

斜交異方性板の解析に関する研究

成岡昌夫* 福知脩***
山本知弘** 岡田靖夫****

要旨 さきに李国豪氏の発表した斜交異方性板のたわみ曲面の微分方程式の階差法による表示を求め、これを用いて、横桁が主桁に斜交する斜交格子斜桁橋のアクリライト模型について行なった実験値を、計算値と比較したものである。

1. はしがき

板理論の桁橋構造への応用に関する研究には、めざましいものがある。直交異方性矩形板理論の直桁橋構造への適用は、Y. Guyon¹⁾ と Ch. Massonnet²⁾ により理論的に完成され、P.B. Morice と G. Little³⁾ によって、実験的に確かめられ、現在では、構造の解析的研究のみならず、桁橋の設計にも用いられるに至っている。一方、荷重分配用横桁が主桁に直交する直交格子斜桁橋への、直交異方性平行四辺形板理論の適用については、成岡、大村⁴⁾⁵⁾ によって研究され、多くの模型実験によって確かめられ、純信橋（合成直格子斜桁橋、斜角 30°）の設計に用いられた⁶⁾。

以上のように、荷重分配用横桁が主桁に直交する直交格子直（斜）桁橋については、直交異方性の矩形板（平行四辺形板）理論の適用が行なわれている。これに反して、荷重分配用横桁が主桁に直角でない（すなわち、橋台に平行である）斜交の格子桁については、このような場合が実際にありうるにもかかわらず、研究されていないようである。斜交格子桁は、直交格子桁が直交異方性板とみなしうる観点からすれば、斜交異方性板とみなしうる。このような斜交異方性の平行四辺形板の研究は、筆者の知る限りでは、李国豪氏⁷⁾ の論文のみである。おそらく、直交異方性板でも、平行四辺形板となると、解析が困難となるが、斜交異方性板で、かつ、平行四辺形板となると、解析の困難が倍増するからである。従って、李国豪氏も基礎微分方程式を示したのみで、実際の解析法は示していない。筆者らは、斜交斜格子桁の解析を、板理論によって行なうために、李国豪氏の提案した斜交異方性板の基礎微分方程式を、階差法によって表示することを試みた。一方、斜交斜格子桁の模型実験値を、上記の方法による計算値と比較して、斜交異方性板理論の斜交斜格子桁への適用性を検討しようとした。

2. 斜交異方性板のたわみ曲面の基礎微分方程式、断面力、その他（図-1,2）

斜交した x, y 軸方向に弾性主軸をもつ、等厚（従って、中立面は、上下より等しい距離 $h/2$ のところにある）の薄い平板を取り扱うものとする。李国豪氏は、1) 板の変形、2) 板の応力と変形との関係、3) 板の曲げの方程式と境界条件にわけて、論じているが、ここでは彼の論文中より、必要なもののみを掲げる。

(1) たわみ曲面の微分方程式

たわみ曲面の基礎微分方程式は、次のようである。

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{13} + D_{31}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + (D_{12} + D_{21} + 4D_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(D_{23} + D_{32}) \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = ps^4, \quad s = \sin \theta \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 D_{ik} は次のように定義される。

図-1 斜交格子桁橋を斜交異方性平行四辺形板とみなした場合の座標軸のとり方

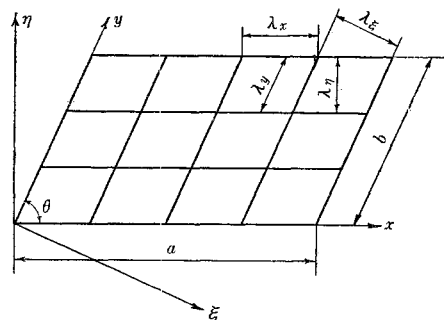
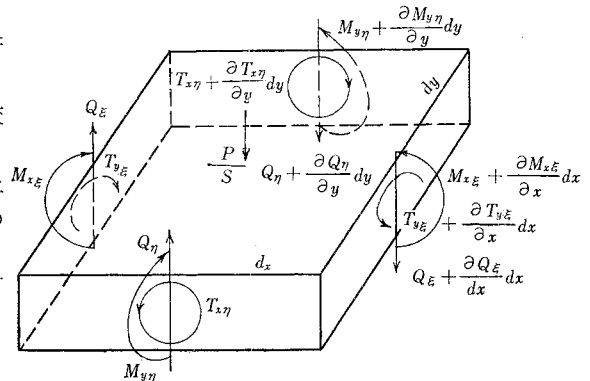


図-2 断面力と作用する荷重



* 正員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科
** 正員 工修 松尾橋梁KK設計部
*** 正員 工修 日本鋼管KK
**** 正員 運輸省第二港湾建設局横浜調査設計事務所

$i \backslash k$	1	2	3
1	$B_1 \beta_1$	$B_1(s^2 \nu_2 + c^2 \gamma_1)$	$-cB_1 \gamma_1$
2	$B_2(s^2 \nu_1 + c^2 \gamma_2)$	$B_2 \beta_2$	$-cB_2 \gamma_2$
3	$-\frac{c}{2}(2K_{xy} + B_1 \beta_1 + B_2 \beta_2 \nu_1)$	$-\frac{c}{2}(2K_{xy} + B_2 \beta_2 + B_1 \beta_2 \nu_2)$	$K_{xy} + (c^2/4)\{B_1(\gamma_1 + \gamma_2 \nu_2) + B_2(\gamma_2 + \gamma_1 \nu_1)\}$

(備考 $s = \sin \theta, c = \cos \theta$)

上式に含まれる各種の記号は次のように定義される。

$B_x = E_x h^3 / 12, B_y = E_y h^3 / 12, K_{xy} = G_{xy} h^3 / 12,$

$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xx} z dz, M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{yy} z dz, M_{\eta x} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\eta x} z dz, M_{\xi y} = - \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{\xi y} z dz$ は、次のように表わされる。

