

# 曲線格子桁の解法

正員 倉西 茂\*

**要旨** 本論文は主桁にプレート ガーダー を使用した曲線格子桁の解析を行なったものである。荷重, 応力, 変形などはすべてフーリエ級数の形で表示し, 横桁端に働く曲げモーメントを不静定力にとり計算を行なった。さらに横桁が剛とみなせる場合について近似解を与え連続曲線格子桁にも利用できることを示した。

## 1. 緒 論

曲りばりはそのふくまれる面に垂直な荷重, またはねじりモーメント荷重を受けると曲げモーメントとともにねじりモーメントを受ける。また曲りばりはねじれ変形を起こすととも面外へのたわみ変形を生じる。このように曲りばりは曲げモーメントとねじりモーメント, たわみとねじれは連成して起こり直ばりのように分離して考えることができずその解析は少々複雑なものとなる。そこで直線格子桁のように主桁と横桁の交点で力と変形の間係を求めのはかなり面倒なことなので, 本論文では主桁に働く荷重および反力, 主桁の変形をすべてフーリエ級数の形で求め横桁は主桁間に一様に分布しているものとして解析を行なうことにする。

曲線橋においては各主桁のねじれを防ぐため割合密に横桁を設けるのが常であるので, この仮定は成り立つものと思われる。また横桁の数が多くなると変形に対するフーリエ級数の係数と Klempl<sup>1)</sup> 氏の方法による三角関数の係数はほとんど等しくなるので, このような場合には横桁の数だけフーリエ級数の項を求め, 主桁と横桁の交点での主桁の曲げモーメント, 横桁端に働く曲げモーメントなどは Klempl 氏の方法を準用して計算することができる。

主桁に開いた断面のものを使用した場合には主桁はねじれと同時にたわみに対しても非常に弱くなり, 横桁は主桁のねじりの影響を受けて比較的大きな応力が働くのでその曲げ剛性も大きなものが必要となるので横桁の変形は無視できるようになる。このような場合には比較的簡単に応力計算ができるので近似計算として後でふれることにする。しかし主桁に I 型断面を使用した場合に不用意に桁の下側に耐風構を設けると床版とともに全体として閉じた断面となり荷重分配の様子が変わり内側主桁に意外に大きな応力が働く恐れもあるのでこの点について検討してみる必要がある<sup>4)</sup>。主桁を連続的に曲げてつくと横桁間で主桁突縁の曲げを生じ<sup>2), 3), 4)</sup> 突縁応力の

増加を見るし圧縮突縁では座屈の危険が生じるので, 主桁に I 型断面を用いたときはこれらの点に十分注意して設計しなければならない。曲線格子桁では一般に外側主桁に働く応力がかなり大きくなるがそのために外側主桁の剛性を大きくすると働く応力もそれにともなって大きくなり主桁断面はかなりアンバランスなものとなることもある。このような場合は応力の小さい内側主桁の剛性を増して外側主桁の応力が軽減されるように設計した方が全体として鋼重が小さくなる場合もある。

ここで取り扱う曲線格子桁は各主桁の曲率は一定であり, 横桁は主桁に直角に輻射方向に配置されているものである。各桁の支点は同一輻射軸上に置かれ単純支持とする。荷重は主桁をふくむ面に垂直に主桁上加えるものとする。

## 2. 曲りばりの受ける曲げモーメントねじりモーメント

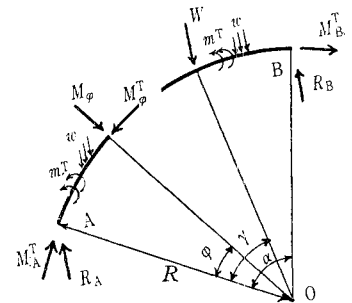
図-1 に示したように O を中心とし半径 R, 中心角 α の円弧状の曲りばり AB がはりを

ふくむ面に垂直な荷重 w とねじりモーメント荷重 m<sup>T</sup> をはりの中心軸上に受けているとき AO と φ なる角をなす任意断面に働く曲げモーメント M<sub>φ</sub> とねじりモーメント M<sub>φ</sub><sup>T</sup> ははりを荷重方向にたわますものとはりの正側を外側にねじるものを正としれば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_{\phi} &= -M_A^T \sin \phi + R_A \cdot R \sin \phi \\ &\quad - \int_0^{\phi} \{wR \sin(\phi - \psi) + m^T \sin(\phi - \psi)\} d\psi \\ M_{\phi}^T &= M_A^T \cos \phi - R_A R (1 - \cos \phi) \\ &\quad + \int_0^{\phi} \{wR (1 - \cos(\phi - \psi)) - m^T \cos(\phi - \psi)\} d\psi \\ &\quad \dots\dots\dots (1) \end{aligned} \right\}$$

