

緩和曲線の合理的新形状について

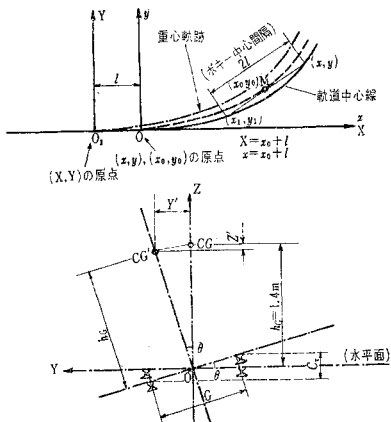
正 員 多 谷 虎 男*

1. 要 旨

従来、緩和曲線の形状についての理論では、車両運動をその重心運動で置き換え、かつこの質点が軌道中心線上を軌道面に密着しつつ走行することを暗に仮定していた。しかし実際には車両重心は平面的にはボギー中心を結んだ弦の midpoint の画く軌道線上を運動し、かつ立面的にはカントの存在のために、さらに軌道中心線よりもかなり曲線内側に偏った曲線上を走行する。従って軌道中心線と車両重心の運動軌跡とは異なるものとして取扱うべきであり、緩和曲線の形状の探究は車両重心の運動が円滑となるような軌道中心線の形状を求めることでなければならぬ。しかしながら他方、一般に曲線半径 R はきわめて大きく、仮に車両重心がわれわれの想定した軌道中心線より $10\sim 20\text{ cm}$ 程度偏った曲線上を走行しても、その曲率半径と元の曲率半径 R との相違は、 R に比してきわめて小さいように考えられ、従ってこのために生ずる遠心力の変動はほとんど問題とするに足りないのではないかという疑問が生じる。しかし十分に考察検討すれば決してそうではない。

本稿では上述のような主旨にもとづいて、まず重心軌跡緩和曲線（重心の運動軌跡を円滑ならしめる軌道中心の緩和曲線）の一般式を誘導し、これをカントが直線てい減の場合、半波長正弦曲線てい減の場合、一波長正弦曲線てい減の場合、などに適用してこれらの諸種の場合に対応する重心軌跡緩和曲線形を求め、さらに変化平均

図-1 車両重心軌跡と重心の偏倚



速度の場合におけるカント直線てい減方式および円滑てい減方式の重心軌跡緩和曲線形を求めた。次にさらに進んでカント連続てい減の場合の重心軌跡緩和曲線を、直線てい減、円滑てい減の両方式についてかつ定速度および変速度の両方の場合について、上述の単一重心軌跡緩和曲線の拡張組合せとしてとして誘導した。なおまたこれらの緩和曲線に対するカントのつけ方として従来のわが国の慣行に対して合理的改革案を提案した。

2. 重心軌跡緩和曲線の一般式

今、 (X, Y) = 車両重心の座標

(x_0, y_0) = 車両のボギー中心を結ぶ弦の midpoint M の座標

(x, y) = 車両の前部台車のボギー中心の座標

$O = (x, y)$ および (x_0, y_0) の原点

$O_1 = (X, Y)$ の原点

とすれば、求めんとする軌道中心の曲線形は、車両重心の運動が最も滑らかなように (X, Y) の曲線形を定めたとき、これに応じて定まる (x, y) の軌跡である。

まず (x, y) と (x_0, y_0) との関係は、 (x, y) 曲線の一定長の弦（車両ボギー中心間距離 $2l$ の長さの弦）の midpoint M の座標が (x_0, y_0) であるから、

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{x + (x - 2l)}{2} = x - l \\ y_0 &= \frac{(y)_x + (y)_{x-2l}}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

次に重心の座標 (X, Y) と M の座標 (x_0, y_0) との関係は、

$$\left. \begin{aligned} Y &= y_0 + Y' \\ X &= x_0 + l \end{aligned} \right\}$$

しかるに 図-1 において

$$\left. \begin{aligned} Y' &= h_G \cdot \sin \theta \doteq h_G \cdot \frac{C_{x_0}}{G} = K_1 C_{x_0} \\ Z' &= h_G (1 - \cos \theta) \doteq h_G \frac{\theta^2}{2} \doteq 0 \end{aligned} \right\}$$

ただし

$$\left\{ \begin{aligned} h_G &= \text{車両の重心の高さ, } G = \text{軌間} \\ K_1 &= \frac{h_G}{G} \\ C_{x_0} &= (C_x \text{ と } C_{x-2l} \text{ の平均値}) = \frac{1}{2}(C_x + C_{x-2l}) \text{ とする} \end{aligned} \right.$$

$$\therefore Y = K_1 C_{x_0} + y_0 \dots\dots\dots(2)$$

[注：この場合、車体バネの存在による重心座標の変位は考える必要がない。何となれば、バネの存在による車体の変位は、

$$\left. \begin{aligned} y &= C_y W_B \left(\frac{v^2}{gR} - \frac{C}{G} \right) = C_y W_B \frac{C_d}{G} \\ \phi &= C_\phi W_B \left(\frac{v^2}{gR} - \frac{C}{G} \right) = C_\phi W_B \frac{C_d}{G} \end{aligned} \right\}$$

* 工学博士、国鉄鉄道技術研究所

で表わされる。ここに

C_y, C_ϕ はバネによる係数, C は実カント量, C_x はカント不足量, W_B は車体重量とする。

しかるに緩和曲線の形状の算定では, 各種列車の平均速度に対する均衡カント量を考え, この平均速度と均衡カント量とについての緩和曲線形を算定するのであるから, 緩和曲線形状の算定に関する限り, カント不足量 $C_x=0$ としてよいからである。]

(1) 式および (2) 式より

$$Y = K_1 C_{x0} + \frac{1}{2} \{ (\dot{y})_x + (\dot{y})_{x-2l} \}$$

$$= K_1 \frac{1}{2} \{ C_x + C_{x-2l} \} + \frac{1}{2} \{ (\dot{y})_x + (\dot{y})_{x-2l} \}$$

上式を X について 2 回微分すれば,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dx} = \frac{1}{2} \{ K_1 (\dot{C}_x + \dot{C}_{x-2l}) + (\dot{y})_x + (\dot{y})_{x-2l} \} \dots (3)$$

$$\frac{d^2 Y}{dX^2} = \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{1}{2} \{ K_1 (\ddot{C}_x + \ddot{C}_{x-2l}) + (\ddot{y})_x + (\ddot{y})_{x-2l} \} \dots (4)$$

したがって重心軌跡の曲率半径を ρ とすれば

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \{ K_1 (\dot{C}_x + \dot{C}_{x-2l}) + (\dot{y})_x + (\dot{y})_{x-2l} \}$$

$$\therefore \frac{127}{GV^2} \left(\frac{C_x + C_{x-2l}}{2} \right) = \frac{1}{2} \{ K_1 (\ddot{C}_x + \ddot{C}_{x-2l}) + (\ddot{y})_x + (\ddot{y})_{x-2l} \}$$