	$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	$-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$	$-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$	
$M_{xx} =$	$\frac{1}{s^2}$	$B_1(s^2 + c^2 \gamma_2 \nu_2)$	$B_1 \beta_2 \nu_2$	$-cB_1 \gamma_2 \nu_2$(2) ₁
$M_{yy} =$	$\frac{1}{s^2}$	$B_2 \beta_1 \nu_1$	$B_2(s^2 + c^2 \gamma_1 \nu_1)$	$-cB_2 \gamma_1 \nu_1$(2) ₂
$M_{\eta x} - M_{\xi y} =$	$\frac{1}{s^2}$	$-2csK_{xy}$	$-2csK_{xy}$	$2sK_{xy}$

(3) 曲げモーメント,ねじりモーメント(その2)

y, x 軸に平行な断面に作用する断面力は次のようになる。

$M_{x\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x\xi} z dz = -\frac{1}{s^4} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$ (2)₃

$M_{y\eta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{y\eta} z dz = -\frac{1}{s^4} \left(D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$ (2)₄

$T_{y\xi} = -T_{x\eta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\eta} z dz = -\frac{1}{s^4} \left(D_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$ (3)

(4) せん断力,反力

$Q_y = \frac{\partial M_{y\eta}}{\partial y} + \frac{\partial T_{y\xi}}{\partial x} = -\frac{1}{s^4} \left\{ D_{31} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{21} + 2D_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{32} + 2D_{23}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right\}$ (4)₁

$Q_x = \frac{\partial M_{x\xi}}{\partial x} - \frac{\partial T_{x\eta}}{\partial y} = -\frac{1}{s^4} \left\{ D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{31} + 2D_{13}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{32} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right\}$ (4)₂

$V_\eta = Q_y - \frac{\partial T_{x\eta}}{\partial x} = -\frac{1}{s^4} \left\{ 2D_{31} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{21} + 4D_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2(D_{32} + D_{23}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right\}$ (5)₁

$V_\xi = Q_x + \frac{\partial T_{y\xi}}{\partial y} = -\frac{1}{s^4} \left\{ D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2(D_{31} + D_{13}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 4D_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 2D_{32} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right\}$ (5)₂

(5) 境界条件

a) $x=0$ および $x=a$ の辺で単純支持の場合 これらの辺にそうて, $w=0$ であり,かつ, $M_{x\xi}=0$ でなければならない。なお, $\partial^2 w / \partial y^2 = 0$ であるから,境界条件式は,

$w=0$ (6)₁

$D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2D_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$ (6)₂

b) $y=0$ および $y=b$ の二辺で自由の場合 これらの辺にそうて, $M_{y\eta}=0, V_\eta=0$ であるから

$D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0$ (7)₁

$2D_{31} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{21} + 4D_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2(D_{23} + D_{32}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0$ (7)₂

$B_\xi = E_\xi h^3 / 12, B_\eta = E_\eta h^3 / 12$

$\nu_1 = \frac{B_x}{B_\xi} \nu_\xi, \nu_2 = \frac{B_y}{B_\eta} \nu_\eta,$

$\gamma_1 = 2 \left(\frac{K_{xy}}{B_x} + \nu_2 \frac{K_{xy}}{B_y} \right), \gamma_2 = 2 \left(\frac{K_{xy}}{B_y} + \nu_1 \frac{K_{xy}}{B_x} \right)$

$B_1 = \frac{B_x}{1 - \nu_1 \nu_2}, B_2 = \frac{B_y}{1 - \nu_1 \nu_2}, \beta_1 = s^2 + c^2 \gamma_1, \beta_2 = s^2 + c^2 \gamma_2$

(2) 曲げモーメント,ねじりモーメント(その1)

x, y 軸に直角な断面に作用する,曲げモーメントおよび,ねじりモーメント

$M_{xx}, M_{yy}, M_{\eta x}, M_{\xi y}$ は、次のように表わされる。

	$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$	$-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$	$-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$	
$M_{xx} =$	$\frac{1}{s^2}$	$B_1(s^2 + c^2 \gamma_2 \nu_2)$	$B_1 \beta_2 \nu_2$	$-cB_1 \gamma_2 \nu_2$(2) ₁
$M_{yy} =$	$\frac{1}{s^2}$	$B_2 \beta_1 \nu_1$	$B_2(s^2 + c^2 \gamma_1 \nu_1)$	$-cB_2 \gamma_1 \nu_1$(2) ₂
$M_{\eta x} - M_{\xi y} =$	$\frac{1}{s^2}$	$-2csK_{xy}$	$-2csK_{xy}$	$2sK_{xy}$

(3) 曲げモーメント,ねじりモーメント(その2)

y, x 軸に平行な断面に作用する断面力は次のようになる。

$M_{x\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x\xi} z dz = -\frac{1}{s^4} \left(D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{13} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$ (2)₃

$M_{y\eta} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{y\eta} z dz = -\frac{1}{s^4} \left(D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{23} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$ (2)₄

$T_{y\xi} = -T_{x\eta} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{x\eta} z dz = -\frac{1}{s^4} \left(D_{31} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + D_{32} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2D_{33} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$ (3)

(4) せん断力,反力

$Q_y = \frac{\partial M_{y\eta}}{\partial y} + \frac{\partial T_{y\xi}}{\partial x} = -\frac{1}{s^4} \left\{ D_{31} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{21} + 2D_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{32} + 2D_{23}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right\}$ (4)₁

$Q_x = \frac{\partial M_{x\xi}}{\partial x} - \frac{\partial T_{x\eta}}{\partial y} = -\frac{1}{s^4} \left\{ D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{31} + 2D_{13}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 2D_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{32} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right\}$ (4)₂

$V_\eta = Q_y - \frac{\partial T_{x\eta}}{\partial x} = -\frac{1}{s^4} \left\{ 2D_{31} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (D_{21} + 4D_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + 2(D_{32} + D_{23}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right\}$ (5)₁