ここで ψ は φ なる角度内にある荷重と断面 φ となす角度である。図-1 に示したベクトルは時計まわりを正とし w, m<sup>T</sup> は単位角度についての荷重強度である。

いま垂直荷重およびねじりモーメント荷重をそれぞれフーリエ級数で表わすと<sup>6), 2)</sup>



\* 東大工博 東北大学助教授 工学部土木工学科

$$w = \sum_{r=1}^{\infty} w^{(r)} \sin \frac{\pi}{\alpha} r \varphi \dots\dots\dots(2\cdot a)$$

$$m^T = \sum_{r=1}^{\infty} m^{T(r)} \sin \frac{\pi}{\alpha} r \varphi \dots\dots\dots(2\cdot b)$$

その係数は等分布荷重に対しては

$$w^{(r)} = \frac{2w}{r\pi} (1 - \cos r\pi), \quad m^{T(r)} = \frac{2m^T}{r\pi} (1 - \cos r\pi) \dots\dots\dots(3)$$

$r_1 \sim r_2$  間に等分布荷重があるときは

$$\begin{aligned} w^{(r)} &= \frac{4w}{\pi} \left[ \sin \left\{ (r_1 + r_2) \frac{r\pi}{2\alpha} \right\} \cdot \sin \left\{ (r_2 - r_1) \frac{r\pi}{2\alpha} \right\} \right] \\ m^{T(r)} &= \frac{4m^T}{\pi} \left[ \sin \left\{ (r_1 + r_2) \frac{r\pi}{2\alpha} \right\} \cdot \sin \left\{ (r_2 - r_1) \frac{r\pi}{2\alpha} \right\} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(4)$$

$r$  なる位置に集中荷重  $W_r, M_r^T$  があるときは

$$w^{(r)} = \frac{2W_r}{\alpha} \sin \frac{r\pi}{\alpha} r, \quad m^{T(r)} = \frac{2M_r^T}{\alpha} \sin \frac{r\pi}{\alpha} r \dots\dots\dots(5)$$

(2) 式を (1) 式に入れて計算し整理すると次式が得られる。

$$M_\varphi = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{Rw^{(r)} + m^{T(r)}}{\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi \dots\dots\dots(6\cdot a)$$

$$\begin{aligned} M_\varphi^T &= \sum_{r=1}^{\infty} \left[ \left\{ \frac{\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)}{\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} - \left(\frac{\alpha}{r\pi}\right) \right\} R \cdot w^{(r)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)}{\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} m^{T(r)} \right] \left( \cos \frac{r\pi}{\alpha} \varphi - 1 \right) + M_A^T \end{aligned} \dots\dots\dots(6\cdot b)$$

$$R_A = \frac{1}{R} \left\{ -M_A^T + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)}{\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} (Rw^{(r)} + m^{T(r)}) \right\} \dots\dots\dots(6\cdot c)$$

3. 曲りばりの変形

輻射方向の寸法がその曲率半径に比して比較的小さい部材では直ばりとしての断面定数を用い、ねじれ角と面外変形とねじりモーメントと曲げモーメントの間には次の関係が得られる<sup>5)</sup>。

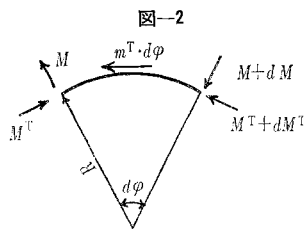
$$\begin{aligned} M_\varphi^T &= GJT \left( \frac{1}{R} \frac{\partial \beta}{\partial \varphi} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right) \\ &\quad - EC_{bd} \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^3 \beta}{\partial \varphi^3} - \frac{1}{R^4} \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} \right) \dots\dots\dots(7\cdot a) \end{aligned}$$

$$M_\varphi = -EJ \left( \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{R} \beta \right) \dots\dots\dots(7\cdot b)$$

