

平板の初期降伏ヒンジ周辺の曲げモーメントについて

能 町 純 雄*

要 旨 平板内のいたるところで最大曲げモーメントが降伏モーメントを越えないという降伏条件で、平板に初期降伏ヒンジが生じたときその周辺の曲げモーメントを Dual の積分方程式によって解析したものである。その結果、初期降伏ヒンジの長さは主曲げモーメントが降伏モーメントを超過した巾の $\sqrt{2}$ 倍になることがわかった。さもなければそのヒンジの両端で曲げモーメントの分布は不連続となり、しかも急激に無限大となる。最後に正弦荷重を受ける矩形板について数値計算によって題意の曲げモーメントの分布を示した。

1. 緒 言

平板の曲げの極限状態については板内のどの点かで降伏モーメントが生じ始めたという下限値とこれ以上荷重強度を増加すれば崩壊が無制限に進行するという運動学的許容値を上限として与えられるだけで、骨組構造物のように崩壊過程を追跡することができず、崩壊関節の設定なども全くの仮定¹⁾にもとづいている。また降伏条件についても主最大曲げモーメントが降伏モーメントを超過しないという考えと、最大せん断ひずみエネルギーが一定値に達して降伏するという Huber, Hencky などの仮定²⁾ が時に応じて用いられているようである。ここでは最大主曲げモーメント説にしたがい線分状の降伏ヒンジが生ずるような場合を想定し初期の線分状降伏ヒンジがその付近の曲げモーメントにどのような影響があるかを検討する。

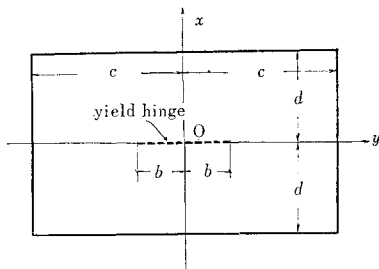
2. 仮 定

降伏条件は最大主曲げモーメント説をとる。すなわち

$$\frac{M_x M_y \pm \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4 M_{xy}^2}}{2} \leq M_p$$

ただし、 M_x, M_y は板の x, y 方向曲げモーメント M_{xy}

図-1



はねじりモーメント、 M_p は降伏モーメントである。平板上の外力は $x=0, y=0$ で最大主曲げモーメントが M_x と一致するような対称分布であるとする。このように荷重を仮定しても一般性を害しない。次にこの結果外力の増加にしたがって最大主曲げモーメントが降伏モーメント M_p を越え y 軸に平行に長さ $2b$ の線分状の降伏ヒンジが発生するような状態を想定する。そうすれば初期の間は $2b$ は板の長さ $2c, 2d$ にくらべて小さく、その影響は周辺におよばないと考えられる。 $2b$ の大きさは $2c, 2d$ にくらべて相当の大きさになっても周辺に影響がないものでこのことは後で数値的に証明する。また $x=0$ 断面に沿う M_x の分布は降伏ヒンジ発生後も連続であると仮定する。

3. 基本微分方程式と境界条件

板の曲げの基本微分方程式はたわみを w 、曲げ剛性を N とすれば

$$N \Delta^2 w = q \cdot f(xy) \dots \dots \dots (1)$$

ただし q : 荷重強度, $f(xy)$: 荷重の分布関数

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ である。}$$

$$\text{いま } w = w^{(1)} + w^{(2)} \dots \dots \dots (2)$$

とわけて $w^{(1)}$ は降伏ヒンジがないと考えた板のたわみで、荷重と周辺の境界条件を満足するものとし、 $w^{(2)}$ は降伏ヒンジの影響によるたわみを表わすものとする。すなわち