$V_\xi = Q_x + \frac{\partial T_{y\xi}}{\partial y} = -\frac{1}{s^4} \left\{ D_{11} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2(D_{31} + D_{13}) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + (D_{12} + 4D_{33}) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 2D_{32} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right\}$ (5)₂

(6) ねじり剛性

直交異方性板理論においてもねじり剛性 H の値は直接求めにくいものであるが,斜交異方性板の場合においても同様である。李国豪氏は,板の曲げ剛さ B が B_x, B_y をそれぞれ長短径とする楕円として変化するものとして, K_{xy} に対して,次式を与えている。

$K_{xy} = \frac{B_x \cdot \sqrt{2} s}{1 + \nu_k} \cdot \frac{1}{[(1-c)(1+2c+e^2)]^{1/2} + [(1+c)(1-2c+e^2)]^{1/2}}$

ここに,

$\nu_k = \frac{\nu_a B_b + \nu_b B_a}{B_a + B_b} \quad e = \frac{B_x}{B_y}$

で, ν_a, ν_b は, それぞれ, $\varphi_a = \alpha/2, \varphi_b = (\alpha/2) + (\pi/2)$ 方

向のポアソン比, B_a, B_b は, それぞれ, ϕ_a, ϕ_b 方向の曲げ剛さである。

3. $\nu_1 = \nu_2 = 0$ の場合のたわみ曲面の微分方程式, その他

直交異方性板理論の実際面への応用においては, ポアソン比 ν_x, ν_y について, $\nu_x = \nu_y = 0$ と仮定することが多い。これと同様に, 斜交異方性板理論についても $\nu_1 = \nu_2 = 0$ と仮定すれば,

$$B_1 = B_x, B_2 = B_y, r_1 = 2K_{xy}/B_x, r_2 = 2K_{xy}/B_y$$

となつて, D_{ik} は次のように表わされる。

$i \backslash k$	1	2	3
1	$s^2 B_x + 2c^2 K_{xy}$	$2c^2 K_{xy}$	$-2c K_{xy}$
2	$2c^2 K_{xy}$	$s^2 B_y + 2c^2 K_{xy}$	$-2c K_{xy}$
3	$-\frac{c}{2} \{2(1+c^2)K_{xy} + s^2 B_x\}$	$-\frac{c}{2} \{2(1+c^2)K_{xy} + s^2 B_y\}$	$K_{xy}(1+c^2)$

従つて, 式(1)は次のようになる。

$$(s^2 B_x + 2c^2 K_{xy}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - c \{s^2 B_x + 2(3+c^2)K_{xy}\} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 4(1+2c^2)K_{xy} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - c \{s^2 B_y + 2(3+c^2)K_{xy}\} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p s^4 \dots \dots \dots (8)$$

次に境界条件式を書いてみよう。

a) 式(6)は, 次のように変換される。
 $w = 0 \dots \dots \dots (9)_1$

$$(s^2 B_x + 2c^2 K_{xy}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 4c K_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \dots \dots \dots (9)_2$$

b) 次に $y = b$ の辺において板が単純支持される場合を考えると, 式(5)₁を用いて,

$$V_y = -EJ_R \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$$

であるから

$$2c^2 K_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (s^2 B_y + 2c^2 K_{xy}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 4c K_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \dots \dots \dots (10)_1$$

$$s^4 \cdot EJ_R \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \{cs^2 B_x + 2c(1+c^2)K_{xy}\} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2(2+3c^2)K_{xy} \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \{cs^2 B_y + 2c(3+2c^2)K_{xy}\} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \{s^2 B_y + 2c^2 K_{xy}\} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = 0 \dots \dots \dots (10)_2$$

4. 階差方程式の誘導

斜交異方性板のたわみ曲面の微分方程式を, 与えられた荷重状態, 境界条件のもとで解くことは, 不可能であ

るから, 近似解法の一つである階差法によって解くことを試みる。まず, 微分方程式を無次元表示するために,

$$\alpha = (B_y/B_x)^{1/2}, \kappa = 2K_{xy}/(B_x \cdot B_y)^{1/2}$$

の記号を用いると, 式(8)は

$$(c^2 \kappa \alpha + s^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - c \{(c^2 + 3)\kappa \alpha + s^2\} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(2c^2 + 1)\kappa \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - c \{(c^2 + 3)\kappa \alpha + s^2 \alpha^2\} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} + (c^2 \kappa \alpha + s^2 \alpha^2) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p s^4}{B_x} \dots \dots \dots (11)$$

となる。上記の4階の偏微分方程式を二つの2階の偏微分方程式に分解して解くこととし,

$$g_1 = c^2 \kappa \alpha + s^2 \alpha^2, g_2 = -c \kappa \alpha / 2, g_3 = c^2 \kappa \alpha + s^2, g_4 = -(cg_1 - 6g_2) / 4, g_5 = -(cg_3 - 6g_2) / 4, g_6 = -\{4(2c^2 + 1)g_2 / c\} - 16ag_2, a = g_4 / 2g_1$$

なる係数を用い, さらに,

$$K = \lambda_y / \lambda_x$$

とすれば, 計算の結果, 一般内点に対する階差方程式は式(A)のようになる。

単純支持辺における境界条件は, 式(9)より
 $w = 0 \dots \dots \dots (12)_1$

$$(c^2 \kappa \alpha + s^2) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2c \kappa \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \dots \dots \dots (12)_2$$

の2つであるが, これのみでは, 単純支持辺近傍の内点における階差方程式をたてたとき, imaginary point が消去できないため, 注目する“単純支持辺近傍の内点”に隣る単純支点上の点に対してのみ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \dots \dots \dots (12)_3$$

を併用する。

縁桁支持辺における境界条件は, 式(10)より,

$$(c^2 \kappa \alpha + s^2 \alpha^2) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2c \kappa \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c^2 \kappa \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \dots \dots \dots (13)_1$$

$$(c^2 \kappa \alpha + s^2 \alpha^2) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - c \{(c^2 + 3)\kappa \alpha + s^2 \alpha^2\} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + (3c^2 + 2)\kappa \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - c \{(c^2 + 1)\kappa \alpha + s^2\} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \frac{s^4 EJ_R}{B_x} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \dots \dots \dots (13)_2$$