上式が常に成立するためには,

$$\frac{127}{GV^2} \cdot C_x = K_1 \ddot{C}_x + (\ddot{y})_x$$

でなければならぬ。ゆえに次式が得られる。

$$\therefore (\ddot{y})_x = \frac{127}{GV^2} C_x - K_1 \ddot{C}_x \dots (5)$$

3. カント直線てい減方式の重心軌跡緩和曲線

カント C_x が直線てい減である場合には C_0 を緩和曲線終端におけるカントとすれば,

$$C_x = C_0 \frac{x}{L}, \text{ ただし, } x < 0 \text{ では } C_x = 0 \left. \vphantom{C_x} \right\}$$

$$x > L \text{ では } C_x = C_0$$

$$\dot{C}_x = \frac{C_0}{L}, \text{ ただし, } x < 0 \text{ では } \dot{C}_x = 0 \left. \vphantom{\dot{C}_x} \right\}$$

$$x > L \text{ では } \dot{C}_x = 0$$

$$\ddot{C}_x = 0, \text{ ただし, } x = 0 \text{ において } \ddot{C}_x = \infty \left. \vphantom{\ddot{C}_x} \right\}$$

$$x = L \text{ において } \ddot{C}_x = -\infty$$

(5) 式を積分して上の値を代入すれば,

$$(\dot{y})_x = K_2 \frac{C_0}{L} \cdot \frac{x^2}{2} - K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right) + \alpha$$

$$= \frac{x^3}{2RL} - K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right) + \alpha \quad (0 \leq x \leq L)$$

ただし, $\alpha =$ 積分常数
 $K_2 = \frac{127}{GV^2}$ } とする。

積分常数 α の値は (3) 式

$$\frac{dY}{dX} = \frac{1}{2} \{ K_1 (\dot{C}_x + \dot{C}_{x-2l}) + (\dot{y})_x + (\dot{y})_{x-2l} \}$$

において, $x=0$ と置いたとき,

$$\frac{dY}{dX} = 0, \text{ および } (\dot{y})_{x-2l} = 0 \text{ なるべき条件から定め}$$

られる。

$$\text{しかるに } x \rightarrow 0 \text{ のときは, } (\dot{C}_x) = \frac{C_0}{L}, (\dot{C}_{x-2l}) = 0$$

ゆえに (3) 式において $x \rightarrow 0$ なるときは,

$$0 = \frac{1}{2} \{ K_1 \times \left(\frac{C_0}{L} \right) + (\dot{y})_x \}$$

$$\text{すなわち, } (\dot{y})_{x \rightarrow 0} = -K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right), \text{ ゆえに } \alpha = 0$$

$$\text{したがって, } (\dot{y})_x = \frac{x^3}{2RL} - K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right) \dots (6)$$

上式をさらにもう 1 回積分すれば,

$$y = \frac{x^4}{6RL} - K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right) x + \alpha'$$

ただし, α' は積分常数とする。

積分常数 α' の値は $x=0$ において, $y=0$ なる条件より, $\alpha' = 0$

$$\therefore y = \frac{x^4}{6RL} - K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right) x \dots (7)$$

ここに, $K_1 = \frac{h_G}{G}$, $h_G =$ 車両重心の高さ, $G =$ 軌間, $C_0 =$

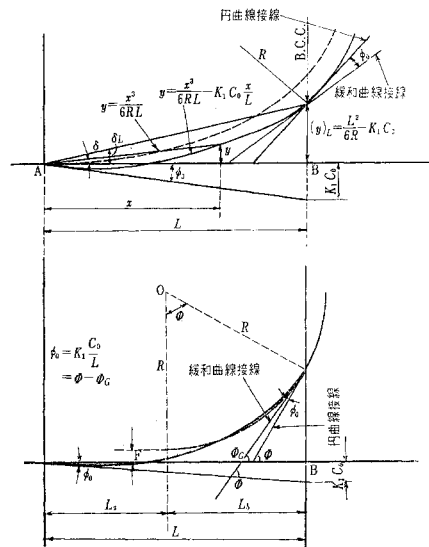
円曲線におけるカント, $L =$ 緩和曲線長, $R =$ 円曲線半径
 車両重心の高さ h_G は通常, $h_G \approx 1.4$ m であるから,
 $G = 1.067$ m の場合には, $K_1 \approx 1.4$, $G = 1.435$ m の場合には $K_1 \approx 1.0$ としてよい。(7) 式は第 2 項の値,
 $-K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right) x$ だけ 3 次放物線の方程式と異なっている。

また, 螺旋角 ϕ は 3 次放物線の場合よりも常に,
 $K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right)$ だけ小さく, 緩和曲線の始点および終点での接線方向は直線および円曲線の方角に対してそれぞれ

$$\phi_0 = -K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right)$$

だけ屈折している。これは一見, 不都合のようであるが, 軌道がこのようなになってこそ車両重心は円滑な曲線上を運動するのである。図-2 において

図-2 重心軌跡直線てい減緩和曲線



$$\left. \begin{aligned} L_b &= R \sin \phi = R \phi = R \cdot \frac{L^2}{2RL} = \frac{L}{2} \\ \therefore L_a &= L - L_b = \frac{L}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

また、終点における縦距 $(y)_L = \frac{L^2}{6R} - K_1 C_0 \dots\dots(9)$

$$\left. \begin{aligned} \text{シフト } F &= \left(\frac{L^2}{6R} - K_1 C_0 \right) - R(1 - \cos \phi) = \left(\frac{L^2}{6R} - K_1 C_0 \right) \\ &\quad - R \left(\frac{\phi^2}{2} \right) = \frac{L^2}{24R} - K_1 C_0 \dots\dots\dots(10) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{なお, } \tan \varphi = (y)_x &= \frac{x^2}{2RL} - K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right) \\ \tan \phi_G &= \tan \phi = \frac{L}{2R} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \delta &= \frac{y}{x} = \frac{x^2}{6RL} - K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right) \\ \tan \delta_L &= \frac{L}{6R} - K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

4. 半波長正弦曲線てい減方式の重心軌跡緩和曲線

カントが半波長正弦曲線てい減の場合には、カント C_x は次式で表わされる。

$$C_x = \frac{C_0}{2} \left(1 - \cos \pi \frac{x}{L} \right) \dots\dots\dots(13)$$

ただし、 C_0 = 円曲線におけるカント
 L = 緩和曲線長

したがってこの場合には、

$$(\dot{C}_x) = \frac{\pi C_0}{2L} \sin \left(\pi \frac{x}{L} \right), \quad (\ddot{C}_x) = \frac{\pi^2 C_0}{2L^2} \cos \left(\pi \frac{x}{L} \right)$$

上式と (5) 式とから

$$\begin{aligned} (y)_x &= \frac{127 C_0}{6GV^2} \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \cos \pi \frac{x}{L} \right) - K_1 \frac{\pi^2 C_0}{2L^2} \cos \left(\pi \frac{x}{L} \right) \\ &= \frac{1}{2R} \left(1 - \cos \pi \frac{x}{L} \right) - K_1 \frac{\pi^2 C_0}{2L^2} \cos \left(\pi \frac{x}{L} \right) \dots\dots(14) \end{aligned}$$

上式を積分すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} (y)_x &= \frac{x}{2R} - \frac{L}{2\pi R} \sin \left(\pi \frac{x}{L} \right) - K_1 \frac{\pi C_0}{2L} \sin \left(\pi \frac{x}{L} \right) \\ &\dots\dots\dots(15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (y)_x &= \frac{x^2}{4R} + \frac{L^2}{2\pi^2 R} \left(\cos \frac{\pi x}{L} - 1 \right) - K_1 \frac{C_0}{2} \left(1 - \cos \pi \frac{x}{L} \right) \\ &= \frac{x^2}{4R} - \left(1 - \cos \pi \frac{x}{L} \right) \left(\frac{L^2}{2\pi^2 R} + K_1 \frac{C_0}{2} \right) \dots\dots(16) \end{aligned}$$