$$N \Delta^2 w^{(1)} = q \cdot f(xy), \dots \dots \dots (3)$$

$$N \Delta^2 w^{(2)} = 0, \dots \dots \dots (4)$$

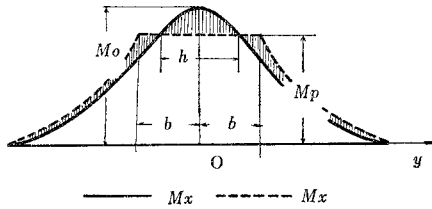
前述の仮定により $w^{(2)}$ は長さ $2b$ なる降伏ヒンジを有する無限大板の解を用いる。初期降伏ヒンジのときは実際に $w^{(2)}$ の影響は板の境界条件を乱さない程度のものであるが、これは荷重の状態によっては $c \gg d$ の場合 b が d 程度でも十分満足される。(3)式からは与えられた境界条件を満足するように解いて $w^{(1)}$ が求められる。この $w^{(1)}$ から $x=0$ に沿う $M_x^{(1)}$ が

$$M_x^{(1)} = -N \left(\frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial y^2} \right) \dots \dots \dots (5)$$

によって計算でき、図-2 (a) のようになる。荷重強度が増加して $M_x^{(1)}$ の最大値 (これは仮定によって板の最大主曲げモーメントである) が M_p を越えれば降伏ヒンジが y 軸に平行に $2b$ だけ発生してその間では一定値 M_p となり M_x の分布は図-2 (b) の点線のように変化する。実線の部分は $M_x^{(1)}$ に相当するものであるから

* 正員 工博 空欄工業大学教授 土木工学教室

図-2 超過弾性曲げモーメント $M_x^{(1)}$ と降伏後の曲げモーメント M_x



ハッチした部分が $w^{(2)}$ から求まる $M_x^{(2)}$ となり, $M_x^{(1)}$ と $M_x^{(2)}$ の合成したものが点線の図形を示していることとなる。 M_x の分布が $x=0$ で連続であるとして図の点線は描かれているが $|y| \geq b$ で M_x はどのような分布をしてもよいのであって, このところでは荷重の対称性から x 方向の slope が 0 であればよい。これらのことから $w^{(2)}$ に対して $x=0$ で

$$\frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} = 0, \quad |y| \geq b, \dots (6)$$

$$M_x^{(2)} = -N \left(\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial y^2} \right) = M_x^{(1)} - M_p, \quad |y| \leq b, \dots (7)$$

という境界条件が与えられる。さらに $b \ll c$ であるから上式右辺の $M_x^{(1)}$ は $|y| < b$ で放物線分布とみなすことができるから $M_x^{(1)}$ の最大値を M_0 として $a_0 = M_0 - M_p$ とおき条件式 (7) を

$$M_x^{(2)} = a_0 - a_1 \left(\frac{y}{b} \right)^2, \quad |y| \leq b, \dots (8)$$

と書くことができる。次に $x=0$ で x 方向のせん断力が荷重の対称性から消えるので, もう一つの境界条件

$$\frac{\partial^3 w^{(2)}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w^{(2)}}{\partial x \partial y^2} = 0 \dots (9)$$

が成立する。

4. $w^{(2)}$ の解式

方程式 (4) の一般解は

$$w^{(2)} = \int_0^\infty (A + Bx\lambda) e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda \dots (10)$$

境界条件 (9) より $B=0$ となり, 未知数 A は (8), (6) の条件式から

$$\left. \begin{aligned} -N(1-\nu) \int_0^\infty A \lambda^2 \cos \lambda y d\lambda &= a_0 - a_1 \left(\frac{y}{b} \right)^2, & |y| \leq b, \\ \int_0^\infty A \lambda \cos \lambda y d\lambda &= 0 & |y| \geq b, \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

いま $\lambda = \frac{\rho}{b}$, $y = \eta b$, $\lambda^2 A = \rho^{1/2} F(\rho)$,

$$g(\eta) = \frac{\sqrt{2} b}{\sqrt{\eta \pi} N(1-\nu)} (a_0 - a_1 \eta^2)$$

とおいて

$$\cos(\lambda y) = \left(\frac{\pi \rho \eta}{2} \right)^{1/2} J_{-1/2}(\rho \eta)$$

なることを考えれば前式は

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \rho F(\rho) J_{-1/2}(\rho \eta) d\rho &= g(\eta), & |\eta| \leq 1 \\ \int_0^\infty F(\rho) J_{-1/2}(\rho \eta) d\rho &= 0, & |\eta| > 1 \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