であり, 縁桁支持辺上の点において階差方程式をたてるとき, imaginary point を消去するために, 注目する縁桁支持辺上の点に対してのみ

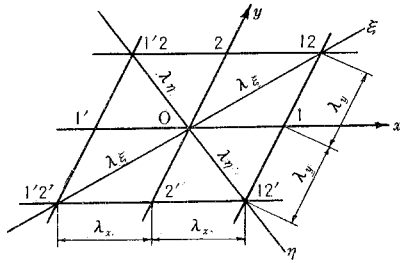
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \dots \dots \dots (13)_3$$

を併用する。次に, 図-3を参照して

$$2\lambda_x \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_2 \right\} = (f_{12} - f_{1'2}) + (f_{12'} - f_{1'2'}) \\ = (f_{12} - f_{1'2'}) + (f_{12'} - f_{1'2'}) = 2\lambda_x \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_0 + 2\lambda_y \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_0$$

また

図-3



$$\lambda_{\xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_0 = \lambda_x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + \lambda_y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0,$$

$$\lambda_{\eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_0 = \lambda_x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 - \lambda_y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0$$

であるから

$$2\lambda_{\xi} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi} \right)_0 + 2\lambda_{\eta} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)_0 = 2\lambda_x \left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 \right\}$$

$$= 4\lambda_x \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 = 2(f_1 - f_{1'})$$

従って、

$$(f_{12} - f_{1'2'}) + (f_{1'2} - f_{12'}) = 2(f_1 - f_{1'})$$

全く同様にして

$$(f_{12} - f_{12'}) + (f_{1'2} - f_{1'2'}) = 2(f_2 - f_{2'})$$

この条件式をも使用することにするが、同一点について同時には使用しない。

以上の諸式を適用して、2) 単純支持辺近傍の一般内点(左, 右), 3) 縁桁近傍の内点, 4) 単純支持辺と縁桁にかこまれる鈍(鋭)角隅角部の内点(左, 右), 5) 縁桁上の一般点, 6) 単純支持辺に近接する縁桁上の点(左, 右)に対する階差方程式を得ることができる。これらを、図にして示せば、式(B)~(I)のようである。

これらの諸式の誘導は非常に複雑であるので、単に、その結果を記すにとどめる。式(B)~(G)の誘導に際しては、Maxwell-Bettiの相互作用の法則を満足せしめるようにして、未定係数を求めて、式(B)~(G)の係数を定めてゆく。さらに、式(H), (I)の誘導にあたっては、上記の相互作用の法則が成立するように、すでに求められている式(A)~(G)の諸係数を用いて、式(H), (I)の係数を求めてある(注: 式の右辺の p, s はすべて小文字のつもりである)。

なお、李国豪氏の提案したねじり剛性の式において、便宜上 $\nu_a = \nu_b = \nu_k$ とすれば、

$$\kappa = \frac{2K_{xy}}{\sqrt{B_x \cdot B_y}}$$

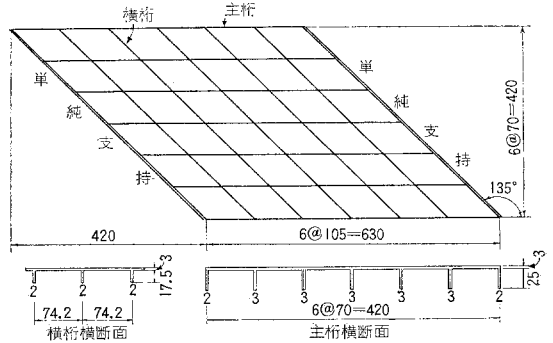
$$\cdot \frac{2s\sqrt{2e}}{[(1-c)(1+2c+e^2)]^{1/2} + [(1+c)(1-2c+e^2)]^{1/2}}$$

となって、 $c = \cos \theta, s = \sin \theta, e = B_x/B_y$ の値から、 κ を求めることができ、この値を、階差方程式の係数にふくまれる g_1, g_2 , および g_3 に使用すればよい。

5. 斜交異方性板理論の斜交斜格子桁への適用一模型実験による検討

上述の計算方法が有効であるかどうか検討するために、アクリライト模型の斜交斜格子桁による実験を行な

図-4 アクリライトによる斜交斜格子桁模型



$$\begin{matrix} ag_2 K^2 & -g_4 K & g_1 - 2ag_2 K^2 & g_4 K & ag_2 K^2 \\ -g_5 K^3 & 2g_4 K - g_5 K^2 - 2g_5 K^3 & -4g_1 - 2g_5 K^2 & -2g_4 K - g_5 K^2 - 2g_5 K^3 & g_5 K^3 \\ -2ag_2 K^2 - g_5 K^4 & -2g_5 K^2 - 4g_3 K^4 & 6g_1 - 4(ag_2 + g_5) K^2 & -2g_4 K^2 - 4g_3 K^4 & -2ag_2 K^2 - g_3 K^4 \\ g_5 K^3 & -2g_4 K + g_5 K^2 - 2g_5 K^3 & -4g_1 - 2g_5 K^2 & 2g_4 K + g_5 K^2 - 2g_5 K^3 & -g_5 K^3 \\ ag_2 K^2 & g_4 K & g_1 - 2ag_2 K^2 & -g_4 K & ag_2 K^2 \end{matrix} w = \frac{P(S\lambda_y)^4}{B_x} (A)$$

