfrac{2kC}{p_{m+1}}\left\{-\dfrac{p_{n-i+1}}{g_{m+1}}f_x-\dfrac{27s_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}+ku_{m-x})\right\} & (0\leq x\leq i-1)\\ \dfrac{2kC}{p_{m+1}}\left\{\dfrac{p_i}{g_{m+1}}f_{n-x}-\dfrac{27s_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}+ku_{m-x})\right\} & (i\leq x\leq n)\end{cases}\\
M_{x'x}&=\frac{1}{2}M_{xx'}-\frac{9(3+k)s_{m-i}}{D_{m+2}}kC
\end{aligned}\right\} \qquad\cdots\cdots(27)'$$

Case II：全スパンに等分布荷重wが載る場合(**図―4**)

図―4



$$C_{x-1x}=C_{xx-1}=C=\frac{1}{12}wl^2$$

また，

$$M_x=0,\quad P=0,\quad \psi_x=0$$

$$\therefore\ -K_0=K_n=C$$

$$K_x=0\ (x\neq 0,\ n)$$

ゆえに，

$$\varphi_x=(A_{xn}-A_{x0})C=\frac{C}{d_{n+1}}(f_x-f_{n-x}) \qquad\cdots\cdots(28)$$

a)　$n=2m$ の場合

$$\varphi_x=-\frac{s_{m-x-1}}{f_m}C \qquad\cdots\cdots(29)$$

（1）式に代入して

$$\left.\begin{aligned}
M_{x-1x}&=\frac{C}{f_m}(-f_m+f_{x-m-1})\\
M_{xx-1}&=\frac{C}{f_m}(f_m-f_{m-x})\\
M_{xx'}&=-\frac{2kC}{f_m}s_{m-x-1}\\
M_{x'x}&=\frac{1}{2}M_{xx'}
\end{aligned}\right\} \qquad\cdots\cdots(30)$$

b)　$n=2m+1$ の場合

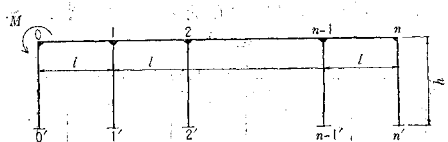
$$\varphi_x=-\frac{t_{m-x}}{g_{m+1}}C \qquad\cdots\cdots(29)'$$

ゆえに

$$\left.\begin{aligned}
M_{x-1x}&=\frac{C}{g_{m+1}}(-g_{m+1}+g_{x-m-1})\\
M_{xx-1}&=\frac{C}{g_{m+1}}(g_{m+1}-g_{m-x+1})\\
M_{xx'}&=-\frac{2kC}{g_{m+1}}t_{m-x}\\
M_{x'x}&=\frac{1}{2}M_{xx'}
\end{aligned}\right\} \qquad\cdots\cdots(30)'$$

Case III：節点0にモーメントMが働く場合（**図―5**）

図―5



$$M_0=-M,\quad M_x=0\ (x\neq 0)$$

また，

$$C_{x-1x}=C_{xx-1}=0,\ P=0,\ \psi_x=\psi\ （とおく）$$

$$\therefore\ K_0=M+k\psi,\ K_x=k\psi\ (x\neq 0)$$

ゆえに

$$\varphi_x = A_{x0}M + A_x k\,\psi \quad \cdots\cdots(31)$$

$$\Sigma\varphi_x = A_0 M + Ak\,\psi$$

従って，（5）式は

$$3(A_0M + Ak\,\psi) + 2(n+1)\psi = 0$$

$$\therefore\ \psi = -\frac{3A_0M}{3kA + 2(n+1)} \quad \cdots\cdots(32)$$

a）$n=2m$ の場合

Case I の場合と同様にして，(32) 式は

$$\psi = \frac{3(q_{m+1} - 3v_m)}{D_{m+2}}M$$

$$= -\frac{6(3+k)t_m}{D_{m+2}}M \quad \cdots\cdots(33)$$

(31) 式は

$$\varphi_x = \frac{M}{q_{m+1}}\left\{\frac{f_{n-x}}{f_m} + \frac{3kt_m}{D_{m+2}}(q_{m+1} - 3v_{m-x})\right\} \quad \cdots\cdots(34)$$

ゆえに（1）式より，

$$\left.\begin{aligned}
M_{x-1x} &= \frac{M}{q_{m+1}}\left\{-\frac{3+4k}{f_m}s_{n-x} + \frac{9kt_m}{D_{m+2}}(q_{m+1} - q_{x-m})\right\}\\
M_{xx-1} &= \frac{M}{q_{m+1}}\left\{\frac{1}{f_m}d_{n-x+1} + \frac{9kt_m}{D_{m+2}}(q_{m+1} - q_{m-x+1})\right\}\\
M_{xx'} &= \frac{2kM}{q_{m+1}}\left\{\frac{1}{f_m}f_{n-x} - \frac{9t_m}{D_{m+2}}(q_{m+1} + kv_{m-x})\right\}\\
M_{x'x} &= \frac{1}{2}M_{xx'} - \frac{3(3+k)t_m}{D_{m+2}}kM
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(35)$$