となる。これは Dual の積分方程式³⁾で

$$F(\rho) = \left(\frac{2\rho}{\pi} \right)^{1/2} \left[J_0(\rho) \int_0^1 y^{1/2} (1-y^2)^{1/2} g(y) dy + \rho \int_0^1 u^{1/2} (1-u^2)^{1/2} du \int_0^1 g(yu) y^{5/2} J_1(\rho y) dy \right] \dots (13)$$

であるから計算の結果

$$N(1-\nu) \lambda^2 A = \left(a_0 - \frac{a_1}{2} \right) J_1(b\lambda) + a_1 (b\lambda)^{-1} J_2(b\lambda) \dots (14)$$

したがって $x=0$ に沿う $M_x^{(2)}$ の分布は

$$\begin{aligned} M_x^{(2)}|_{x=0} &= -N(1-\nu) \int_0^\infty A \lambda^2 \cos(\lambda y) d\lambda \\ &= \left(a_0 - \frac{a_1}{2} \right) \int_0^\infty J_1(b\lambda) \cos(\lambda y) d\lambda \\ &\quad + a_1 \int_0^\infty (b\lambda)^{-1} J_2(b\lambda) \cos(\lambda y) d\lambda \dots (15) \end{aligned}$$

上式は Weber Schafheitlin の積分公式⁴⁾により次のようになる。

$$M_x^{(2)}|_{x=0} = \begin{cases} a_0 - a_1 \frac{y^2}{b^2}, & |y| \leq b \\ \left(a_0 - \frac{a_1}{2} \right) \left(\frac{-y}{\sqrt{y^2 - b^2}} + 1 \right) - \frac{a_1 (\sqrt{y^2 - b^2} - y)^2}{2b^2} & |y| \geq b \end{cases} \dots (16)$$

ところが $x=0$ における M_x の分布は降伏後も連続であると仮定すれば上式中 $y = \pm b$ で不連続で無限大となる項はその係数が 0 となるべきである。ゆえに

$$a_0 = \frac{a_1}{2}, \quad \therefore a_1 = 2a_0 = 2(M_0 - M_p) \dots (17)$$

したがって

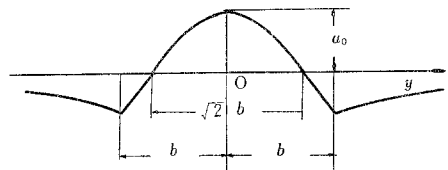
$$M_x^{(2)}|_{x=0} = \begin{cases} a_0 \left(1 - 2 \frac{y^2}{b^2} \right) & |y| \leq b \\ -a_0 \frac{(\sqrt{y^2 - b^2} - y)^2}{b^2} & |y| \geq b \end{cases} \dots (18)$$

合成曲げモーメントは

$$M_x|_{x=0} = \begin{cases} M_p & |y| \leq b \\ M_x^{(1)} - (M_0 - M_p) \times \frac{(\sqrt{y^2 - b^2} - y)^2}{b^2} & |y| \geq b \end{cases} \dots (19)$$

このことから, 最大主曲げモーメントの近くでその分布が放物線とみなせるとき線状の降伏ヒンジが平板内に

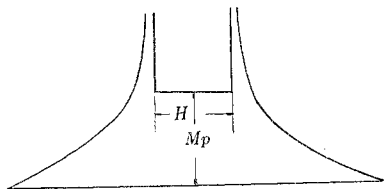
図-3 $x=0$ における $M_x^{(2)}$ の形



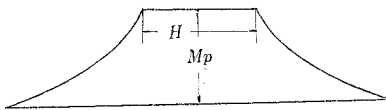
生ずれば次のことがいえる。すなわち弾性計算による最大主曲げモーメントが降伏モーメントを超過する巾 h が $\sqrt{2}b$ のとき、長さ $2b$ の降伏ヒンジが生ずればヒンジ線上の主曲げモーメントの分布は連続となり安定する。ヒンジ線上の曲げモーメントの分布が不連続の場合もふくめて総合するに H を降伏ヒンジ長とすれば $h = \sqrt{2}b$ で