$$\begin{matrix} g_1 - ag_2 K^2 & g_4 K & ag_2 K^2 \\ -4g_1 - 2g_5 K^2 & -2g_4 K - g_5 K^2 - 2g_5 K^3 & g_5 K^3 \\ 6g_1 - 2(ag_2 + 2g_5) K^2 & -2g_5 K^2 - 4g_3 K^4 & -2ag_2 K^2 - g_3 K^4 \\ -5g_1 K^4 & -5g_1 K^4 & -5g_1 K^4 \\ -4g_1 - 2g_5 K^2 & 2g_4 K - g_5 K^2 - 2g_5 K^3 & -g_5 K^3 \\ g_1 - ag_2 K^2 & -g_4 K & ag_2 K^2 \end{matrix} w = \frac{P(S\lambda_y)^4}{B_x} (B)$$

$$\begin{matrix} ag_2 K^2 & -g_4 K & g_1 - ag_2 K^2 \\ -g_5 K^3 & 2g_4 K - g_5 K^2 - 2g_5 K^3 & -4g_1 - 2g_5 K^2 \\ -2ag_2 K^2 - g_3 K^4 & -2g_5 K^2 - 4g_3 K^4 & 6g_1 - 2(ag_2 + 2g_5) K^2 \\ g_5 K^3 & -2g_4 K + g_5 K^2 - 2g_5 K^3 & -4g_1 - 2g_5 K^2 \\ ag_2 K^2 & g_4 K & g_1 - ag_2 K^2 \end{matrix} w = \frac{P(S\lambda_y)^4}{B_x} (C)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{-(2ca_{g_2+g_5})K^3}{+2(2ca_{g_2+g_5})K^3} & \frac{2ag_1K-(2ca_{g_1+g_6})K^2}{-2(2ca_{g_1+g_6})K^2} & \frac{-2g_1}{-2(2ca_{g_1+g_6})K^2} & \frac{-2ag_1K-(2ca_{g_1+g_6})K^2}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} & \frac{(2ca_{g_2+g_5})K^3}{(2ca_{g_2+g_5})K^3} \\
 \frac{-ag_2K^2+g_5K^4}{-2g_6K^2-4g_3K^4} & \frac{5g_1+2(ag_2+2g_5)K^2}{-6g_3K^4} & & \frac{-2g_6K^2-4g_3K^4}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} & \frac{-ag_2K^2+g_5K^4}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} \\
 \frac{g_3K^3}{-2g_4K-g_6K^2-2g_5K^3} & \frac{-4g_1-2g_5K^2}{2g_4K-g_6K^2-2g_5K^3} & & \frac{2g_4K-g_6K^2-2g_5K^3}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} & \frac{-g_5K^3}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} \\
 \frac{ag_2K^2}{g_4K} & \frac{g_1-2ag_2K^2}{-g_4K} & & \frac{-g_4K}{ag_2K^2} & \frac{ag_2K^2}{ag_2K^2}
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccc} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}} \right\} w = \frac{P(SA_x)^4}{B_x} (D)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{-2g_1-2(2ca_{g_1+g_6})K^2}{-2ca_{g_2}K^3} & \frac{-2ag_1K-(2ca_{g_1+g_6})K^2}{-2(2ca_{g_1+g_6})K^2} & \frac{(2ca_{g_2+g_5})K^3}{(2ca_{g_2+g_5})K^3} & & \\
 \frac{5g_1-(ag_2+4g_6)K^2}{+5g_3K^4} & \frac{-2g_6K^2-4g_3K^4}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} & \frac{-ag_2K^2+g_5K^4}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} & & \\
 \frac{-4g_1-2g_5K^2}{2g_4K-g_6K^2-2g_5K^3} & & \frac{2g_4K-g_6K^2-2g_5K^3}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} & & \frac{-g_5K^3}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} \\
 \frac{g_1-ag_2K^2}{-g_4K} & & \frac{-g_4K}{ag_2K^2} & & \frac{ag_2K^2}{ag_2K^2}
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccc} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}} \right\} w = \frac{P(SA_x)^4}{B_x} (E)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{-(2ca_{g_2+g_5})K^3}{+2(2ca_{g_2+g_5})K^3} & \frac{2ag_1K-(2ca_{g_1+g_6})K^2}{-2(2ca_{g_1+g_6})K^2} & \frac{-2g_1-2(2ca_{g_1+g_6})K^2}{-2ca_{g_2}K^3} & & \\
 \frac{-ag_2K^2+g_5K^4}{-2g_6K^2-4g_3K^4} & \frac{5g_1+2(ag_2+2g_5)K^2}{+5g_3K^4} & & & \frac{-ag_2K^2+g_5K^4}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} \\
 \frac{g_3K^3}{-2g_4K-g_6K^2-2g_5K^3} & \frac{-4g_1-2g_5K^2}{2g_4K-g_6K^2-2g_5K^3} & & & \frac{-g_5K^3}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} \\
 \frac{ag_2K^2}{g_4K} & \frac{g_1-2ag_2K^2}{-g_4K} & & & \frac{ag_2K^2}{ag_2K^2}
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccc} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}} \right\} w = \frac{P(SA_x)^4}{B_x} (F)$$

$$\begin{array}{ccccc}
 \frac{J-ag_2K^2}{-(4c^2ag_2-0.5g_3)K^2-2(4c^2ag_2-g_3)K^4} & \frac{-4J-(4ca_{g_1+g_6})K^2}{-3(4c^2ag_2-g_3)K^2} & \frac{6J-g_1+2(ag_2+4ca_{g_1+g_6})K^2}{+2(4c^2ag_2-g_3)K^4} & \frac{-4J-(4ca_{g_1+g_6})K^2}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} & \frac{J-ag_2K^2}{-(2c^2ag_2-0.5g_3)K^4} \\
 \frac{(2ca_{g_2+g_5})K^3}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} & \frac{-2ag_1K-(2ca_{g_1+g_6})K^2}{-2(2ca_{g_1+g_6})K^2} & \frac{-2g_1}{-2(2ca_{g_1+g_6})K^2} & \frac{2ag_1K+(2ca_{g_1+g_6})K^2}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} & \frac{-(2ca_{g_2+g_5})K^3}{-2(2ca_{g_2+g_5})K^3} \\
 \frac{ag_2K^2}{g_4K} & \frac{g_1-2ag_2K^2}{-g_4K} & & \frac{-g_4K}{ag_2K^2} & \frac{ag_2K^2}{ag_2K^2}
 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccc} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}} \right\} w = \frac{P(SA_x)^4}{B_x} (G)$$