図-2 に示したようにねじりモーメントの平衡より

$$\frac{\partial M_\varphi^T}{\partial \varphi} = -m^T - M_\varphi, \quad \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} = -(M + wR + m^T) \quad (8)$$

なる関係が得られるので (7) 式よりこの関係を用いて



$u$  を消去すると

$$\begin{aligned} &-EC_{bd} \frac{1}{R^4} \frac{\partial^4 \beta}{\partial \varphi^4} + \left( GJT - \frac{EC_{bd}}{R^2} \right) \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial \varphi^2} \\ &+ GJT \frac{\beta}{R^2} = - \left( 1 + \frac{GJT}{EJ} + \frac{C_{bd}}{R^2 J} \right) \frac{M_\varphi}{R} \\ &- \frac{m^T}{R} - \frac{C_{bd}}{R^3 J} (wR + m^T) \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

が得られる。よって上式より  $\beta$  を求め面外への変形  $u$  は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = - \frac{M_\varphi}{EJ} - R\beta \dots\dots\dots(10)$$

より求めることができる。ここではりは水平面内に置かれているものとし、 $u$  は下方に  $\beta$  ははりの正側が逆時計まわりに回転するものを正とする。 $J$  は水平軸まわりの断面2次モーメント、 $GJT$  はねじり剛性、 $EC_{bd}$  は曲げねじり剛性である。(9) 式より (6) 式で与えられる荷重を受けたとき生じる変形は次式で与えられる。ただしはりは等断面とし、支点は単純支持とし、はり軸まわりの回転は拘束されているが断面のそりの拘束はないものとする。

$$\begin{aligned} E\beta &= \sum_{r=1}^{\infty} \beta^{(r)} \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi = \sum_{r=1}^{\infty} (B^{T(r)} \cdot m^{T(r)} \\ &\quad + B^{w(r)} \cdot w^{(r)}) \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi \dots\dots\dots(11\cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Eu &= \sum_{r=1}^{\infty} u^{(r)} \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi = \sum_{r=1}^{\infty} (U^{w(r)} \cdot w^{(r)} \\ &\quad + U^{T(r)} \cdot m^{T(r)}) \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi \dots\dots\dots(11\cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } B^{T(r)} &= \frac{\left\{ \frac{GJT}{EJ} + \left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 \left(1 + \frac{C_{bd}}{R^2 J}\right) \right\} R}{CT^{(r)} \left\{ \left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 - 1 \right\}^2} \\ B^{w(r)} &= \frac{\left\{ 1 + \frac{GJT}{EJ} + \frac{C_{bd}}{R^2 J} \left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 \right\} R^2}{CT^{(r)} \left\{ \left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 - 1 \right\}^2} \\ CT^{(r)} &= \frac{C_{bd}}{R^2} \left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 + \frac{G}{E} JT \\ UT^{(r)} &= \frac{1}{\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2} \left\{ R \cdot B^{T(r)} + \frac{1}{EJ} \frac{R^2}{\left\{ \left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 - 1 \right\}} \right\} \\ Uw^{(r)} &= \frac{1}{\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2} \left\{ R \cdot B^{w(r)} + \frac{1}{EJ} \frac{R^3}{\left\{ \left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 - 1 \right\}} \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots(12\cdot a \sim e)$$

4. 曲線格子桁の計算

(1) 一般解

主桁は外側より番号をつけ 1, 2, 3...*k*...*m* とし, *k* 番目の主桁に関する諸量を表わすにはその記号の右下に *k* を付すことにする。主桁間隔は  $\lambda$  とし, *k* 番目の主桁の外側にある横桁についての諸量には同じく右下に *k* を付して表わす。横桁は主桁間に一様に分布しているものとすれば, 単位角当りの横桁の剛度は隣り合った横桁のなす角を  $\alpha'$  とし

$$K^a = \frac{J_K^a}{\lambda \alpha'} \dots\dots\dots(13)$$

で与えられる。後述するように Klemp の方法を利用するときは横桁は等間隔に全部で *n* 格間とし, 荷重位置は  $r = \alpha' x$  で与える。荷重位置を示すときは各記号の右下の一番最後に *x* を付し載荷桁 *i* を示すときはその前に *i* をつける。主桁と横桁との間に働く反力  $V_k$  もフーリエ級数に展開し次のように書き表わす。