b）$n=2m+1$ の場合

$$\psi = -\frac{6(3+k)s_m}{D_{m+2}}M \quad \cdots\cdots(33)'$$

また，

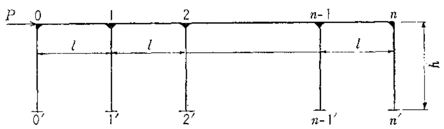
$$\varphi_x = \frac{M}{p_{m+1}}\left\{\frac{f_{n-x}}{g_{m+1}} + \frac{3ks_m}{D_{m+2}}(p_{m+1} - 3u_{m-x})\right\} \quad \cdots\cdots(34)'$$

ゆえに

$$\left.\begin{aligned}
M_{x-1x} &= \frac{M}{p_{m+1}}\left\{-\frac{3+4k}{g_{m+1}}s_{n-x} + \frac{9ks_m}{D_{m+2}}(p_{m+1} - p_{x-m-1})\right\}\\
M_{xx-1} &= \frac{M}{p_{m+1}}\left\{\frac{1}{g_{m+1}}d_{n-x+1} + \frac{9ks_m}{D_{m+2}}(p_{m+1} - p_{m-x+1})\right\}\\
M_{xx'} &= \frac{2kM}{p_{m+1}}\left\{\frac{1}{g_{m+1}}f_{n-x} - \frac{9s_m}{D_{m+2}}(p_{m+1} + ku_{m-x})\right\}\\
M_{x'x} &= \frac{1}{2}M_{xx'} - \frac{3(3+k)s_m}{D_{m+2}}kM
\end{aligned}\right\} \cdots(35)'$$

Case IV：水平力 P をうける場合（図—6）

図—6



$$C_{x-1x} = C_{xx-1} = 0,\ M_x = 0,\ \psi_x = \psi\ \text{（とおく）}$$

$$\therefore\ K_x = k\psi$$

ゆえに

$$\varphi_x = A_x k\,\psi \quad \cdots\cdots(36)$$

$$\Sigma\varphi_x = Ak\,\psi$$

従って，（5）式は

$$k\{3Ak + 2(n+1)\}\psi = -Ph$$

$$\therefore\ \psi = -\frac{Ph}{k\{3kA + 2(n+1)\}} \quad \cdots\cdots(37)$$

a）$n=2m$ の場合

$$\psi = -\frac{2(3+k)q_{m+1}}{kD_{m+2}}Ph \quad \cdots\cdots(38)$$

$$\therefore\ \varphi_x = \frac{q_{m+1} - 3v_{m-x}}{D_{m+2}}Ph \quad \cdots\cdots(39)$$

（1）式に代入して，

$$\left.\begin{aligned}
M_{x-1x} &= \frac{3Ph}{D_{m+2}}(q_{m+1} - q_{x-m})\\
M_{xx-1} &= \frac{3Ph}{D_{m+2}}(q_{m+1} - q_{m-x+1})\\
M_{xx'} &= \frac{6Ph}{D_{m+2}}(q_{m+1} + kv_{m-x})\\
M_{x'x} &= \frac{1}{2}M_{xx'} - \frac{(3+k)q_{m+1}}{D_{m+2}}Ph
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(40)$$

b）$n=2m+1$ の場合

$$\psi = -\frac{2(3+k)p_{m+1}}{kD_{m+2}}Ph \quad \cdots\cdots(38)'$$

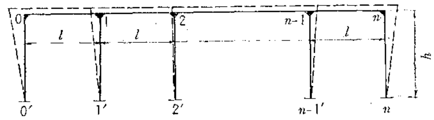
$$\varphi_x = \frac{p_{m+1} - 3u_{m-x}}{D_{m+2}}Ph \quad \cdots\cdots(39)'$$

ゆえに

$$\left.\begin{aligned}
M_{x-1x} &= \frac{3Ph}{D_{m+2}}(p_{m+1} - p_{x-m-1})\\
M_{xx-1} &= \frac{3Ph}{D_{m+2}}(p_{m+1} - p_{m-x+1})\\
M_{xx'} &= -\frac{6Ph}{D_{m+2}}(p_{m+1} + ku_{m-x})\\
M_{x'x} &= \frac{1}{2}M_{xx'} - \frac{(3+k)p_{m+1}}{D_{m+2}}Ph
\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(40)'$$