$H < 2b$ の場合 これは降伏ヒンジが所定の $2b$ に達しない場合で、 $a_0 - a_1/2 > 0$ となり、 M_x の分布は 図-4 (a) のようにヒンジ両端に正の無限大の曲げモーメントが生ずる。

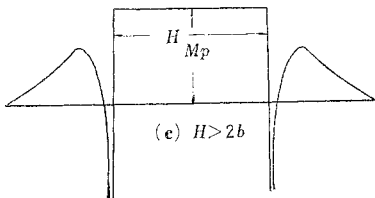
図-4 降伏ヒンジ長 H と h の関係、および $x=0$ における M_x の分布 ($h = \sqrt{2}b$)



(a) $H < 2b$



(b) $H = 2b$



(c) $H > 2b$

$H = 2b$ の場合 これはすでに述べたとおりヒンジ線上の M_x の分布は連続となり安定状態である。

$H > 2b$ の場合 これは降伏ヒンジが所定の $2b$ より長く発達する場合で $a_0 - a_1/2 < 0$ となり、 M_x の分布は 図-4 (c) のようにヒンジ両端で負の無限大の曲げモーメントが生ずる。換言すればヒンジの長さが $\sqrt{2}h$ になるまではヒンジ両端の応力集中もヒンジ発生に協力してヒンジは遅滞することなく $\sqrt{2}h$ の長さとなり、次にその長さをさらに越えようとするときはヒンジ両端の応力集中が今度は逆向きとなりヒンジの成長をはばむこととなる。

5. 初期降伏ヒンジによる付加曲げモーメント

初期降伏ヒンジによる付加曲げモーメントは $w^{(2)}$ か

ら計算されるが、 $x+yi=z$ とおけば次のように表わされる。

$$M_x^{(2)} = -N \left(\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial y^2} \right) = -N(1-\nu) \int_0^\infty A \lambda^2 e^{-x\lambda} \cos \lambda y d\lambda$$

$$\therefore M_x^{(2)} = -R \left[2a_0 \int_0^\infty (b\lambda)^{-1} J_2(b\lambda) e^{-\lambda z} dz \right] \dots\dots\dots(16)$$

$$M_y^{(2)} = -M_x^{(2)}, \dots\dots\dots(17)$$

$$M_{xy}^{(2)} = -N(1-\nu) \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x \partial y} = -N(1-\nu) \int_0^\infty A \lambda^2 e^{-\lambda x} \sin \lambda y d\lambda$$

$$\therefore M_{xy}^{(2)} = I \left[2a_0 \int_0^\infty (b\lambda)^{-1} J_2(b\lambda) e^{-\lambda z} dz \right] \dots\dots(18)$$

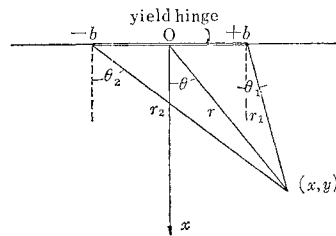
ただし、 $R[]$ 、 $I[]$ は $[]$ 内の実数部および虚数部を表わす。

ところが Hankel Lipschitz の積分公式³⁾により

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda} J_2(b\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda = \frac{(\sqrt{z^2 + b^2} - z)^2}{2b^2} \dots\dots\dots(19)$$

の関係があるから 図-5 のような座標をとれば

図-5



$$M_x^{(2)} = -2a_0 \left[\frac{1}{2} + \frac{r^2}{b^2} \cos 2\theta - \frac{r}{b^2} \sqrt{r_1 r_2} \cos \left\{ \theta + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] \dots\dots(20)$$

$$M_y^{(2)} = -M_x^{(2)} \dots\dots\dots(21)$$

$$M_{xy}^{(2)} = -2a_0 \left[\frac{r^2}{b^2} \sin 2\theta - \frac{r}{b^2} \sqrt{r_1 r_2} \sin \left\{ \theta + \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] \dots\dots(22)$$