$\alpha=0.5180, J=0.08796,$

$K=0.9428$

K_{xy} , 従って, κ の値に対しては, $\kappa=0$ と李国豪氏の提案する公式を使った $\kappa=0.5532$ と 2 つの場合を計算するものとする。

$\kappa=0$ の場合

$g_1=0.1342, g_2=0, g_3=0.5, g_4=0.02372, g_5=0.08839, g_6=0, a=0.08839$

$\kappa=0.5532$ の場合

$g_1=0.2775, g_2=0.1013, g_3=0.6433, g_4=0.2010, g_5=0.2656, g_6=0.5591, a=0.3621$

① たわみの影響係数: 階差方程式の未知数は, 図-5 からわかるように $(6+1) \times (6-1) = 35$ であるが, 対称荷重と逆対称荷重を考慮することによって, 18, 17 に減少せしめることができる。

これら 18 元 (17 元) の Stiffness Matrix の Inversed Matrix を求めると, Flexibility Matrix が得られる。この 4 個の Matrix Inversion には, 京都大学電子計算機, KDC-1 を用いた。この Matrix Inversion のプログラムは, Crout 法に従って, 新しく KDC-1 用として開発したものである。18 元の場合には, 印刷完了まで, 約 30 分を要する。

このようにして得られた結果を加減することによって, $w_1 \sim w_{18}$ のたわみの影響係数が得られる。これを, 点 3 (縁桁 $l/2$ 断面) 点 8, 13, 18 (中桁 $l/2$ 断面) について比較すると, 図-6.1,

6.2, 6.3, および 6.4 のようである。これらの図では, 便宜上, 横桁は主桁に直交せしめて画いてある。図中, 黒丸は実測値を示す。

載荷点が縁桁上, あるいは, 縁桁に近い方では, $\kappa=0.5532$ の場合に比較的好く一致し, 中央桁では $\kappa=0$ によく一致する。この傾向は, さきに, アクリライト模型の直交斜格子桁を直交異方性板理論で解析した場合に得られた傾向とよく一致する。

② 主桁の桁方向の曲げモーメントの影響係数: 次に, 主桁の曲げモーメント M_{xx} の影響係数を求めてみよう。ポアソン比 ν_x, ν_y を 0 と仮定すれば, 式(2)より,

い, 実測値を計算値と比較することにした。

a) 模型 図-4 に示すようである。材料はアクリライトで, E の値は 20°C において, $E=2.5 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ であった。

b) 計算値の求め方 模型の主桁, 斜横桁に図-5 の skew network の net line をあわせることにすると, 次の値が得られる。

$B_x=0.2128 E, B_y=0.0571 E$ (ともに, $\text{kg cm}^2/\text{cm}$),

$\lambda_x=10.5 \text{ cm}, \lambda_y=9.8994 \text{ cm}$

$\alpha=135^\circ$

従って, 階差式の計算に必要な数値は, 次のようになる。

$c=-0.7071, s=0.7071,$

$$\begin{array}{c}
 \left. \begin{array}{ccc}
 \frac{5J-g_1+(8cag_1-ag_2-2g_3)K^2}{-(4cag_2-g_4)K^3-(10c^2ag_2-2.5g_3)K^4} & \frac{-4J-(4cag_1+g_6)K^2}{+2(4c^2ag_2-g_3)K^4} & \frac{J-ag_2K^2}{-(2c^2ag_2-0.5g_3)K^4} \\
 \frac{-2g_1-2(2cag_1-g_3)K^2}{+2cag_2K^3} & \frac{2ag_1K+(2cag_1-g_6)K^2}{+2(2cag_2+g_3)K^4} & \frac{-(2cag_2-g_3)K^3}{-} \\
 \frac{g_1-ag_2K^2}{-} & \frac{-g_4K}{-} & \frac{ag_2K^2}{-}
 \end{array} \right\} w = \frac{P(S\lambda_y)^4}{B_x} (H) \\
 \\
 \left. \begin{array}{ccc}
 \frac{J-ag_2K^2}{-(2c^2ag_2-0.5g_3)K^4} & \frac{-4J-(4cag_1+g_6)K^2}{2(4c^2ag_2-g_3)K^4} & \frac{5J-g_1-(8cag_1-ag_2+2g_3)K^2}{-(4cag_2+g_4)K^3-(10c^2ag_2-2.5g_3)K^4} \\
 \frac{(2cag_2-g_3)K^3}{-} & \frac{-2ag_1K+(2cag_1-g_6)K^2}{-2(2cag_2-g_3)K^4} & \frac{-2g_1-2(2cag_1-g_6)K^2}{-2cag_2K^3} \\
 \frac{ag_2K^2}{-} & \frac{g_4K}{-} & \frac{g_1-ag_2K^2}{-}
 \end{array} \right\} w = \frac{P(S\lambda_y)^4}{B_x} (I)
 \end{array}$$

図-5 Skew Network

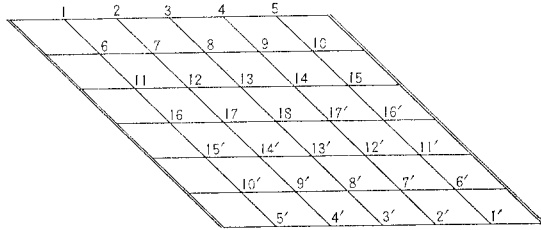


図-6.1~6.4 たわみの影響係数の実測値と計算値との比較 ($K'=K \cdot s$)