Case V：温度変化 t をうける場合（図—7）

図—7



温度変化を t，膨張率を α とすれば

$$\Delta\psi_x = -\frac{6EI}{l}\cdot\frac{\alpha tl}{h} = -\frac{6EI\alpha t}{h} = \psi\ \text{（とおく）}$$

$$\psi_n = -\psi_0$$

従って，

$$\psi_x = -\left(\frac{n}{2} - x\right)\psi \quad \cdots\cdots(41)$$

また，

$$C_{x-1x} = C_{xx-1} = 0,\ M_x = 0,\ P = 0$$

$$\therefore\ K_x = k\,\psi_x = -\left(\frac{n}{2} - x\right)k\,\psi$$

ゆえに

$$\varphi_x = -\sum_y A_{xy}\left(\frac{n}{2} - y\right)k\,\psi$$

$$= -\left(\frac{n}{2}A_x - \int_0^{n+1} yA_{xy}\,\Delta y\right)k\,\psi$$

しかるに，

$$\int_0^{n+1} yA_{xy}\,\Delta y = \frac{1}{d_{n+1}}\left\{f_{n-x}\int_0^x yf_y\,\Delta y + f_x\int_0^{n-x+1}(n-y)f_y\,\Delta y\right\}$$

$$= -\frac{1}{2(3+k)d_{n+1}}\left\{xd_{n+1} + (f_{n-x} - f_x) - 3nf_x\right\}$$

$$\therefore\ \varphi_x = \frac{k\,\psi}{2(3+k)d_{n+1}}\left\{\left(\frac{n}{2} - x\right)d_{n+1} - \frac{3n+2}{2}(f_{n-x} - f_x)\right\} \quad \cdots\cdots(42)$$

a) $n=2m$ の場合

$$\varphi_x=\frac{k\psi}{2(3+k)f_m}\left\{\left(\frac{n}{2}-x\right)f_m-\frac{3n+2}{2}s_{m-x-1}\right\}\quad\cdots(43)$$

ゆえに (1) 式より

$$\left.\begin{aligned}
M_{x-1x}&=\frac{k\psi}{2(3+k)f_m}\left[\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)+2\right\}f_m+\frac{3n+2}{2}f_{x-m-1}\right]\\
M_{xx-1}&=\frac{k\psi}{2(3+k)f_m}\left[\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)+1\right\}f_m-\frac{3n+2}{2}f_{m-x}\right]\\
M_{xx'}&=-\frac{k\psi}{(3+k)f_m}\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)f_m+\frac{3n+2}{2}ks_{m-x-1}\right\}\\
M_{x'x}&=\frac{1}{2}\left\{M_{xx'}-\left(\frac{n}{2}-x\right)k\psi\right\}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(44)$$

b) $n=2m+1$ の場合

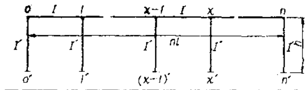
$$\varphi_x=\frac{k\psi}{2(3+k)g_{m+1}}\left\{\left(\frac{n}{2}-x\right)g_{m+1}-\frac{3n+2}{2}t_{m-x}\right\}\cdots\cdots(43)'$$

ゆえに

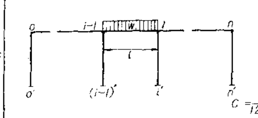
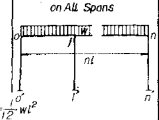
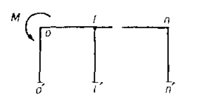
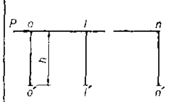
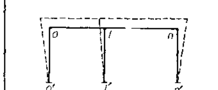
$$\left.\begin{aligned}
M_{x-1x}&=\frac{k\psi}{2(3+k)g_{m+1}}\left[\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)+2\right\}g_{m+1}+\frac{3n+2}{2}g_{x-m-1}\right]\\
M_{xx-1}&=\frac{k\psi}{2(3+k)g_{m+1}}\left[\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)+1\right\}g_{m+1}-\frac{3n+2}{2}g_{m-x+1}\right]\\
M_{xx'}&=-\frac{k\psi}{(3+k)g_{m+1}}\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)g_{m+1}+\frac{3n+2}{2}kt_{m-x}\right\}\\
M_{x'x}&=\frac{1}{2}\left\{M_{xx'}-\left(\frac{n}{2}-x\right)k\psi\right\}
\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(44)'$$

以上で所要の公式の誘導を終った。得られた公式を一括して表示すれば **表—2** のとおりである。なお，**Case I** および **Case III** において，柱材の傾斜 ψ の影響は一般に小さいのでこれに相当する公式の第2項を省略すれば公式はさらに簡単にすることができる。