上式中 a_0 は $M_0 - M_p$ で弾性計算による最主曲げモーメントの降伏モーメント超過量である。

6. 数値計算例

長方形の細長い矩形板は等分布の荷重に対して、中心部に長辺に平行な降伏のおこることが Bach などの本⁶⁾に見えている。ここでは辺比 $c/d=4$ の四辺単純支持の矩形板が sinusoidal load : $q \cos \pi x/2d \cdot \cos \pi y/2c$ を受けた場合、中央に降伏ヒンジが $0.5c$ に渡って y 軸上に生じた場合を考える。この場合降伏ヒンジの大きさが短辺と同じ大きさになるが周辺への影響は十分無視できることが数値的にわかる。(3)の方程式から

$$w^{(1)} = \frac{q \cos \frac{\pi x}{2d} \cos \frac{\pi y}{2c}}{N \left\{ \left(\frac{\pi}{2d} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2c} \right)^2 \right\}^2}$$

したがって

$$M_x^{(1)} = \frac{4qd^2}{\pi^2} \frac{1+\nu}{\left(1+\frac{d^2}{c^2}\right)^2} \cos \frac{\pi x}{2d} \cos \frac{\pi y}{2c}$$

$$M_y^{(2)} = \frac{4qd^2}{\pi^2} \frac{\nu+\frac{d^2}{c^2}}{\left(1+\frac{d^2}{c^2}\right)^2} \cos \frac{\pi x}{2d} \cdot \cos \frac{\pi y}{2c}$$

$$M_{xy}^{(1)} = \frac{4qd^2}{\pi^2} \frac{(1-\nu)}{\left(1+\frac{d^2}{c^2}\right)^2} \frac{d}{c} \sin \frac{\pi x}{2c} \cdot \sin \frac{\pi y}{2c}$$

ポアソン比 ν を 0.3 とすれば $M_x^{(1)}$ の値は表-1 のようである。題意により降伏ヒンジの長さは $b=0.25c$ であるから降伏モーメント超過巾 h は

$$h = \sqrt{2}b = 0.1768 (2c)$$

ゆえに

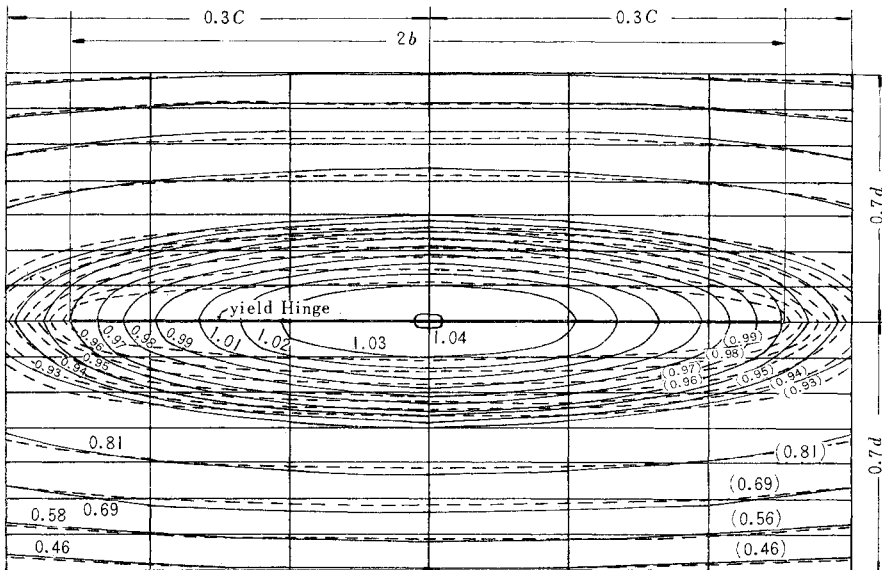
$$a_0 = M_0 - M_p = M_x^{(1)} \Big|_{\substack{y=0 \\ \nu=0.1768c}} - M_x^{(1)} \Big|_{\substack{x=0 \\ \nu=0.1768c}}$$