この曲線のシフト量 F は 3. の場合と同様にして、

$$\begin{aligned} F &= \frac{L^2}{4R} - \left(\frac{L^2}{\pi^2 R} + K_1 C_0 \right) - R(1 - \cos \phi) \\ &= \frac{L^2}{R} \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{\pi^2} \right) - K_1 C_0 \dots\dots\dots(17) \end{aligned}$$

ただし、 ϕ = 緩和曲線終点における螺旋角、とする。

なお、この曲線でも 3. と同様にして次の結果が得られる。

$$\left. \begin{aligned} L_b &= R \phi = R \left(\frac{L}{2R} \right) = \frac{L}{2} = L_a \\ (y)_L &= \frac{L^2}{4R} - \left(\frac{L^2}{\pi^2 R} + K_1 C_0 \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi = (y)_x &= \frac{x}{2R} - \sin \left(\pi \frac{x}{L} \right) \left(\frac{L}{2\pi R} + K_1 \frac{\pi C_0}{2L} \right) \\ \tan \phi_G &= \tan \phi = \frac{L}{2R} \\ \tan \delta &= \frac{x}{4R} - \frac{1}{2x} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{L} \right) \left(\frac{L^2}{\pi^2 R} + K_1 C_0 \right) \\ \tan \delta_L &= \frac{L}{4R} - \left(\frac{L}{\pi^2 R} + K_1 \frac{C_0}{L} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

5. 一波長正弦曲線てい減方式の重心軌跡緩和曲線

カントが一波長正弦曲線てい減の場合には、カント C_x は次式によって表わされる。

$$C_x = C_0 \left\{ \frac{x}{L} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \right\} \dots\dots\dots(19)$$

ただし、 C_0 = 円曲線におけるカント、 L = 緩和曲線長
したがって、この場合には、

$$\begin{aligned} (\dot{C}_x) &= \frac{C_0}{L} \left\{ 1 - \cos \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \right\} \\ (\ddot{C}_x) &= \frac{2\pi C_0}{L^2} \sin \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \end{aligned}$$

上式と (5) 式とから

$$\begin{aligned} (y)_x &= \frac{1}{R} \left\{ \frac{x}{L} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \right\} \\ &\quad - K_1 \frac{2\pi C_0}{L^2} \sin \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$

上式を積分すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} (y)_x &= \frac{L}{2R} \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 + \frac{1}{2\pi^2} \left\{ \cos \left(2\pi \frac{x}{L} \right) - 1 \right\} \right] \\ &\quad - K_1 \frac{C_0}{L} \left\{ 1 - \cos \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \right\} = \frac{x^2}{2RL} \\ &\quad - \left\{ 1 - \cos \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \right\} \left(\frac{L}{4\pi^2 R} + K_1 \frac{C_0}{L} \right) \dots\dots(21) \\ (y)_x &= \frac{L^2}{R} \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{x}{L} \right)^3 - \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{x}{L} \right) + \frac{1}{8\pi^3} \sin \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \right\} \\ &\quad - K_1 C_0 \left\{ \frac{x}{L} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \right\} = \frac{x^3}{6RL} \\ &\quad + \left(\frac{L^2}{4\pi^2 R} + K_1 C_0 \right) \left\{ \frac{1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \\ &\dots\dots\dots(22) \end{aligned}$$

この曲線のシフト量 F およびその他主要諸量は次のようになる。

$$\begin{aligned} F &= \frac{L^2}{6R} - \left(\frac{L^2}{4\pi^2 R} + K_1 C_0 \right) - R(1 - \cos \phi) \\ &= \frac{L^2}{4R} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right) - K_1 C_0 \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} L_b &= R \phi = R \left(\frac{L}{2R} \right) = \frac{L}{2} = L_a \\ \tan \phi_G &= \tan \phi = \frac{L}{2R} \\ \tan \varphi = (y)_x &= \frac{x^2}{2RL} - \left\{ 1 - \cos \left(2\pi \frac{x}{L} \right) \right\} \left(\frac{L}{4\pi^2 R} + K_1 \frac{C_0}{L} \right) \\ (y)_L &= \frac{L^2}{6R} - \left(\frac{L^2}{4\pi^2 R} + K_1 C_0 \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \tan \delta &= \frac{x^2}{6RL} + \left(\frac{L^2}{4\pi^2 R} + K_1 C_0 \right) \frac{1}{x} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sin \left(2\pi \frac{x}{L} \right) - \left(\frac{x}{L} \right) \right\} \\ \tan \delta_L &= \frac{L}{6R} - \left(\frac{L}{4\pi^2 R} + K_1 \frac{C_0}{L} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

ただし、 $\left\{ \begin{array}{l} \phi = \text{円曲線終点の螺線角} \\ \varphi = x \text{ 点における緩和曲線の螺線角} \\ (y)_L = \text{緩和曲線終点の縦距} \\ \delta = x \text{ 点における緩和曲線の偏角} \\ \delta_L = \text{緩和曲線終点の偏角} \\ K_1 = \frac{h_G}{G} \end{array} \right.$

6. 変化速度の場合の直線てい減方式重心軌跡緩和曲線

緩和曲線の形状の考究では、各種列車の平均速度を決定し、この平均速度に対する均衡カント量から、これに対応する合理的緩和曲線形を探究するのであるが、この場合、平均速度は緩和曲線中のいずれの点でも一定であると仮定するのが普通である。しかし、曲線が停車駅の近くに存在する場合にはいずれの列車も加速または減速するので、変化平均速度に対応する緩和曲線を考えねばならない。

重心軌跡を考慮しない場合の変化平均速度に対する直線てい減緩和曲線については、すでに田中 豊博士の論文¹⁾がある。すなわち、緩和曲線始点および終点における列車速度をそれぞれ、 $v_1(\text{m/sec})$ および $v_0(\text{m/sec})$ とし、速度変化を距離に対して直線的变化とすれば、

$$v = v_1 - ax, \quad (0 \leq x \leq L) \dots\dots\dots(25)$$

ただし、 $a = \frac{v_1 - v_0}{L}$

一方また、 $\frac{C_x}{G} = \frac{v^2}{\rho g}$

$$\therefore C_x = \frac{G(v_1 - ax)^2}{\rho g}$$

$$\therefore C_0 \frac{x}{L} = \frac{G(v_1 - ax)^2}{\rho g}$$

$$\therefore \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\rho} = \frac{g C_0}{GL} \cdot \frac{x}{(v_1 - ax)^2} \dots\dots\dots(26)$$

(26) 式を積分して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{K}{a^2} \left\{ \log(1 - ax) + \frac{1}{(1 - ax)} - 1 \right\} \\ y &= \frac{-K}{a^3} \left[(2 - ax) \log(1 - ax) + 2ax \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

ただし、 $K = \frac{1}{RL} \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^2$, $\alpha = \left(1 - \frac{v_0}{v_1} \right) \frac{1}{L}$

以上の結果を重心軌跡を考慮する場合に適用すれば、

(5) 式を参照して次のようになる。

$$y = -\frac{K}{a^3} \{ (2 - ax) \log(1 - ax) + 2ax \} - K_1 C_0 \frac{x}{L} \dots\dots(28)$$