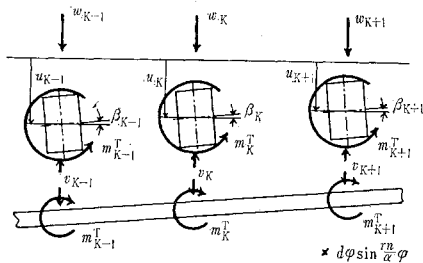
$$V_K = \sum_{r=1}^{\infty} v_K^{(r)} \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi \dots\dots\dots(14)$$

横桁端部に働く曲げモーメントは主桁 *k* より (*k*-1) 側を見て, *k* 側で働くものを  $M_{kK-1}^q$ , 主桁 (*k*-1) より *k* を見て (*k*-1) 側に働くものを  $M_{k-1K}^q$  とし次のように書く。

$$M_{kK-1}^q = \sum_{r=1}^{\infty} m_{kK-1}^{q(r)} \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi, \\ M_{k-1K}^q = \sum_{r=1}^{\infty} m_{k-1K}^{q(r)} \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi \dots\dots\dots(15)$$

結局  $d_\varphi$  ではさまれる任意の微小部をとって主桁に働く応力と横桁に働く応力を画くと 図-3 に示したようになる。外力はすべて主桁に加わるものとする。フーリエ級数の形で与えられる応力に対し変形も同様に書けるのであるから, 級数の各項の係数の間には次のような変形と応力の関係力の平衡関係が得られる。ここで *r* はすべての記号に共通であるから適宜省略する。まず力と変形の関係は (12) 式より,

図-3 主桁の変形および主桁と横桁に働く応力



$$E u_K^{(r)} = U_K w^{(r)} (\omega_K^{(r)} - v_K^{(r)}) + U_K T^{(r)} m_K T^{(r)} \dots\dots\dots(16)$$

$$E \beta_K^{(r)} = B_K T^{(r)} m_K T^{(r)} + B_K w^{(r)} (\omega_K^{(r)} - v_K^{(r)}) \dots\dots\dots(17)$$

ここで

$$B_K w^{(r)} = \frac{\left\{ 1 + \frac{G J_K T}{E J_K} + \frac{C b d K}{R_K^2 J_K} \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 \right\} R_K^2}{C_K T^{(r)} \left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\}^2} R_K^2 \\ B_K T = \frac{\left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 \left( 1 + \frac{C b d K}{R_K^2 J_K} \right) + \frac{G J_K T}{E J_K} \right\} R_K^2}{C_K T^{(r)} \left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\}^2} R_K^2 \\ C_K T^{(r)} = \frac{C b d K}{R_K^2} \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{G}{E} J_K T \\ U_K w^{(r)} = \frac{1}{\left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2} \left\{ R_K \cdot B_K w^{(r)} + \frac{1}{\left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\}} \right. \\ \left. \times \frac{R_K^3}{\left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\}} \right\}, U_K T^{(r)} = \frac{1}{\left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2} \\ \left\{ R_K \cdot B_K T^{(r)} + \frac{1}{J_K} \frac{R_K^2}{\left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\}} \right\} \dots\dots\dots(18 \cdot a \sim e)$$

主桁に働く力と横桁に働く力との間には 図-4 に示したように

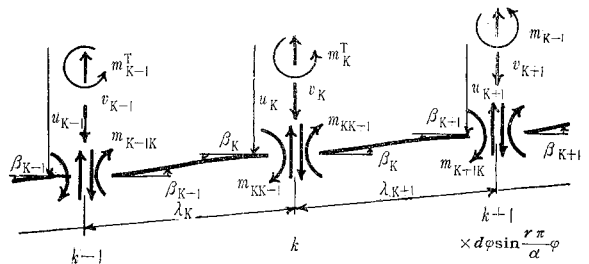
$$m_K T = m_{kK-1}^q + m_{kK+1}^q \dots\dots\dots(19) \\ v_K = -\frac{1}{\lambda_K} (m_{k-1K}^q + m_{kK-1}^q) + \frac{1}{\lambda_{K+1}} (m_{kK+1}^q + m_{k+1K}^q) \dots\dots\dots(20)$$