$$\therefore a_0 = 0.03631 \cdot \left(\frac{4qd^2}{\pi^2} \right)$$

となる。この値を公式 (20), (21), (22) に代入すれば降伏ヒンジが $0.5c$ だけ生じたときの付加曲げモーメントが計算できる。このときの荷重強度は

$$M_p = 0.8661 \cdot \frac{4qd^2}{\pi^2}$$

図-6 M_x 等強線図, 実線は降伏ヒンジのない場合 (降伏モーメント $M_p = 3.464 \frac{qd^2}{\pi^2}$ を 1 とする), 点線は降伏ヒンジのある場合



から求められる。また付加曲げモーメントの境界における値は $x=\pm d, y=0$ のところで

$$M_x^{(2)} = 0.00632 \cdot \frac{4qd^2}{\pi^2}$$

という最大値を示し、一方この場所に近い $M_x^{(1)}$ の値は $x=\pm 0.9d, y=0$ で

$$M_x^{(1)} = 0.1412 \cdot \frac{4qd^2}{\pi^2}$$

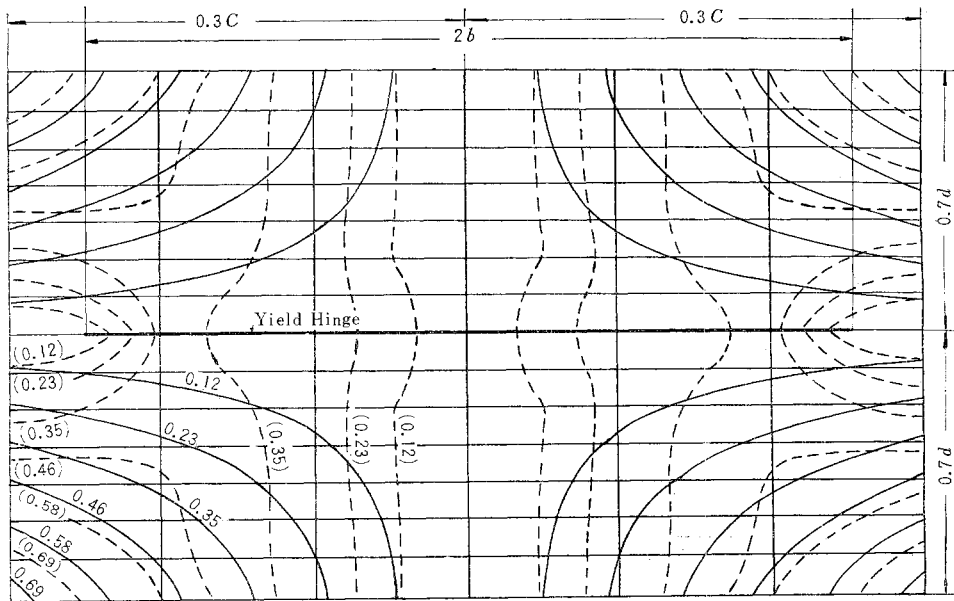
なる値である。両者をくらべれば $M_x^{(2)}$ の方が $M_x^{(1)}$ の 5% 強に過ぎない。また M_x の最大値に対しては $M_x^{(2)}$ の境界における最大値は 0.1% 以下である。したがってこの程度の境界における M_x の剰余は無視できるので、境界条件 $M_x=0$ が満足されているとみなして差し支えない。たわみの影響はこれよりさらに小さなものである。

次に

$$M_x = M_x^{(1)} + M_x^{(2)}, M_{xy} = M_{xy}^{(1)} + M_{xy}^{(2)}$$

を計算して降伏ヒンジが生じないとときと生じたときの曲げモーメントの分布を比較したものは図-6, 7 に示されている。図中実線は降伏ヒンジが生じない弾性挙動のみの場合における曲げモーメントの等強度線図を点線は降伏ヒンジが長さ $0.5c$ に渡って線分状に生じたときの状態を示している。単位は降伏モーメント値を 1 としている。なお図は $|y| < 0.3d, |x| < 0.7d$ でかこまれた中央部分を示す。 M_x は降伏ヒンジが生ずるとヒンジ周辺において y 軸方向に尖鋭的に増大し x 軸方向では値が小さくなるがヒンジ近くではヒンジに平行に降伏モーメントに近い値が生ずるのでヒンジは線ではなく、一つの巾を持った帯状に発生するように思われる。 M_{xy} は降伏ヒンジの発生する以前は x, y 軸を漸近線とする双曲線状