表—2 General Formulae on the 1-Storey Continuous Rigid Frames



$k=\frac{I'l}{Ih}$

		I Uniform Loading on the i-th Span	II Uniform Loading on All Spans	III Moment Applied at the End Joint	IV Horizontal Force Applied	V Change of Temperature
Load Conditions			 $C=\frac{1}{12}wl^2$			 $\psi=-\frac{6EI\alpha t}{h}$
$n=2m$, $D_{m+2}=(n+1)(12+k)q_{m+1}+18kt_m$	M_{x-1x}	$\frac{C}{q_{m+1}}\left\{-\frac{p_{n-i+1}}{f_m}d_x+\frac{27k\,t_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{x-m})\right\}$ $(1\leq x\leq i)$ $\frac{C}{q_{m+1}}\left\{-\frac{(3+4k)p_i}{f_m}S_{n-x}+\frac{27k\,t_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{x-m})\right\}$ $(i+1\leq x\leq n)$	$\frac{C}{f_m}\left(-f_m+f_{x-m-1}\right)$	$\frac{M}{q_{m+1}}\left\{-\frac{3+4k}{f_m}S_{n-x}+\frac{9k\,t_m}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{x-m})\right\}$	$\frac{3Ph}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{x-m})$	$\frac{k\psi}{2(3+k)f_m}\left[\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)+2\right\}f_m+\frac{3n+2}{2}f_{x-m-1}\right]$
	M_{xx-1}	$\frac{C}{q_{m+1}}\left\{\frac{(3+4k)p_{n-i+1}}{f_m}S_{x-1}+\frac{27k\,t_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{m-x+1})\right\}$ $(1\leq x\leq i-1)$ $\frac{C}{q_{m+1}}\left\{\frac{p_i}{f_m}d_{n-x+1}+\frac{27k\,t_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{m-x+1})\right\}$ $(i\leq x\leq n)$	$\frac{C}{f_m}\left(f_m-f_{m-x}\right)$	$\frac{M}{q_{m+1}}\left\{\frac{1}{f_m}d_{n-x+1}+\frac{9k\,t_m}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{m-x+1})\right\}$	$\frac{3Ph}{D_{m+2}}(q_{m+1}-q_{m-x+1})$	$\frac{k\psi}{2(3+k)f_m}\left[\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)+1\right\}f_m-\frac{3n+2}{2}f_{m-x}\right]$
	$M_{xx'}$	$\frac{2kC}{q_{m+1}}\left\{-\frac{p_{n-i+1}}{f_m}f_x-\frac{27t_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}+kv_{m-x})\right\}$ $(0\leq x\leq i-1)$ $\frac{2kC}{q_{m+1}}\left\{\frac{p_i}{f_m}f_{n-x}-\frac{27t_{m-i}}{D_{m+2}}(q_{m+1}+kv_{m-x})\right\}$ $(i\leq x\leq n)$	$-\frac{2kC}{f_m}S_{m-x-1}$	$\frac{2kM}{q_{m+1}}\left\{\frac{1}{f_m}f_{n-x}-\frac{9t_m}{D_{m+2}}(q_{m+1}+kv_{m-x})\right\}$	$-\frac{6Ph}{D_{m+2}}(q_{m+1}+kv_{m-x})$	$-\frac{k\psi}{(3+k)f_m}\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)f_m+\frac{3n+2}{2}kS_{m-x-1}\right\}$
	$M_{x'x}$	$\frac{1}{2}M_{xx'}-\frac{9(3+k)t_{m-i}}{D_{m+2}}kC$	$\frac{1}{2}M_{xx'}$	$\frac{1}{2}M_{xx'}-\frac{3(3+k)t_m}{D_{m+2}}kM$	$\frac{1}{2}M_{xx'}-\frac{(3+k)q_{m+1}}{D_{m+2}}Ph$	$\frac{1}{2}\left\{M_{xx'}-\left(\frac{n}{2}-x\right)k\psi\right\}$
$n=2m+1$, $D_{m+2}=(n+1)(12+k)p_{m+1}+18kS_m$	M_{x-1x}	$\frac{C}{p_{m+1}}\left\{-\frac{p_{n-i+1}}{g_{m+1}}d_x+\frac{27kS_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{x-m-1})\right\}$ $(1\leq x\leq i)$ $\frac{C}{p_{m+1}}\left\{-\frac{(3+4k)p_i}{g_{m+1}}S_{n-x}+\frac{27kS_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{x-m-1})\right\}$ $(i+1\leq x\leq n)$	$\frac{C}{g_{m+1}}\left(-g_{m+1}+g_{x-m-1}\right)$	$\frac{M}{p_{m+1}}\left\{-\frac{3+4k}{g_{m+1}}S_{n-x}+\frac{9kS_m}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{m-x-1})\right\}$	$\frac{3Ph}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{x-m-1})$	$\frac{k\psi}{2(3+k)g_{m+1}}\left[\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)+2\right\}g_{m+1}+\frac{3n+2}{2}g_{x-m-1}\right]$
	M_{xx-1}	$\frac{C}{p_{m+1}}\left\{\frac{(3+4k)p_{n-i+1}}{g_{m+1}}S_{x-1}+\frac{27kS_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{m-x+1})\right\}$ $(1\leq x\leq i-1)$ $\frac{C}{p_{m+1}}\left\{\frac{p_i}{g_{m+1}}d_{n-x+1}+\frac{27kS_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{m-x+1})\right\}$ $(i\leq x\leq n)$	$\frac{C}{g_{m+1}}\left(g_{m+1}-g_{m-x+1}\right)$	$\frac{M}{p_{m+1}}\left\{\frac{1}{g_{m+1}}d_{n-x+1}-\frac{9kS_m}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{m-x+1})\right\}$	$\frac{3Ph}{D_{m+2}}(p_{m+1}-p_{m-x+1})$	$\frac{k\psi}{2(3+k)g_{m+1}}\left[\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)+1\right\}g_{m+1}-\frac{3n+2}{2}g_{m-x+1}\right]$
	$M_{xx'}$	$\frac{2kC}{p_{m+1}}\left\{-\frac{p_{n-i+1}}{g_{m+1}}f_x-\frac{27S_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}+ku_{m-x})\right\}$ $(0\leq x\leq i-1)$ $\frac{2kC}{p_{m+1}}\left\{\frac{p_i}{g_{m+1}}f_{n-x}-\frac{27S_{m-i}}{D_{m+2}}(p_{m+1}+ku_{m-x})\right\}$ $(i\leq x\leq n)$	$-\frac{2kC}{g_{m+1}}t_{m-x}$	$\frac{2kM}{p_{m+1}}\left\{\frac{1}{g_{m+1}}f_{n-x}-\frac{9S_m}{D_{m+2}}(p_{m+1}+ku_{m-x})\right\}$	$-\frac{6Ph}{D_{m+2}}(p_{m+1}+ku_{m-x})$	$-\frac{k\psi}{(3+k)g_{m+1}}\left\{3\left(\frac{n}{2}-x\right)g_{m+1}+\frac{3n+2}{2}kt_{m-x}\right\}$
	$M_{x'x}$	$\frac{1}{2}M_{xx'}-\frac{9(3+k)S_{m-i}}{D_{m+2}}kC$	$\frac{1}{2}M_{xx'}$	$\frac{1}{2}M_{xx'}-\frac{3(3+k)S_m}{D_{m+2}}kM$	$\frac{1}{2}M_{xx'}-\frac{(3+k)p_{m+1}}{D_{m+2}}Ph$	$\frac{1}{2}\left\{M_{xx'}-\left(\frac{n}{2}-x\right)k\psi\right\}$