が得られる。次に横桁の変形については

$$\left. \begin{aligned} -m_{k-1K}^q &= 2 E K_K^a \left\{ 2 \beta_{K-1} + \beta_K \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\lambda_K} (u_K - u_{K-1}) \right\} \\ -m_{kK-1}^q &= 2 E K_K^a \left\{ 2 \beta_K + \beta_{K-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{\lambda_K} (u_K - u_{K-1}) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

が得られる。以上のように変形と力の関係が求められたので変形か力について連立方程式をたてれば曲線格子桁

図-4 横桁に働く応力と変形状態



は解くことができる。ここでは横桁端に働く曲げモーメントについて連立方程式をたてることにする。(19), (20) 式を (16), (17) 式に代入し, さらに (21) 式に入れて整理すると次式が得られる。ただし  $\lambda$  はすべて一定と

した。

$$\begin{aligned}
 & (2B_{K-1}^w \lambda^2 - 3U_{K-1}^w \lambda) \omega_{K-1} + (B_K^w \lambda^2 + 3U_K^w \lambda) \omega_K = \\
 & = (-2B_{K-1}^w \lambda + 3U_{K-1}^w) m_{K-2K-1}^q + (-2B_{K-1}^w \lambda^2 \\
 & - 2B_{K-1}^T \lambda^2 + 3U_{K-1}^w + 3U_{K-1}^T \lambda) m_{K-1K-2}^q \\
 & + \left\{ -2B_{K-1}^T \lambda^2 + 2B_{K-1}^w \lambda - B_{K-1}^w \lambda + 3U_{K-1}^T \lambda \right. \\
 & - 3(U_{K-1}^w + U_K^w) - \frac{\lambda^2}{2K_K^q} \left. \right\} m_{K-1K}^q + \{ -B_{K-1}^T \lambda^2 \\
 & - 3U_{K-1}^T \lambda + 2B_{K-1}^w \lambda - B_{K-1}^w \lambda - 3(U_{K-1}^w + U_K^w) \} m_{KK-1}^q \\
 & + (-B_{K-1}^T \lambda^2 - 3U_{K-1}^T \lambda + B_{K-1}^w \lambda + 3U_K^w) m_{KK+1}^q \\
 & + (B_{K-1}^w \lambda + 3U_K^w) m_{K+1K}^q \dots\dots\dots(22 \cdot a) \\
 & (B_{K-1}^w \lambda^2 - 3U_{K-1}^w \lambda) \omega_{K-1} + (2B_K^w \lambda^2 + 3U_K^w \lambda) \omega_K = \\
 & = (-B_{K-1}^w \lambda + 3U_{K-1}^w) m_{K-2K-1}^q + (-B_{K-1}^T \lambda^2 \\
 & + 3U_{K-1}^T \lambda - B_{K-1}^w \lambda + 3U_{K-1}^w) m_{K-1K-2}^q \\
 & + \{ -B_{K-1}^T \lambda^2 + B_{K-1}^w \lambda - 2B_{K-1}^w \lambda + 3U_{K-1}^T \lambda - 3(U_{K-1}^w \\
 & + U_K^w) \} m_{K-1K}^q + \{ -2B_{K-1}^T \lambda^2 + B_{K-1}^w \lambda - 2B_{K-1}^w \lambda \\
 & - 3U_{K-1}^T \lambda - 3(U_{K-1}^w + U_K^w) - \frac{\lambda^2}{2K_K^q} \} m_{KK-1}^q \\
 & + (-2B_{K-1}^T \lambda^2 - 3U_{K-1}^T \lambda + 2B_{K-1}^w \lambda + 3U_K^w) m_{KK+1}^q \\
 & + (2B_K^w \lambda + 3U_K^w) m_{K+1K}^q \dots\dots\dots(22 \cdot b)
 \end{aligned}$$

以上の方程式が  $k=2, 3, \dots, m$  について  $2(m-1)$  個得られ横桁端に働く応力を求めることができる。 $m_{K-1K}^q, m_{K-1K-2}^q, \dots$  が得られるとこれらの値を (19), (20) 式に代入し主桁に働く応力  $m_{K-1K}^T, v_K$  を求めることができる。さらにこれらの値を (6 \cdot a) 式に代入し主桁に働く曲げモーメントを求める。横桁端に働く曲げモーメント  $M_{KK-1}^q$  は隣接する格間の中央まで働くものがその横桁に働くものとし

$$\begin{aligned}
 M_{KK-1}^q &= \sum_{r=1}^{\infty} m_{KK-1}^q \int_{\varphi-\alpha'/2}^{\varphi+\alpha'/2} \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi \cdot d\varphi \\
 &= 2 \sum_{r=1}^n m_{KK-1}^q \left( \frac{\alpha}{r\pi} \right) \sin \left( \frac{r\pi}{\alpha} \varphi \right) \sin \frac{r\pi}{\alpha} \alpha' \dots\dots(23)
 \end{aligned}$$