ただし、 $K_1 = \frac{h_G}{G}$

(28) 式は使用する場合に不便なので、使用に便利のように無限級数に展開すれば、次のようになる (ただし $-1 \leq ax < 1$ とする)。

$$y = Kx^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} ax + \frac{3}{20} a^2 x^2 + \frac{2}{15} a^3 x^3 + \dots \right) - K_1 C_0 \frac{x}{L} \dots\dots\dots(29)$$

また、この曲線のシフト量 F は、

$$\begin{aligned} F &= KL^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \alpha L + \frac{3}{20} \alpha^2 L^2 + \frac{2}{15} \alpha^3 L^3 + \dots \right) - K_1 C_0 \\ &\quad - R(1 - \cos \phi) \\ &\approx KL^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \alpha L + \frac{3}{20} \alpha^2 L^2 + \frac{2}{15} \alpha^3 L^3 + \dots \right) - K_1 C_0 \\ &\quad - \frac{R}{2} \left[\frac{K}{a^2} \left\{ \log(1 - \alpha L) + \frac{1}{(1 - \alpha L)} - 1 \right\} \right]^2 \\ &= KL^3 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \alpha L + \frac{3}{20} \alpha^2 L^2 + \frac{2}{15} \alpha^3 L^3 + \dots \right) - K_1 C_0 \\ &\quad - \frac{R}{2} \left[\frac{K}{a^2} \left\{ \frac{(\alpha L)^2}{2} + \frac{2}{3} (\alpha L)^3 + \frac{3}{4} (\alpha L)^4 + \dots \right\} \right]^2 \end{aligned} \dots\dots\dots(30)$$

7. 変化平均速度の場合の円滑てい減方式重心軌跡緩和曲線

カントの円滑てい減方式としては種々な方式があるが、変化平均速度を考慮する場合には、積分の都合上、Watorek, Lachmann および Rothe にしたがって、カントてい減曲線として次のような5次の代数曲線を使用することにする。すなわち、

$$C_x = C_0 \left\{ 6 \left(\frac{x}{L} \right)^5 - 15 \left(\frac{x}{L} \right)^4 + 10 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right\} \dots\dots\dots(31)$$

このてい減方式は実際問題としては、一波長正弦曲線とほとんど近似している。

6. の場合と同様にして次式が成立する。

$$C_0 \left\{ 6 \left(\frac{x}{L} \right)^5 - 15 \left(\frac{x}{L} \right)^4 + 10 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right\} = \frac{G(v_1 - ax)^2}{g \rho}$$

上式に $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ を代入して変形すれば、

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{g C_0}{G} \frac{1}{(v_1 - ax)^2} \left\{ 6 \left(\frac{x}{L} \right)^5 - 15 \left(\frac{x}{L} \right)^4 + 10 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right\}$$

上式を積分すれば、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{KL}{\beta^3} \left[\frac{3}{2} \eta^4 + 5(\beta - 2)\eta^3 + 5(\beta^2 - 6\beta + 6)\eta^2 \right. \\ &\quad \left. - 30(\beta^2 - 3\beta + 2)\eta + 30(\beta^2 - 2\beta + 1) \log |\eta| \right. \\ &\quad \left. + (10\beta^2 - 15\beta + 6) \frac{1}{\eta} + 15\beta^2 - 50\beta + \frac{65}{2} \right] \\ y &= \frac{KL}{a\beta^3} \left[\frac{3}{10} (\alpha x)^5 - \left(\frac{5}{4} \beta - 1 \right) (\alpha x)^4 + \left(\frac{5}{3} \beta^2 - 5\beta + 3 \right) \right. \\ &\quad \left. \times (\alpha x)^3 + \left(10\beta^2 - \frac{45}{2} \beta + 12 \right) (\alpha x)^2 - (40\beta^2 - 75\beta + 36) \right. \\ &\quad \left. \times (\alpha x) + \{ 30\alpha x(\beta - 1)^2 - (40\beta^2 - 75\beta + 36) \} \log(1 - \alpha x) \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(32)$$

ただし、 $\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{L} \left(1 - \frac{v_0}{v_1} \right) \\ \beta &= L a = \left(1 - \frac{v_0}{v_1} \right) \end{aligned} \right\}$

$$\left. \begin{aligned} \eta &= (1 - \alpha x) \\ K &= \frac{1}{R} \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^2 \\ R &= \text{円曲線半径} \end{aligned} \right\} \text{とする。}$$

6. の場合と同様に (32) 式を取扱いに便利なように無限級数に展開すれば、次のようになる (ただし、 $-1 \leq \alpha x < 1$ とする)。

$$y = KL^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^5 + \left(\frac{2}{3} \beta - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^6 + \left(\frac{5}{7} \beta^2 - \frac{5}{7} \beta + \frac{1}{7} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^7 + \left(\frac{5}{7} \beta^3 - \frac{45}{56} \beta^2 + \frac{3}{14} \beta \right) \left(\frac{x}{L} \right)^8 + \left(\frac{25}{36} \beta^4 - \frac{5}{6} \beta^3 + \frac{1}{4} \beta^2 \right) \left(\frac{x}{L} \right)^9 + \dots \right] \dots (33)$$

上式は重心軌跡に対する考慮をしない場合の曲線方程式であるが、上式に重心軌跡の考察を追加すれば、求むる曲線は (5) 式を参照して次のようになる。

$$y = KL^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{L} \right)^5 + \left(\frac{2}{3} \beta - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^6 + \left(\frac{5}{7} \beta^2 - \frac{5}{7} \beta + \frac{1}{7} \right) \left(\frac{x}{L} \right)^7 + \left(\frac{5}{7} \beta^3 - \frac{45}{56} \beta^2 + \frac{3}{14} \beta \right) \left(\frac{x}{L} \right)^8 + \left(\frac{25}{36} \beta^4 - \frac{5}{6} \beta^3 + \frac{1}{4} \beta^2 \right) \left(\frac{x}{L} \right)^9 + \dots \right] - K_1 C_0 \left\{ 6 \left(\frac{x}{L} \right)^5 - 15 \left(\frac{x}{L} \right)^4 + 10 \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right\} \dots (34)$$

ただし、 $K_1 = \frac{h_G}{G}$

この曲線のシフト量 F は、

$$F = \frac{K}{\alpha^2 \beta^2} \left[\frac{43}{60} \beta^5 + 6 \beta^4 - \frac{119}{2} \beta^3 + 87 \beta^2 - 36 \beta + (30 \beta^3 - 100 \beta^2 + 105 \beta - 36) \log(1 - \beta) \right] - K_1 C_0 \frac{R}{2} \left[\frac{K}{\alpha \beta^3} \left\{ \frac{3}{2} \beta^4 + 9 \beta^3 - 46 \beta^2 + 39 \beta - 6 + 30(\beta - 1)^2 \log(1 - \beta) + (10 \beta^2 - 15 \beta + 6) \frac{1}{1 - \beta} \right\} \right]^2$$

である。

8. カント連続てい減の重心軌跡緩和曲線

7. までは単一曲線の緩和曲線について述べた。本節では複合曲線、反向曲線、および小交角曲線の場合の緩和曲線について述べる。

複合曲線、反向曲線、または小交角曲線などの場合に、十分な長さの直線長または円曲線長を2つの隣接緩和曲線の間にとれない場合には、カントてい減曲線を連続させて車両動揺の発生原因となるカントてい減の屈曲点を取除くべきであることはすでに周知のとおりである。十分な長さの直線長または円曲線長としては、一たん車両動揺が発生してから次の動揺発生箇所に至るまでの間に前の動揺が減衰消滅して次の動揺と重合しないだけの長さを要するから、列車速度を $200 \text{ km/h} = 55.5 \text{ m/sec}$ 車両動揺減衰所要時間を 1.5 sec とすれば、曲線間直線長または円曲線長として最小 $55.5 \times 1.5 = 83.4 \approx 85 \text{ m}$ だけの長さが必要である。したがって直線長または