図一7 M_{xy} 等強線図, 実線は降伏ヒンジのない場合(降伏モーメント $M_p = 3.464 \frac{qd^2}{\pi^2} = 1$ とする)点線は降伏ヒンジのある場合



になっているがヒンジが発生すれば $x=0$ 点にもねじれモーメントが生じて y 軸と直交するようになる。しかし絶対値は小さい。

7. 結 語

以上若干の仮定を設け初期降伏ヒンジが線分状に生じた場合、ヒンジの成長はどうなるか。またどのような応力変化がその発生前後にみられるかを検討したが

(1) 荷重強度が増加して最大主曲げモーメントが M_p を α_0 だけ超過し、その超過した曲げモーメントが放物分布をなして $\sqrt{2}b$ の巾になったとき降伏ヒンジの長さが $2b$ でなければヒンジ線上の曲げモーメント分布は連続した形をとらずヒンジ両端に無限大の値を生ずることを解析的に証明した。

(2) 数値計算によれば降伏ヒンジは幾何学的直線ではなくある巾を持つことがわかった。

(3) 初期降伏ヒンジの場合はヒンジ発生の前後を通じて曲げモーメントの分布に、耐荷力に変動を与えるよ

うな大きな変化はないように思われる。この場合、初期降伏ヒンジとは周辺に影響を与えない程度の長さのものを初期降伏ヒンジということにしたい。

最後に本研究は昭和 35 年度文部省科学研究の一部であり、本論文を書くにあたって土木工学科学生 栗野 弘君 および土木工学科 志村政雄氏の援助をうけた。ここに感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 坪井善勝：平面構造論，238 ページ
- 2) Prager, W. and Hodge, P.G. : Theory of Perfect Plastic Solids, p. 36.
- 3) Sneddon, I.N. : Fourier Transforms, p. 65.
- 4) Watson, G.N. : A Treatise on the Theory of Bessel Functions, p. 405.
- 5) Watson, G.N. : A Treatise on the Theory of Bessel Functions, p. 384.
- 6) Bach, C. und Baumann, R. : Elastizität und Festigkeit, S. 625.

(原稿受付：1961.5.24)

ON BENDING MOMENT IN THE VICINITY OF INITIAL YIELD HINGE IN THIN PLATE

By Dr. Eng., Sumio Nomachi, C.E. Member

Synopsis

Under the yield condition that the maximum principal moment cannot be excess over the yield moment M_p at each point of the plate, i.e.,

$$\left| \frac{M_x + M_y}{2} \pm \frac{\sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_{xy}^2}}{2} \right| \leq M_p \dots (1)$$

the distributions of bending moments in the vicinity of the initial yield hinge which may occur in small straight line at the center of the rectangular plate are considered.

The total deflection of the plate w is taken in the form

$$w = w^{(1)} + w^{(2)} \dots (2)$$

in which $w^{(1)}$ denotes the deflection of the plate without yield hinge in it subjected by the prescribed load, and $w^{(2)}$ denotes the deflection of the plate caused only by the initial yield hinge. It is also assumed that the influence of $w^{(2)}$ on the boundary of the plate is so small that the boundary conditions are not disturbed, because the variation of $w^{(2)}$ promptly decreases according to the increasing distance from the yield hinge. The bending moment in x direction and the shearing force in the same direction are therefore written as

$$M_x = M_x^{(1)} + M_x^{(2)}, S_x = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} \dots (3)$$

The equations of equilibrium of forces are ex-

pressed by

$$n \Delta^2 w^{(1)} = q_{xy}, \Delta^2 w^{(2)} = 0 \dots (4)$$

where $w^{(1)}$ is chosen as a symmetrical form with respect to two center lines $x=0$ and $y=0$.