より計算することができる。

ここで緒論で述べたように Klemp 氏の方法を利用すると荷重は

$$W_{Kx} = \sum_{r=1}^{n-1} w_K^{(r)} \sin \frac{r\pi}{n} x \dots\dots\dots(24)$$

$$w_K^{(r)} = \frac{2}{n} \sum_{x=1}^{n-1} W_{Kx} \sin \frac{x\pi}{n} r \dots\dots\dots(25)$$

で表わされる。 $m_{KK-1}^q, m_{K-1K-2}^q, v_K^{(r)}$  の算出に用いられた荷重を表わすフーリエ級数の係数  $w_K^{(r)}$  の代りに(25)式で与えられるものを同様に使用すればよいことになる。いま主桁に働く集中垂直およびねじり荷重が  $x$  にあるとき  $\xi$  点では

$$M_{K\xi, x} = (R_K \cdot W_K + M_{KT}) \left( \frac{\sin(n-x)\alpha'}{\sin \alpha} \sin \xi \alpha' \right) \dots\dots\dots(26)$$

で与えられる。ただし [ ] の中は  $\xi < x$  のとき 0 とする。よって (24) 式の表示に従えば主桁  $k$  の  $\xi$  点に働く曲げモーメントは

$$\begin{aligned}
 M_{K\xi} &= \sum_{r=1}^{n-1} \{ R_K (w_K^{(r)} - v_K^{(r)}) + m_{KK-1}^q \} \\
 & \left\{ \sum_{x=1}^{n-1} \frac{\sin \xi \alpha'}{\sin \alpha} \sin(n-x)\alpha' \sin \frac{r\pi}{n} x \right. \\
 & \left. - \sum_{x=1}^{\xi} \sin(\xi-x)\alpha' \sin \frac{r\pi}{n} x \right\} \dots\dots\dots(27)
 \end{aligned}$$

で与えられる。横桁端に働く曲げモーメントは

$$M_{KK-1}^q = \sum_{r=1}^{n-1} m_{KK-1}^{(r)q} \sin \frac{r\pi}{n} \xi \dots\dots\dots(28)$$

と計算される。

(2) 近似解 (横桁を剛体とした場合)

曲りばりはねじれによるたわみが比較的大きいので、主桁に I 型断面のものをを用いた場合には横桁をほとんど剛体とみなすことができる。例えば 計算例 1 の場合横桁の断面 2 次モーメントを主桁の 1/10 程度にとっても (22) 式の  $K_K^q$  に関する量は他の項の  $10^{-4}$  程度にししか影響して来ない ( $r=1$  の場合)。計算例 2 の場合でも横桁の剛度の影響は比較的小さく近似的には横桁は剛体とみなすことができる。

このように横桁を剛体とみなすと格子桁の変形はある主桁の変位とねじり角のみで表わすことができるので計算は少々簡単になってくる。前節と同じくすべての諸量をフーリエ級数の形で表わし変形より主桁に働く応力を求めると

$$\frac{m_K^{T(r)}}{E} = -M_K^T u_K^{(r)} \cdot u_K^{(r)} + M_{K\beta}^T \cdot \beta_K^{(r)} \dots\dots\dots(29)$$