円曲線長が 85 m 以下の場合には、速度 200 km/h を予定する優等線路に対しては、カントを連続てい減とした連続緩和曲線を用いなければならない。

連続緩和曲線のそう入に最も便利な方法は角図法 (Winkelbildverfahren) である。次に角図法を用いて重心軌跡連続てい減緩和曲線そう入の方法を述べる。ただし、紙数の都合上、反向曲線間連続てい減緩和曲線のみにとどめる (複合曲線、小交角曲線の場合も同様にしてそう入することができる)。

8.1 直線連続てい減の反向曲線間重心軌跡緩和曲線

まず第1段階として重心軌跡を考慮しない場合の直線連続てい減緩和曲線をそう入する。

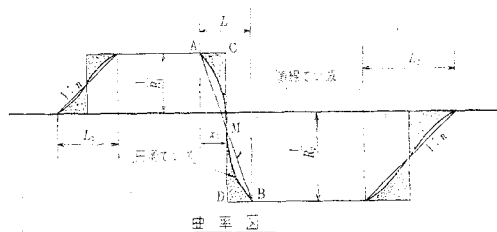
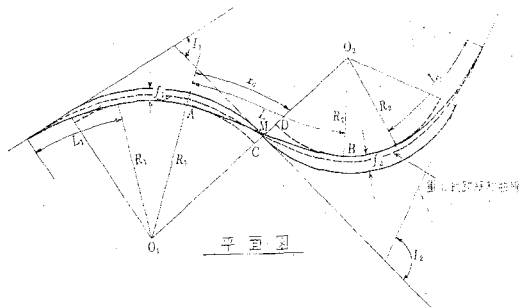
図-3 において

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{L_1^2}{24 R_1} \\ f_2 &= \frac{L_2^2}{24 R_2} \end{aligned} \right\} \dots (35)$$

反向曲線間の緩和曲線長 L および L のうち、半径 R_1 の円曲線中にとるべき長さ x は次の2つの条件から決定せられる。

- ① A, B 2点において原円曲線と緩和曲線との接線が平行なるべきこと。
- ② A および B における円曲線に対する移程はそれぞれ f_1, f_2

図-3 反向曲線間の連続てい減緩和曲線



なるべきこと。

このうち、第1条件は、

$$\int_0^L \frac{1}{\rho} dl = \int_0^{x_0} \frac{1}{R_1} dl - \int_{x_0}^L \frac{1}{R_2} dl \dots (36)$$

で表わされ、第2条件は、

$$f_1 + \int_0^L \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl - \int_0^{x_0} \int_0^l \frac{1}{R_1} dl dl - \int_{x_0}^L \left\{ \int_0^{x_0} \frac{1}{R_1} dl - \int_{x_0}^l \frac{1}{R_2} dl \right\} dl = -f_2 \dots (37)$$

で表わされる。この (37) 式は簡単にすれば、次のようになる。

$$f_1 + \int_0^L \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl - \frac{x_0}{R_1} \left(L - \frac{x_0}{2} \right) + \frac{1}{2R_2} (L - x_0)^2 = -f_2 \quad (38)$$

また、反方向曲線間のカント連続直線でい減は

$$C_x = C_1 - \frac{C_1 + C_2}{L} \cdot l \quad (39)$$

で表わされるから、これから次式が得られる。

$$\frac{V^2}{\rho} = \frac{V_1^2}{R_1} - \left(\frac{V_1^2}{R_1} + \frac{V_2^2}{R_2} \right) \frac{l}{L} \quad (40)$$

列車速度を定速度とすれば、(40) 式は、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{l}{L}$$

となる。この式を (36) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \int_0^L \left\{ \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{l}{L} \right\} dl &= \frac{x_0}{R_1} - \frac{(L - x_0)}{R_2} \\ \therefore \frac{L}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{L}{2} &= \frac{x_0}{R_1} - \frac{(L - x_0)}{R_2} \\ \therefore x_0 &= \frac{L}{2} \quad (41) \end{aligned}$$

また、(38) 式より、

$$f_1 + \frac{L^2}{2R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{L^3}{6L} - \frac{x_0}{R_1} \left(L - \frac{x_0}{2} \right) + \frac{1}{2R_2} (L - x_0)^2 = -f_2$$

上式に (35) 式および (41) 式を代入して

$$\begin{aligned} \frac{L_1^2}{24R_1} + \frac{L^2}{2R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{L^2}{6} - \frac{L}{2R_1} \left(\frac{3}{4}L \right) + \frac{1}{2R_2} \left(\frac{L^2}{4} \right) &= -\frac{L_2^2}{24R_2} \\ \therefore \left(\frac{L_1^2}{R_1} + \frac{L_2^2}{R_2} \right) &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) L^2 \\ \therefore L &= \sqrt{\frac{L_1^2 R_2 + L_2^2 R_1}{R_1 + R_2}} \quad (42) \end{aligned}$$

次に円曲線に対する移程 e は、

$$\left. \begin{aligned} l < \frac{L}{2} \text{ に対しては,} \\ e &= \frac{L_1^2}{24R_1} + \left\{ \frac{l^2}{2R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{l^3}{6L} \right\} - \frac{l^2}{2R_1} \\ &= \frac{L_1^2}{24R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{L^2}{6} \xi^3 \\ l > \frac{L}{2} \text{ に対しては,} \\ e &= \frac{L_1^2}{24R_1} + \left\{ \frac{l^2}{2R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{l^3}{6L} \right\} \\ &\quad - \frac{x_0}{R_1} \left(l - \frac{x_0}{2} \right) + \frac{1}{2R_2} (l - x_0)^2 \\ &= \frac{L_1^2}{24R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{l^3}{6L} - \frac{1}{2} (l - x_0)^2 \right\} \\ &= \frac{L_1^2}{24R_1} - \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{1}{3} \xi^3 - \xi^2 + \xi - \frac{1}{4} \right\} \quad (43) \end{aligned} \right\}$$

(43) 式は重心軌跡に考慮を払わない場合の移程である。したがって第2段階として (43) 式にさらに重心軌跡の考慮を追加すれば、その場合の移程は次のようにな

る。 $l < \frac{L}{2}$ に対しては、

$$e = \frac{L_1^2}{24R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{L^2}{6} \xi^3 - K_1 \{ C_1 - (C_1 + C_2) \xi \}$$

$l > \frac{L}{2}$ に対しては、

$$e = \frac{L_1^2}{24R_1} - \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{3} \xi^3 - \xi^2 + \xi - \frac{1}{4} \right) - K_1 \{ C_1 - (C_1 + C_2) \xi \} \quad (44)$$

ただし、 $\xi = \frac{l}{L}$ 、 $K_1 = \frac{h_G}{G}$

(44) 式は列車速度を定速度とした場合の重心軌跡緩急と曲線の移程を示す式であるが、もしも列車速度が、(25) 式で示されるような変速度であるならば、(40) 式より、

$$\begin{aligned} \frac{v^2}{\rho} &= \frac{v_1^2}{R_1} - \left(\frac{v_1^2}{R_1} + \frac{v_2^2}{R_2} \right) \frac{l}{L} \\ \therefore \frac{1}{\rho} &= \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \frac{l}{L} \right] / (1 - \alpha)^2 \quad (45) \end{aligned}$$