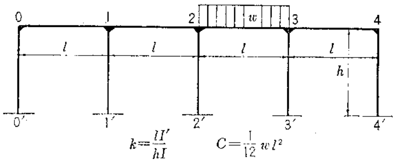
3. 例　　題

公式の用法を例題によって説明する。

〔例題 1〕

4スパン ラーメンにおいて第 3 スパンに等分布荷重 w が載る場合 (図—8)

図—8



Case I a) の公式 (27) において, $n=4$, $m=2$, $i=3$ とすればよい。

$$M_{01}=\frac{C}{q_3}\left\{-\frac{p_2}{f_2}d_1+\frac{27\,kt_{-1}}{D_4}(q_3-q_{-1})\right\}$$
$$M_{12}=\ 〃\ \{-\ 〃\ d_2+\ 〃\ (q_3-q_0)\}$$
$$M_{23}=\ 〃\ \{-\ 〃\ d_3+\ 〃\ (q_3-q_1)\}$$
$$M_{34}=\ 〃\ \left\{-\frac{(3+4\,k)p_3}{f_2}s_0+\frac{27\,kt_{-1}}{D_4}(q_3-q_2)\right\}$$
$$M_{10}=\ 〃\ \left\{\frac{(3+4\,k)\,p_2}{f_2}s_0+\frac{27\,kt_{-1}}{D_4}(q_3-q_2)\right\}$$
$$M_{21}=\ 〃\ \{\ \ 〃\ \ s_1+\ 〃\ (q_3-q_1)\}$$
$$M_{32}=\ 〃\ \left\{\frac{p_3}{f_2}d_2+\frac{27\,kt_{-1}}{D_4}(q_3-q_0)\right\}$$
$$M_{43}=\ 〃\ \{\ 〃\ d_1+\ 〃\ (q_3-q_{-1})\}$$
$$M_{00'}=\frac{2\,kC}{q_3}\left\{-\frac{p_2}{f_2}f_0-\frac{27\,kt_{-1}}{D_4}(q_3+kv_2)\right\}$$
$$M_{11'}=\ 〃\ \{-\ 〃\ f_1-\ 〃\ (q_3+kv_1)\}$$
$$M_{22'}=\ 〃\ \{-\ 〃\ f_2-\ 〃\ (q_3+kv_0)\}$$
$$M_{33'}=\ 〃\ \left\{\frac{p_3}{f_2}f_1-\frac{27\,kt_{-1}}{D_4}(q_3+kv_{-1})\right\}$$
$$M_{44'}=\ 〃\ \{\ 〃\ f_0-\ 〃\ (q_3+kv_{-2})\}$$
$$M_{x'x}=\frac{1}{2}M_{xx'}-\frac{9(3+k)t_{-1}}{D_4}k\,C$$