図-6.1

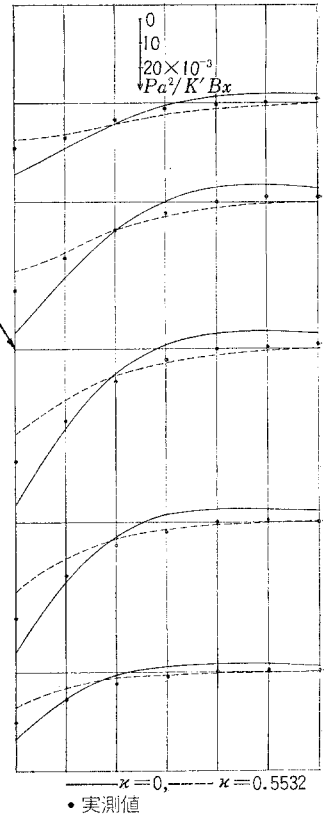


図-6.2

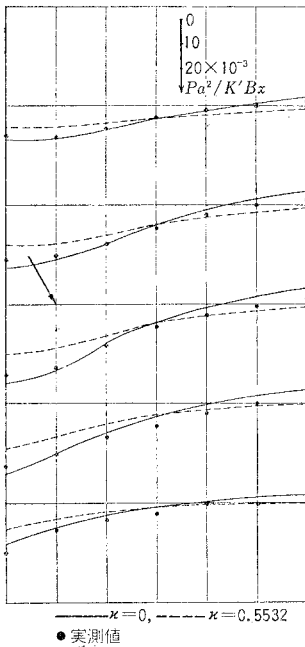


図-6.3

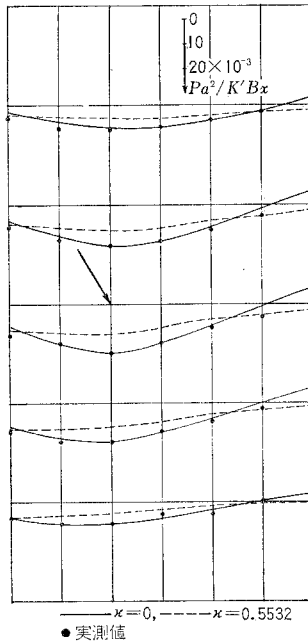
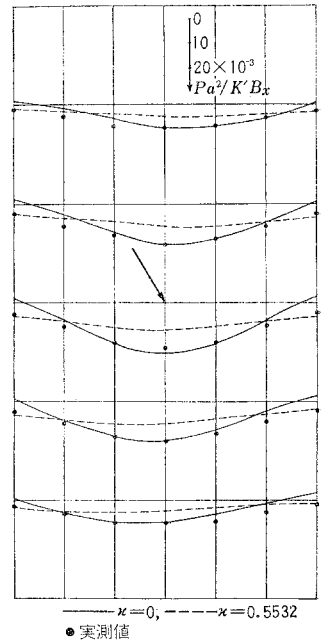


図-6.4



$$M_{xx} = -B_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

であるから、一般の内点については、

$$(M_{xx})_0 = -\frac{K^2}{\lambda^2 y} B_x (w_1' - 2w_0 + w_1)$$

によって計算できる。さきに求めた。たわみの影響係数

図-7.1~7.2 主桁の曲げモーメント M_{xx} の影響係数実の測値と計算値との比較 ($K'=K \cdot s$)

図-7.1

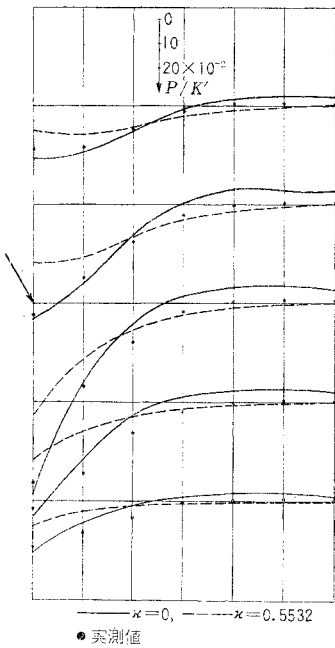


図-7.2

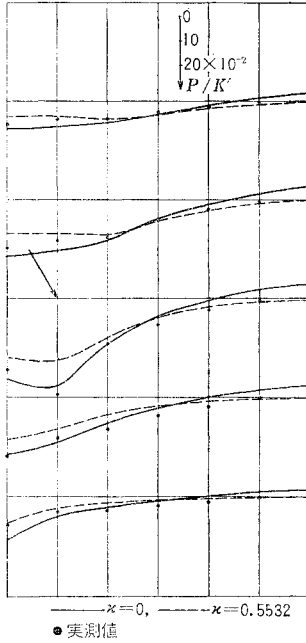


図-7.3

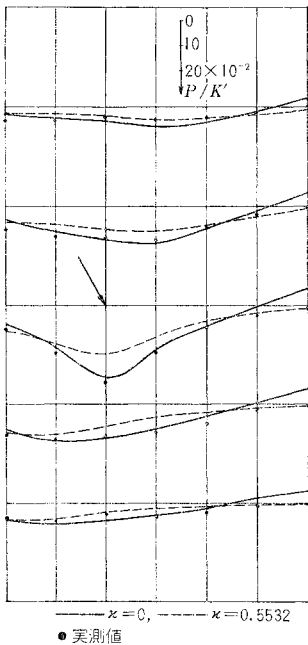
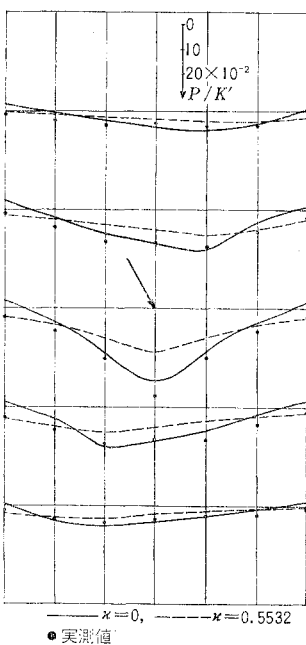