ただし、 $\alpha = \frac{v - v_1}{v_1} = \frac{v_2 - v_1}{v_1} \frac{l}{L}$

(45) 式と (36) 式とから、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^L \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \frac{l}{L} \right] / (1 - \alpha)^2 \cdot dl \\ = \frac{x_0}{R_1} - \frac{(L - x_0)}{R_2} \\ \text{上式を演算して簡単にすれば,} \\ - \frac{L}{v_1 - v_2} \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right) - \frac{L}{(v_1 - v_2)^2} \left(\frac{v_1^2}{R_1} + \frac{v_2^2}{R_2} \right) \log \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \\ = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x_0 - \frac{L}{R_2} \\ \therefore x_0 = \frac{\left\{ \frac{1}{R_2} - \frac{1}{v_1 - v_2} \left(\frac{v_1}{R_1} + \frac{v_2}{R_2} \right) - \frac{1}{(v_1 - v_2)^2} \left(\frac{v_1^2}{R_1} + \frac{v_2^2}{R_2} \right) \log \left(\frac{v_2}{v_1} \right) \right\} L}{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)} \quad (46) \end{aligned}$$

次に (45) 式および (37) 式から、

$$f_1 + f_2 + \int_0^L \int_0^l \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \frac{l}{L} \right] / (1 - \alpha)^2 \cdot dl \cdot dl - \frac{x_0}{R_1} \left(L - \frac{x_0}{2} \right) + \frac{1}{2R_2} (L - x_0)^2 = 0$$

上式を演算して簡単にすれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \left(\frac{L_1^2}{R_1} + \frac{L_2^2}{R_2} \right) - \frac{L^2}{\beta} \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \frac{2}{\beta} \right] \\ - \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \left(\frac{2 - \beta}{\beta} \right) \right] \frac{L^2}{\beta^2} \log(1 - \beta) \\ - \frac{x_0}{R_1} \left(L - \frac{x_0}{2} \right) + \frac{1}{2R_2} (L - x_0)^2 = 0 \end{aligned}$$

ただし、 $\beta = \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right)$

$$\therefore \frac{1}{\beta} \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \frac{2}{\beta} \right] L^2 + \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \frac{2 - \beta}{\beta} \right] \frac{1}{\beta^2} \log(1 - \beta) \cdot L^2 + \frac{x_0}{R_1} \left(L - \frac{x_0}{2} \right)$$

$$-\frac{1}{2R_2}(L-x_0)^2 = \frac{1}{24}\left(\frac{L_1^2}{R_1} + \frac{L_2^2}{R_2}\right) \dots\dots\dots(47)$$

(47) 式に (46) 式を代入すれば、 L の値を求めることができる。さらに円曲線に対する移程 e は、

$$\begin{aligned} l < x_0 : \\ e &= f_1 + \int_0^l \frac{1}{\rho} dl - \int_0^l \frac{1}{R_1} dl \\ &= f_1 + \int_0^l \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \frac{L}{L} \right] \\ &\quad \cdot (1-\alpha l)^2 \cdot dl - \frac{l^3}{2R_1} \\ &= \frac{L_1^2}{24R_1} - \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \frac{1}{\beta} (2-\beta\xi) \right] \\ &\quad \times \frac{L^2}{\beta^2} \log(1-\beta\xi) - \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \frac{2}{\beta} \right] \\ &\quad \frac{L^2}{\beta} \xi - \frac{L^2}{2R_1} \xi^2 \\ l > x_0 : \\ e &= f_1 + \int_0^l \frac{1}{\rho} dl - \int_0^{x_0} \frac{1}{R_1} dl - \int_{x_0}^l \left\{ \frac{x_0}{R_1} \right. \\ &\quad \left. \times dl - \int_{x_0}^l \frac{1}{R_2} dl \right\} dl \\ &= f_1 + \int_0^l \frac{1}{\rho} dl - \frac{x_0}{R_1} (l - \frac{x_0}{2}) + \frac{1}{2R_2} (l - x_0)^2 \\ &= \frac{L_1^2}{24R_1} - \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \frac{1}{\beta} (2-\beta\xi) \right] \\ &\quad \times \frac{L^2}{\beta^2} \log(1-\beta\xi) - \left[\frac{1}{R_1} - \left\{ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \left(\frac{v_2}{v_1} \right)^2 \right\} \frac{2}{\beta} \right] \\ &\quad \frac{L^2}{\beta} \xi - \frac{x_0}{R_1} (l - \frac{x_0}{2}) + \frac{1}{2R_2} (l - x_0)^2 \end{aligned}$$

ただし、 $\xi = \frac{l}{L}$, $\beta = 1 - \frac{v_2}{v_1}$

.....(48)

(48) 式は変速度の場合の 反方向曲線間緩和曲線の移程を示す式であるが、重心軌跡に対する考慮はふくまれていない。

この場合に重心軌跡に考慮を払ったときの移程は、(48) 式にさらに $-K_1\{C_1 - (C_1 + C_2)\xi\}$ を追加すればよい。

(48) 式の数値計算は実際には相当面倒で、(48) 式の実用価値は少ないといわねばならぬ。変速度の場合に実際に供し得るようなしかも合理的な緩和曲線形を求めるには次のようにすればよい。すなわち、まず定速度の場合の緩和曲線の合理的な形状を定め、次にこの平面曲線形をそのままにして置いて変速度の場合に適するようにカントでい減曲線に修正を加えるのである。重心軌跡緩和曲線はしかる後に移程の式に $-K_1C_x$ を追加すればよい。この方法を今の場合に用いて重心軌跡緩和曲線を求めれば次のようになる。

まず第 1 段階の定速度の場合の平面曲線形は、(41) 式 ~ (43) 式によって求められる。次に定速度の場合には、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{l}{L}$$

であるから、変速度の場合に対してはカントについて次式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{Cg}{Gv^2} &= \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{l}{L} \\ \therefore C &= \frac{G}{g} \left\{ \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{l}{L} \right\} v^2 \\ &= \frac{G}{g} \left\{ \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \xi \right\} v_1^2 (1-\beta\xi)^2 \\ &= \left\{ \frac{C_1}{v_1^2} - \left(\frac{C_1}{v_1^2} + \frac{C_2}{v_2^2} \right) \xi \right\} v_1^2 (1-\beta\xi)^2 \end{aligned} \dots\dots(49)$$

したがってこの場合、重心軌跡緩和曲線の平面形を求めるための円曲線に対する移程を示す式は、(43) 式および (49) 式から次のようになる。

$$\begin{aligned} l < \frac{L}{2} : \\ e &= \frac{L_1^2}{24R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{L^2}{6} \xi^3 - K_1 \frac{G}{g} \left\{ \frac{1}{R_1} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \xi \right\} v_1^2 (1-\beta\xi)^2 \\ l > \frac{L}{2} : \\ e &= \frac{L_1^2}{24R_1} - \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{3} \xi^3 - \xi^2 + \xi - \frac{1}{4} \right) \\ &\quad - K_1 \frac{G}{g} \left\{ \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \xi \right\} v_1^2 (1-\beta\xi)^2 \end{aligned}$$

ただし、 $K_1 = \frac{hg}{G}$, $\xi = \frac{l}{L}$, $\beta = \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right)$

.....(50)