ここに, 右辺の諸関数は **表—1** から

$p_2=9+14\,k+4\,k^2$
$p_3=-(33+72\,k+44\,k^2+8\,k^3)$
$d_1=-2\,k$
$d_2=3+8\,k+4\,k^2$
$d_3=-(12+36\,k+32\,k^2+8\,k^3)$
$s_0=1$
$s_1=-(4+2\,k)$
$f_0=1$
$f_1=-(2+2\,k)$
$f_2=7+12\,k+4\,k^2$
$t_{-1}=-1$
$q_{-1}=24+30\,k+8\,k^2$
$q_0=-6-4\,k$
$q_1=-2\,k$
$q_2=6+12\,k+4\,k^2$
$q_3=-(24+58\,k+40\,k^2+8\,k^3)$
$v_{-2}=v_2=14+16\,k+4\,k^2$
$v_{-1}=v_1=-(4+2\,k)$
$v_0=2$

また, (24) 式により

$$D_4=5(12+k)q_3+18\,kt_2$$
$$=-(1\,440+3\,402\,k+2\,438\,k^2+608\,k^3+40\,k^4)$$

である。与えられた k の値に対して まずこれらの諸関数を計算し, 得られた数値を最初の式に入れれば所要のモーメント値が求められる。

(注意)

分母 D_{m+2} およびこれに対する分子はいずれも$(3+k)$なる因数をもつから, 個々の場合の公式としては, これを約しておいた方がよい。例えば, 上の例題で

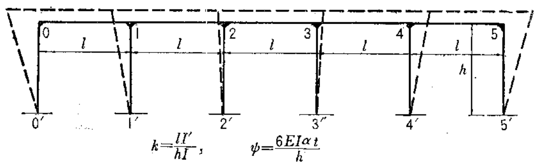
$$D_4=-2(3+k)(240+487\,k+244\,k^2+20\,k^3)$$
$$q_3-q_{-1}=-8(3+k)(2+3\,k+k^2)$$
$$\therefore\ M_{01}=\frac{C}{q_3}\left\{\frac{p_2}{f_2}2\,k-\frac{27\,k}{240+487\,k+244\,k^2+20\,k^3}\right.$$
$4\,(2+3\,k+k^2)$ などとなる。

〔例題 2〕

5 スパン ラーメンが温度変化 t をうける場合(図—9)

Case V b) の公式 (44)′ 式において, $n=5$, $m=2$ とすればよい。

図—9



$$M_{01}=-M_{54}=\frac{k\,\psi}{2(3+k)g_3}(\ \ 6.5\,g_3+8.5\,g_{-2})$$
$$M_{12}=-M_{43}=\quad 〃\quad(\ \ 3.5\,g_3+8.5\,g_{-1})$$
$$M_{23}=-M_{32}=\quad 〃\quad(\ \ 0.5\,g_3+8.5\,g_0)$$
$$M_{34}=-M_{21}=\quad 〃\quad(-2.5\,g_3+8.5\,g_1)$$
$$M_{45}=-M_{10}=\quad 〃\quad(-5.5\,g_3+8.5\,g_2)$$
$$M_{00'}=-M_{55'}=-\frac{k\,\psi}{(3+k)g_3}(7.5\,g_3+8.5\,kt_2)$$
$$M_{11'}=-M_{44'}=-\quad 〃\quad(4.5\,g_3+8.5\,kt_1)$$
$$M_{22'}=-M_{33'}=-\quad 〃\quad(1.5\,g_3+8.5\,kt_0)$$
$$M_{x'x}=\frac{1}{2}\{M_{xx'}-(2.5-x)k\,\psi\}$$

ここに, 右辺の諸関数は

$g_{-2}=-19-26\,k-8\,k^2$
$g_{-1}=5+4\,k$
$g_0=-1$
$g_1=-(1+2\,k)$
$g_2=5+10\,k+4\,k^2$
$g_3=-(19+48\,k+36k^2+8\,k^3)$
$t_0=1$
$t_1=-(3+2\,k)$
$t_2=11+14\,k+4\,k^2$

である。

参考文献

1) 福田武雄：構造力学 (河出, 1942)
2) 〃 ：差 分 法 (河出, 1948)

(原稿受付：1961.7.17)

GENERAL FORMULAE ON THE 1-STOREY CONTINUOUS RIGID FRAMES

By Masao Satake, C.E. Member

The 1-storey continuous rigid frames, which we have to treat in designing overhead way structures are usually very simple and regular. So, by treating the problem in a full generality, we will be able to obtain general formulae for these kinds of frames, applicable to many cases; such formulae seem to be especially useful for us in determining the factors of frames which are best fitted to the given case. In this paper, we shall give such formulae concerning the 1-storey n-span rigid frames, as shown in Fig. 1, in which the spans l, the hights h and the moduli of stiffness k are constant. The formulae given in Table 2 are rather complicated, but still useful for practical applications.