図-7.4



を用いて、点 3, 8, 13, および、18 の曲げモーメント M_{xx} の影響係数を求めると、図-7.1, 7.2, 7.3, および、7.4 のようである。図中、黒丸はひずみの測定値より逆算した M_{xx} の影響係数の値で、測定値とも称す

べきものである。

計算値と測定値との一致は、たわみの場合ほどよくはないが、これは当然のことである。また、この場合には、 $\kappa=0$ と $\kappa=0.5532$ のいずれが計算値と実測値がよく一致した傾向を示すかの問題は、たわみの場合ほど、はっきりしない。しかし、いずれにしても、以上述べてきた斜交異方性板理論が斜交斜格子桁の実測値をよく説明しうることは確かである。現在の段階では、一応満足すべきものと思われる。

6. むすび

李国豪氏がさきに誘導した、斜交異方性板理論について、まず、その概要を説明し、次いで、実際の解析法である階差法を用いて、斜交異方性板のたわみ曲面の微分方程式を、9つの点について、階差方程式による表示を求めた。次いで、アクリライトによる斜交斜格子桁模型の実測値を計算値と、たわみ、曲げモーメントの影響係数の形で比較した。計算値は、京都大学電子計算機 KDC-1 を用い、Crout 法による逆マトリックスの計算のプログラムを新たに開発して、行なったものである。実測値と計算値との比較は、十分満足すべきものではなかったが、これは、荷重分配係数的な方法によらなかったためであって、上記のような斜交異方性板理論による斜交斜格子桁の解析の段階では、一応、納得できるものと思う。

参考文献

- 1) Y. Guyon : Ann. Ponts et Chauss., Sept.-Oct. (1946), p. 553.
- 2) Ch. Massonnet : Publications of IABSE, 10 (1950), p. 147.
- 3) P.B. Morice and G. Little : Structural Engineer, 32 (1954), p. 83.
- 4) M. Naruoka u. H. Ohmura : Stahlbau, 28 (1959), S. 187.
- 5) N. Naruoka and H. Ohmura : Publications of IABSE, 19 (1959), p. 236.
- 6) 成岡・大村・川野・古賀：純信橋(合成直格子斜桁橋)の研究。土木学会誌 46. 11 (昭 36. 11), p. 27.
- 7) 李国豪：斜交異方性板の弯曲理論及其对于斜橋的应用，力学学报，第2卷第1期(1958)，p. 78

Lie Kuo-Hao : Theorie der Schiefwinklig-Anisotropen Platte und ihre Anwendung auf Schiefe Brücken, Acta Mechanica Sinica, 2. 1 (1958), p. 78 (概要のみドイツ語).

(原稿受付：1961.6.19)

ON THE ANALYSIS OF SKEW ANISOTROPIC PLATES

*By Dr. Eng. Masao Naruoka, C.E. Member, M.S. Tomohiro Yamamoto,
C.E. Member, M.S. Osamu Fukuchi, C.E. Member,
and Yasuo Okada, C.E. Member*

There are many research works on the application of the theory of plates to the analysis of slab and girder bridges. The application of the theory of orthotropic rectangular plates was researched theoretically by Y. Guyon and Ch. Massonnet and experimentally by P.B. Morice and G. Little. The application of the theory of orthotropic parallelogram plates was researched by M. Naruoka and H. Ohmura theoretically and experimentally. These research works have been applied to the design of the right and skew highway girder bridges in Japan.

The skew grillage-skew girder bridge can be assumed as a skew anisotropic parallelogram plate and therefore, it can be supposed that it is applicable to the analysis of skew grillage-skew girder bridges. The theory of skew anisotropic parallelogram plate was researched by Prof. Lie, Kuo-Hao, and this paper is based on his theory.

If all Poisson's ratios are assumed as zero, the fundamental differential equation of the deflection surface of skew anisotropic plate is given by the following equation, using the skew coordinate shown in Fig. 1.

$$\begin{aligned} & (c^2\kappa\alpha + s^2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - c\{(c^2+3)\kappa\alpha + s^2\} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y} \\ & + 2(2c^2+1)\kappa\alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - c\{(c^2+3)\kappa\alpha + s^2\} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} \\ & + (c^2\kappa\alpha + s^2\alpha^2) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{ps^4}{B_x} \end{aligned}$$

$$c = \cos \theta, \quad s = \sin \theta, \quad \alpha = \sqrt{(B_y/B_x)}, \quad \kappa^2 = \kappa_{xy} / \sqrt{B_x \cdot B_y}$$

If the above differential equation is expressed by a finite difference equation, it will become eq. (A) for the case of general interior point. For the various cases of points under consideration, it will be changed into the finite difference equations (B)~(I). In these finite differential equations, the following notations are used.

$$\begin{aligned} g_1 &= c^2\kappa\alpha + s^2\alpha^2, \quad g_2 = -c\kappa\alpha/2, \quad g_3 = c^2\kappa\alpha + s^2 \\ g_4 &= -(cg_1 - 6g_2)/4, \quad g_5 = -(cg_3 - 6g_2)/4, \\ g_6 &= -\{4(2c^2+1)g_2/c\} - 16ag_2, \\ \alpha &= g_4/2g_1, \quad \kappa = \lambda_y/\lambda_x \end{aligned}$$

In order to check the effectiveness of the above numerical method of analysis of skew anisotropic plates, a model test on a skew grillage-skew girder bridge with 7 main girders and 5 intermediate skew cross girders was made. The influence coefficients of deflection and bending moment in longitudinal direction were obtained experimentally for those at each mid-span section. On the contrary, these coefficients were calculated by the aid of KDC-1, The Kyoto University Digital Computer, using the above 9 finite difference equations. A considerably satisfactory agreement was found between the calculated and measured values, and it was made clear that the numerical method of analysis given here is applicable to the analysis of skew grillage-skew girder bridges.