8.2 円滑連続でい減の重心軌跡緩和曲線

紙数の都合上、円滑でい減の一例として一波長正弦曲線でい減の場合のみについて述べる。

まず第 1 段階として定速度の場合の曲線形を求める。この場合、反方向曲線間のカント連続でい減曲線は次式によって表わされる (図-3 参照)。

$$C_x = C_1 - (C_1 + C_2) \left\{ \frac{l}{L} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right) \right\} \dots\dots(51)$$

ゆえに定速度の場合には次式が成立する。

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{l}{L} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right) \right\}$$

上式を (36) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} &\int_0^L \left[\frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{l}{L} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right) \right\} \right] dl \\ &= \frac{x_0}{R_1} - \frac{(L-x_0)}{R_2} \\ &\frac{L}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{L}{2} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \frac{L}{4\pi^2} \\ &\quad \left[\cos\left(2\pi \frac{l}{L}\right) \right]_0^L = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) x_0 - \frac{L}{R_2} \end{aligned}$$

これより、 $x_0 = \frac{L}{2}$ (52)

次に (37) 式より、

$$\begin{aligned} f_1 + \int_0^L \int_0^l \left[\frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{l}{L} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right) \right\} \right] \\ dl dl - \int_0^{x_0} \int_0^l \frac{1}{R_1} dl dl - \int_{x_0}^L \left\{ \int_0^{x_0} \frac{1}{R_1} dl - \int_{x_0}^l \frac{1}{R_2} dl \right\} dl \\ = -f_2 \end{aligned}$$

上式を簡単にすれば、次式が得られる。

$$f_1 + f_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right) \frac{L^2}{4}$$

$$\begin{aligned}
 \text{しかるに, } f_1 &= \frac{L_1^2}{4R_1} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right), \quad f_2 = \frac{L_2^2}{4R_2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right) \\
 \therefore \frac{L_1^2}{R_1} + \frac{L_2^2}{R_2} &= \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) L^2 \\
 \therefore L &= \sqrt{\frac{L_1^2 R_2 + L_2^2 R_1}{R_1 + R_2}} \dots\dots\dots(53)
 \end{aligned}$$

また、円曲線に対する移程 e は、

$$\begin{aligned}
 l < \frac{L}{2} : \\
 e &= f_1 + \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{R_1} dl dl \\
 &= \frac{L_1^2}{4R_1} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right) - \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{1}{3} \xi^3 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2\pi^2} \xi + \frac{1}{4\pi^3} \sin(2\pi\xi) \right\} \\
 l > \frac{L}{2} : \\
 e &= f_1 + \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dl dl - \int_0^l \int_0^l \frac{1}{R_1} dl dl - \int_{v_0}^l \left\{ \int_0^{v_0} \frac{1}{R_1} \right. \\
 &\quad \left. dl - \int_{v_0}^l \frac{1}{R_2} dl \right\} dl \\
 &= \frac{L_1^2}{4R_1} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right) - \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{1}{3} \xi^3 \right. \\
 &\quad \left. - \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2\pi^2} \xi + \frac{1}{4\pi^3} \sin(2\pi\xi) \right\}
 \end{aligned} \dots\dots\dots(54)$$

ただし、 $\xi = \frac{l}{L}$

次に第2段階として変速度の場合に対応するカントでい減曲線を求める。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\rho} &= \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{l}{L} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right) \right\} \text{より,} \\
 \frac{Cg}{Gv^2} &= \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{l}{L} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{l}{L}\right) \right\} \\
 \therefore C &= \frac{G}{g} \left[\frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \xi - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\xi) \right\} \right] v^2 \\
 &= \frac{G}{g} \left[\frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \xi - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\xi) \right\} \right] \\
 &\quad \times v_1^2 (1 - \beta\xi)^2 \\
 &= \left[\frac{C_1}{v_1^2} - \left(\frac{C_1}{v_1^2} + \frac{C_2}{v_2^2} \right) \left\{ \xi - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\xi) \right\} \right] \\
 &\quad \times v_1^2 (1 - \beta\xi)^2 \dots\dots\dots(55)
 \end{aligned}$$

したがって重心軌跡緩和曲線の円曲線に対する移程は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 l < \frac{L}{2} : \\
 e &= \frac{L_1^2}{4R_1} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right) - \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{1}{3} \xi^3 - \frac{1}{2\pi^2} \xi \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4\pi^3} \sin(2\pi\xi) \right\} - K_1 \frac{G}{g} \left\{ \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\xi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\xi \right) \right\} v_1^2 (1 - \beta\xi)^2 \\
 l > \frac{L}{2} : \\
 e &= \frac{L_1^2}{4R_1} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \right) - \frac{L^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left\{ \frac{1}{3} \xi^3 \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{2\pi^2} \xi + \frac{1}{4\pi^3} \sin(2\pi\xi) \left\} \right. \\
 & - K_1 \frac{G}{g} \left\{ \frac{1}{R_1} - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \left(\xi - \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi\xi \right) \right\} \\
 & \quad \times v_1^2 (1 - \beta\xi)^2
 \end{aligned}$$

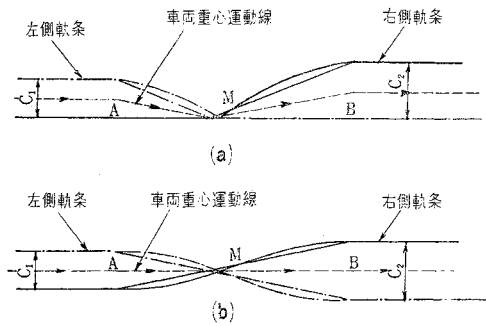
ただし、 $K_1 = \frac{hG}{G}$, $\xi = \frac{l}{L}$, $\beta = \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right)$

.....(56)

9. カントのつけ方に対する提案,ならびに結言

従来カントのつけ方については、曲線内側軌条を基準とし、外側軌条をこう上することによってカントをつけるように定められている。このため緩和曲線中では車両重心が何かしかの勾配線に沿って引き上げられるばかりでなく、例えば反方向曲線間では、図-4 の上図に示すよ

図-4 カントのつけ方と車両重心の運動



うに無用な上下運動をくり返し、このために車両動揺を生ずることが考えられる。

このような車両重心の無用な上下運動を避けるためにはカントのつけ方としてその1/2を外側軌条のこう上により、残余の1/2のカントを内側軌条の低下によって全カント量をつけることを提案したい。このようにすれば、車両重心は図-4の下図に示すように常に水平線上を走行する。

次に実際上の緩和曲線形として、前述のもののうち何を採用すべきかについては単に机上の合理性だけからいえば、本稿で述べた緩和曲線中、カントでい減が円滑で、かつ一般に変速度に対応する重心軌跡緩和曲線が最も合理的であるが、これらの緩和曲線形の方程式は相当複雑であり、実用に対しては線路等級や実際効果についての実地実験結果などを照合し、軌道保守とも勘案していずれを採用すべきかを決定すべきであろう。

参考文献

1) Zeitschrift für Angewandte Mathematik and Mechanik, Band 15, Heft 5, Oktober 1935, p. 266~p. 267. (Akademie Verlag GmbH, Berlin) (原稿受付: 1961.3.10)

ON THE NEW RATIONALIZED SHAPE OF TRANSITION CURVE

By Dr. Eng., Torao Taya, C.E. Member

Up to this time, we have tacitly assumed in the theory to reduce the shape of Transition Curve that a particle as a center of gravity of a car runs along the center-line of railway track and at the same time contacts with the surface of it.