We shall start from the following equations of the slope-deflection method:

$$\left.\begin{aligned} M_{x-1x}&=2\varphi_{x-1}+\varphi_x-C_{x-1x}, \\ M_{xx-1}&=\varphi_{x-1}+2\varphi_x+C_{xx-1}, \\ M_{xx'}&=k(2\varphi_x+\psi_x), \\ M_{x'x}&=k(\varphi_x+{}_x\psi) \\ &=\frac{1}{2}(M_{xx'}+k\psi_x), \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$M_{xx-1}+M_{xx+1}+M_{xx'}=M_x,$$
$$\text{(the joint-equations)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\Sigma(M_{xx'}+M_{x'x})=-\mathrm{Ph},$$
$$\text{(the storey-equation)}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

where C_{x-1x} and C_{xx-1} are the load-terms caused by loading on the x-th span M_x is an external moment acting at the joint x and P is a horizontal force acting on the storey.

Substituting (1) into (2) and (3), we have

$$\left.\begin{aligned} 2(1+k)\varphi_0+\varphi_1 &=-K_0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{x-1}+2(2+k)\varphi_x+\varphi_{x+1}&=-K_x \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_{n-1}+2(1+k)\varphi_n &=-K_n \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

and

$$k(3\,\Sigma\,\varphi_x+2\,\Sigma\,\psi_x)=-Ph, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

where

$$K_x=C_{xx-1}-C_{xx+1}-M_x+k\,\psi_x \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

The solutions of the linear equations (4) with respect to φ_x can be written in the linear form

$$\varphi_x=\sum_y A_{xy}K_y, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

where the coefficients A_{xy} are independent of K_y. To determine these coefficients A_{xy} we employ here theory of difference equations, which seems to be the most suitable method for this purpose.

The characteristic equation of the homogeneous difference equation of the 2nd order

$$\varphi_{x-1}+2(2+k)\varphi_x+\varphi_{x+1}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

is

$$\beta^2+2(2+k)\beta+1=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

Using a root of (9)

$$\beta=-(2+k)+\sqrt{(1+k)(3+k)}, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

we have

$$\left.\begin{aligned} y\leq x,\quad A_{xy}&=\frac{(a\,\beta^{n-x}-b\,\beta^{-n+x})(a\,\beta^y-b\,\beta^{-y})}{(\beta-\beta^{-1})(a^2\,\beta^n-b^2\,\beta^{-n})} \\ y\geq x,\quad A_{xy}&=\frac{(a\,\beta^x-b\,\beta^{-x})(a\,\beta^{n-y}-b\,\beta^{-n+y})}{(\beta-\beta^{-1})(a^2\,\beta^n-b^2\,\beta^{-n})} \end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

where

$$\left.\begin{aligned} a&=\beta+2 \\ b&=\beta^{-1}+2 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

Since β is an irrational function of k and so not easy to deal with, we now introduce the following 9 rational functions. (The situation is quite similar to the case where we use the real functions "$\sin x$" etc. in place of the complex function e^{ix}).

$$\left.\begin{aligned} s_x&=\frac{\beta^{x+1}-\beta^{-x-1}}{\beta-\beta^{-1}} & f_x&=\frac{a\,\beta^x-b\,\beta^{-x}}{\beta-\beta^{-1}} \\ t_x&=\frac{\beta^{x+1}-\beta^{-x}}{\beta-1} & g_x&=\frac{a\,\beta^x-b\,\beta^{-x+1}}{\beta-1} \\ u_x&=\frac{\beta^{x+1}+\beta^{-x}}{\beta+1} & p_x&=\frac{a\,\beta^x+b\,\beta^{-x+1}}{\beta+1} \\ v_x&=\beta^x+\beta^{-x} & q_x&=a\,\beta^{x-1}+b\,\beta^{-x+1} \\ & & d_x&=\frac{a^2\,\beta^{x-1}-b^2\,\beta^{-x+1}}{\beta-\beta^{-1}} \end{aligned}\right\}(13)$$

These are all polynomials in terms of k of degree x, satisfying the difference equation (8) and also many other mutual relations as furnished in (i) $\sim$ (vii). Table 1 shows the coefficients of these functions for $x=-4\sim5$; for example

$$-f_1=2+2\,k \qquad (\therefore\ f_1=-2-2\,k)$$
$$f_2=7+12\,k+4\,k^2$$

etc.

In terms of (13), (11) can be written in the form

$$\left.\begin{array}{ll} y \leq x, & A_{xy}=\dfrac{f_{n-x}f_y}{d_{n+1}} \\ y \geq x, & A_{xy}=\dfrac{f_x f_{x-y}}{d_{n+1}} \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Hence the matrix of the coefficients in (7) is of symmetric form as follows:

$$(A_{xy})=\frac{1}{d_{n+1}} \begin{array}{r} \\ i+1) \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} f_0 f_n \cdots\cdots f_0 \overset{i+1}{\overbrace{f_{n-i}}} \cdots\cdots f_0\, f_0 \\ f_0 f_{n-i} \cdots\cdots f_i f_{n-i} \cdots\cdots f_i\, f_0 \\ f_0 f_0 \cdots\cdots f_i f_0 \cdots\cdots f_n f_0 \end{pmatrix} \qquad (15)$$