Let the principal moment along $y=0$, that is M_x , takes a maximum value at $x=0$, and let the initial yield hinge occur with the length $2b$ as shown in Fig. 1. Then S_x should vanish along $y=0$:

$$S_x = S_x^{(1)} = 0, \therefore \frac{\partial^3 w^{(2)}}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w^{(2)}}{\partial x \partial y^2} = 0 \dots (5)$$

and M_x cannot be excess over M_p along the yield hinge:

$$M_x^{(1)} + M_x^{(2)} = 0, (x=0, |y| \leq b) \dots (6)$$

in which the distribution of M_x along $y=0$ may usually be drawn with a continuous smooth curve, so it can be substituted by a parabolic shape in the interval of $2b$, namely

$$M_x^{(1)} = M_0 - a_0(y/b)^2, |y| \leq b \dots (7)$$

Hence, the equation (6) yields

$$-N \left(\frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w^{(2)}}{\partial y^2} \right)_{x=0} = M_p - M_0 + a_0(y/b)^2, |y| \leq b \dots (8)$$

Next, the slope in x direction of the plate should be continuous excluding along the yield hinge, so by symmetrical deflection

$$\left(\frac{\partial w^{(2)}}{\partial x} \right)_{x=0} = 0, |y| \geq b \dots (9)$$

Since the solution of $w^{(1)}$ can be obtained in usual way, it is left here untreated, and the analysis of $w^{(2)}$ will first be proceeded.

The equation (4) and the condition (5) yield

$$w^{(2)} = \int_0^\infty A e^{-\lambda x} \cos \lambda y dy$$

in which the unknown value A is found to satisfy the conditions (8) and (9) as follows

$$N \int_0^\infty A (1-\nu) \lambda^2 \cos \lambda y d\lambda = M_0 - M_p - a_0(y/b)^2, |y| \leq b$$

$$\int_0^\infty A \lambda \cos \lambda y d\lambda = 0, |y| \geq b$$

The above equation is a Dual's integral equa-

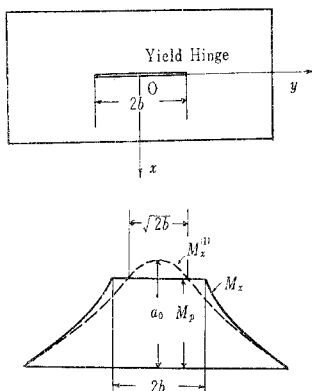


Fig. 1

tion, from which

$$N(1-\nu)\lambda^2 A = \left(M_0 - M_p - \frac{a_0}{2}\right) J_1(b\lambda) + \frac{a_0}{2} (b\lambda)^{-1} J_2(b\lambda)$$

Hence $M_x^{(2)}$ is written, when $y=0$, in the form $M_x^{(2)}|_{x=0}$

$$= \begin{cases} \left(M_0 - M_p - \frac{a_0}{2} \frac{y^2}{b^2}\right) & |y| \leq b \\ \left(M_0 - M_p - \frac{a_0}{2}\right) \left(1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 - b^2}}\right) - \frac{a_0(\sqrt{y^2 - b^2} - y)^2}{2b^2} & |y| \geq b \end{cases}$$

in the second equation of which becomes infinite when $M_0 - M_p \neq \frac{a_0}{2}$, and is however continuous at that point when $M_0 - M_p = \frac{a_0}{2}$.

Considering that the distributions of the bending moments must be continuous over the whole area of the plate even if there occur plastic spots in it, it can be concluded that $M_0 - M_p = \frac{a_0}{2}$. In other words, the bending state of the plate with initial yield hinge in it becomes stable so long as the length of the initial yield hinge is $\sqrt{2}$ time longer than that of the distributing width of M_x along $y=0$ which is excess over the yield moment. If not so, the distribution of the bending moment along yield hinge is discontinuous at both ends of the hinge and tends to infinite promptly at the same points.