However, actually, the car moves in plan along the locus which the middle point of the chord linking two bogie-centers of a car traces, and on the other hand runs in elevation along the curve which is fairly biased to the inside of the curve of the center-line of railway track, on account of the existence of a Cant in the Track. Therefore we must treat the center-line of railway track and the locus described by the center of gravity of a car as a different line and must investigate, in the research about the shape of Transition Curve, the shape of center-line of railway track which enables the center of gravity of a car to move smoothly.

1. The general expression of Transition Curve by the locus of center of gravity

The Transition Curve by the locus of center of gravity (T.C. by the locus of C.G.) is the name which the author has given to a new shape of Transition Curve of center-line of railway track to make the movement of center of gravity of a car smooth.

The general expression of T.C. by the locus of C.G. is,

$$(\ddot{y})_x = \frac{127}{GV^2} C_x - K_1 \ddot{C}_x \dots\dots\dots (1)$$

where $(y)_x$ = the ordinate of a point on the center-line of railway track by the rectangular co-ordinates (x, y) (m)

C_x = the Cant of Track at a point, abscissa x . (m)

G = the railway gauge (m)

V = the mean velocity of running trains. (km/h)

$$K_1 = \frac{h_G}{G}$$

h_G = the height of center of gravity of a Car. (m)

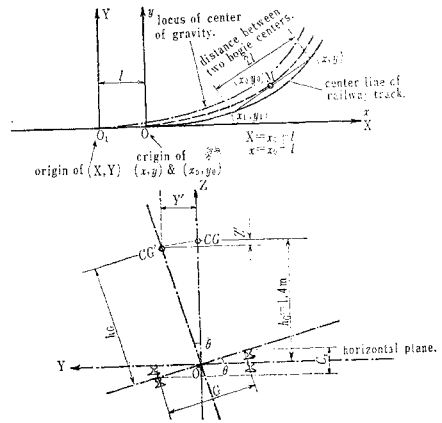


Fig. 1 The locus of center of gravity of a car and the bias of ditto.

2. The T.C. by the locus of C.G., corresponding to some decreasing type of Cant

If we assume C_x to decrease in the following fashion over the whole distance of Transition Curve, the new shape of T.C. by the locus of C.G. corresponding to these types of Cant Decreasing are :

(i) if C_x decreases linearly,

$$y = \frac{x^3}{6RL} - K_1 \left(\frac{C_0}{L} \right) x \dots\dots\dots (2)$$

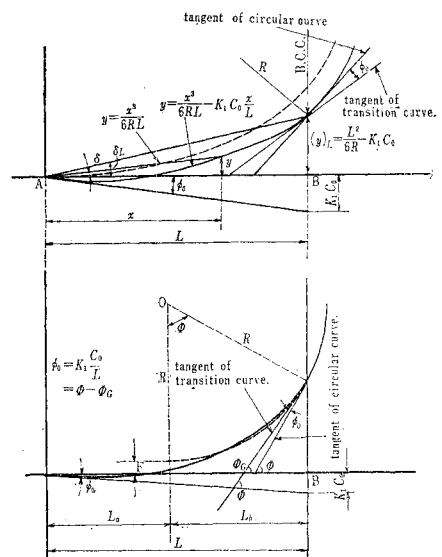


Fig. 2 The transition curve by the locus of C.G., when C_x decreases linearly.

(ii) if C_x decreases by a half wave length of sine curve,

$$y = \frac{x^2}{4R} - \left(1 - \cos \frac{\pi x}{L}\right) \left(\frac{L^2}{2\pi^2 R} + K_1 \frac{C_0}{2}\right) \dots\dots\dots (3)$$

(iii) if C_x decreases by one whole wave length of sine curve,

$$y = \frac{x^3}{6RL} + \left(\frac{L}{4\pi^2 R} + K_1 C_0\right) \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi} \sin\left(2\pi \frac{x}{L}\right) - \left(\frac{x}{L}\right) \right\} \dots\dots\dots (4)$$

3. The T.C. by the locus of C.G., when the mean velocity of trains is variable on it

In the research of the shape of Transition Curve, we generally determine at first the mean velocity of passing trains and then investigate the rational shape of Transition Curve according to the balancing Cant for the above mean velocity, therefore in this case we generally assume the mean velocity to be constant at each point on the Transition Curve.

However, if a curve exists near the stopping station, every train will accelerate or decelerate on this curve. Therefore we must consider the shape of Transition Curve corresponding to the variable mean velocity on the curve.

The equations of T.C. by the locus of C.G. corresponding to the variable mean velocity and various decreasing manner of Cant are somewhat complicated, so they are omitted in this synopsis.

4. The T.C. by the locus of C.G., in which the cant decreases continuously between two curves

In the preceding paragraphs, the author considered the Transition Curve in a simple curve, but here (in 9th paragraph of the thesis) he considers the Transition Curve between compound curves, reverse curves, or of a curve with small intersection angle, in which the Cant decreases continuously.

In this case, as the traditional method of setting the total Cant to the railway track by leveling up the outside rail at the curve, causes needlessly vertical disturbances in the movement of the center of gravity of a car, the author has adopted a method to give half the cant by

leveling up the outside rail and the other half cant by leveling down the inside rail at the curve and thus to give always a horizontal movement to the center of gravity of a car.

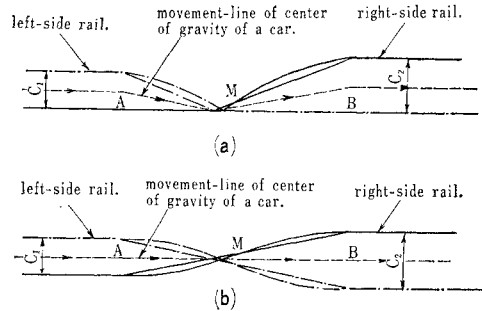


Fig. 3 The manner of setting total cant and the movement of center of gravity of a car.

For a method to get the shape of Transition Curve between the reverse curves, in which the cant decreases continuously, the Angle Diagram method is most convenient and so in this paragraph the author has demonstrated the method to calculate the longitudinal shift "e" against the standard circular curve, in such cases as a constant mean velocity, a variable mean velocity, and about various kinds of decreasing manner of cant.

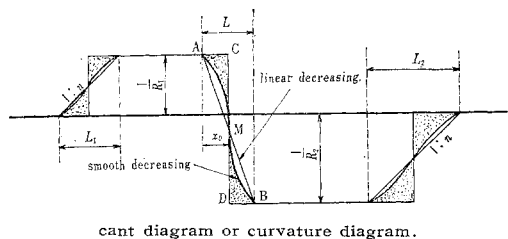
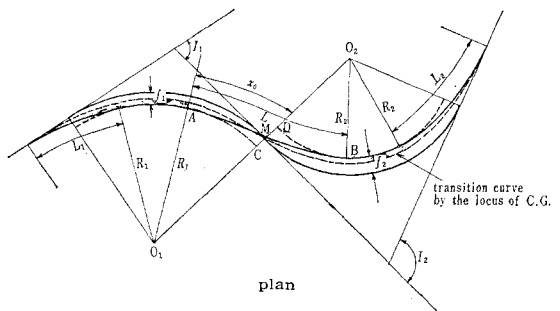


Fig. 4 The transition curve by the locus of C.G. between reverse curves, in which the cant decreases continuously.