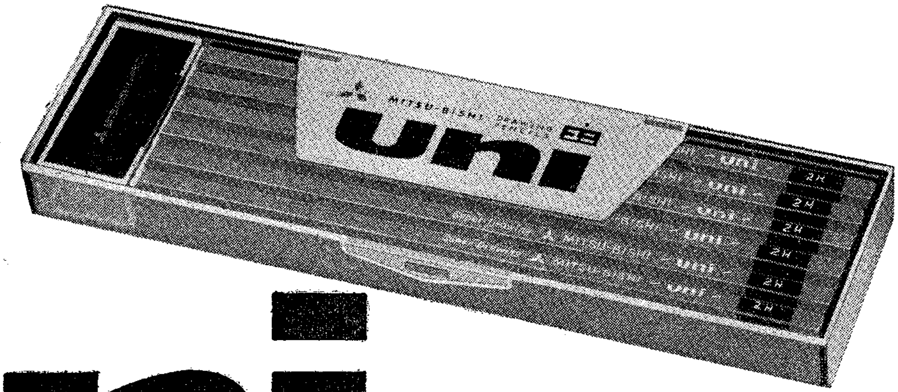
By making use of the functions in (13) and dividing the cases under the 5 typical load conditions, culculations lead us to the solution of (4) and (5), which determines all the moments in (1) required in our problems. The general formulae thus obtained are represented in Table 2. In the cases I and III, the effects of the inclination ψ of the column-members are usually small, so that the neglection of the corresponding terms will simplify the formulae a little more.

昭和 37 年 3 月 15 日印刷
昭和 37 年 3 月 20 日発行

土木学会論文集 第 79 号　定価 250 円 (〒 30 円)

編集兼発行者　東京都新宿区四谷一丁目　社団法人　土木学会　末森猛雄
印刷者　東京都港区赤坂溜池 5　株式会社　技報堂　大沼正吉

発行所　社団法人　土木学会　振替東京 16828 番
東京都新宿郵便局区内　新宿区四谷一丁目　電話 (351) 代表 5138 番



uni

ユニは三菱鉛筆の総力を挙げて完成した最高級の製図用鉛筆です。
ユニとはＯＮＥの意味の英語で——現代に存在する唯一つのもの——として敢えて名付けた次第です。

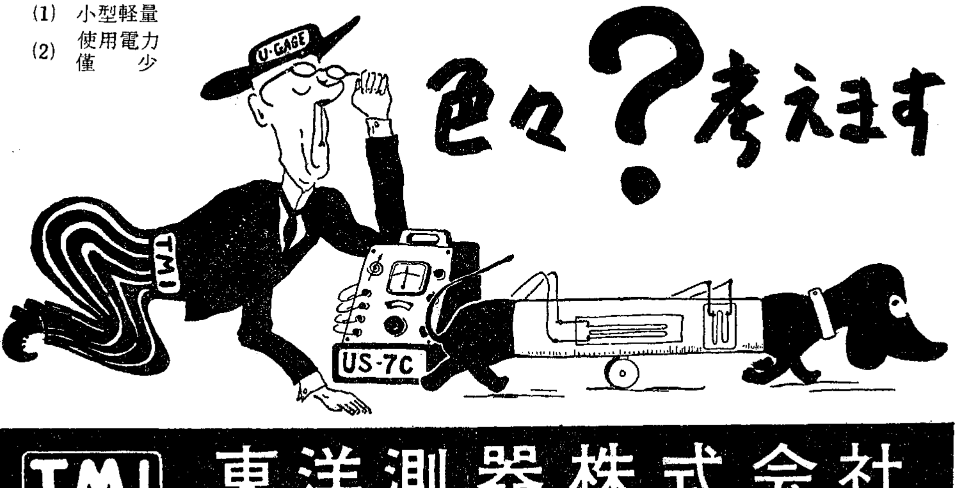
ユニの１ダース函は筆函としてのアフターユースをも考えたプラスチックと金属の美しいデザインのものです。
この函の中には、新らしい考案のグラインダーが１個ずつ入っています。

硬度4H.3H.2H.H.F.HB.B.2B.3B.4B.　1ダース ¥600

三菱鉛筆

新製品 **TOYO HOPE**
MODEL MS−7T
MODEL MD−3E・6E
MODEL MD−6E POPULAR

（トランジスター型，超小型，静歪，動歪，測定器）
(1) 小型軽量
(2) 使用電力僅少



抵抗線歪計及応用

TMI 東洋測器株式会社

本社工場	東京都大田区調布嶺町1の104	TEL 東京 (751) 5145 (代)
大森工場	東京都大田区新井宿6の469	TEL 東京 (771) 1156 (代)
大阪営業所	大阪市北区老松町3の23	TEL 大阪 (361) 4744
名古屋事務所	名古屋市中村区志摩町6の8	TEL 名古屋 (54) 9414
神戸事務所	神戸市灘区上野通8丁目1の1	TEL 神戸 (86) 4610