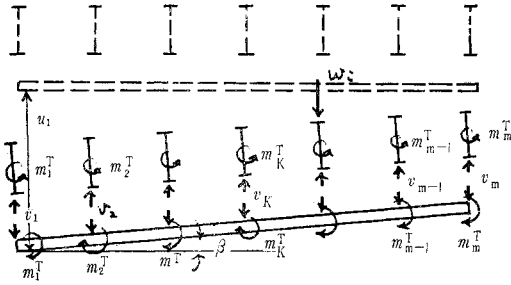
$$\frac{v_K^{(r)} - w_K^{(r)}}{E} = -W_K^{u(r)} \cdot u_K^{(r)} + W_K^{\beta(r)} \cdot \beta_K^{(r)} \dots\dots(30)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned}
 M_K^{Tu(r)} &= \frac{J_K}{R_K^2} \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{GJ_K^T}{EJ_K} \right. \\
 & \left. + \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{C_{bdK}}{R_K^2 J_K} \right\} \\
 M_K^{T\beta(r)} &= \frac{J_K}{R_K} \left\{ 1 + \frac{GJ_K^T}{EJ_K} + \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 \right. \\
 & \left. \frac{C_{bdK}}{R_K^2 J_K} \right\} + \frac{C_K^{T(r)}}{R_K} \left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\} \\
 W_K^{u(r)} &= \frac{J_K}{R_K^3} \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ \frac{GJ_K^T}{EJ_K} \right. \\
 & \left. + \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 \left( 1 + \frac{C_{bdK}}{R_K^2 J_K} \right) \right\} \\
 W_K^{\beta(r)} &= \frac{J_K}{R_K^2} \left\{ \frac{GJ_K^T}{EJ_K} + \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 \right. \\
 & \left. \left( 1 + \frac{C_{bdK}}{R_K^2 J_K} \right) \right\} + \frac{C_K^{T(r)}}{R_K^2} \left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 \right. \\
 & \left. - 1 \right\}
 \end{aligned} \right\} (31 \cdot a \sim d)$$

である。図-5 に示したように主桁  $i$  に載荷されたとき主桁 1 で横桁のモーメントの平衡を見ると

図-5



$$\sum_{k=1}^m v_K(k-1)\lambda + \sum_{K=1}^m m_K^T = 0 \dots\dots\dots (32)$$

横桁の上下方向の釣合より

$$\sum_{k=1}^m v_K = 0 \dots\dots\dots (33)$$

各主桁の変形は

$$u_K = u_1 - \beta(k-1)\lambda \dots\dots\dots (34)$$

で与えられる。(29),(30),(34) 式を (32),(33) 式に代入して整理すると

$$\frac{w_i}{E} = u_1 \sum_{k=1}^m W_K^u - \beta \sum_{K=1}^m \{W_K^u \lambda(k-1) + W_K^b\} \dots\dots\dots (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{w_i(i-1)}{E} \lambda &= u_1 \sum_{K=1}^m \{W_K^u \lambda(k-1) + M_K^T\} \\ &- \beta \sum_{K=1}^m \{W_K^u (k-1)^2 \lambda^2 + W_K^b (k-1)\lambda \\ &+ M_K^T \lambda + M_K^T \beta\} \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

が得られる。(35),(36) 式より  $u_1, \beta$  は計算され再び(29),(30) 式に代入し  $w_K^{(r)} - v_K^{(r)}, m_K^{T(r)}$  を求めることができる。横桁端に働く曲げモーメントは主桁 1 においては

$$m_1^T = m_{12}^q \dots\dots\dots (37)$$

であるから主桁 1 より出発し (19), (20) 式を使用して

$$\begin{aligned} m_1^T &= m_{12}^q \\ m_{21}^q &= m_{12}^q - \lambda v_1 \\ m_{23}^q &= m_2^T - m_{21}^q \end{aligned}$$

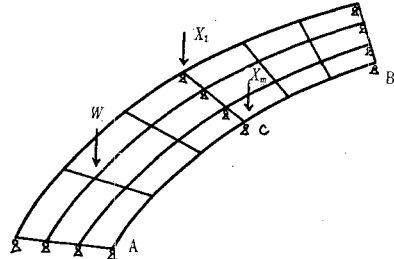
と順次計算して行くことができる。

(3) 連続曲線格子桁

連続曲線格子桁を一般的に解くにはかなり複雑な計算をしなければならない。しかし前節で仮定したように横桁を十分剛とみなし、主桁の断面変化が小さく一様とみなすことができる場合は中間支点での  $u_i, \beta$  が 0 となるように一対の不静定力  $X_1, X_m$  を中間支点に加えてやればよいのであるから解くことはそう困難なことではない。

例えば図-6 に示したように 2 径間連続曲線格子桁の場合は中間支点上で主桁 1,  $m$  に不静定力を働かせる。

図-6 連続構造としたときの不静定力



そうすると単位荷重が主桁  $k$  の  $x$  点にあるとき中間支点上の主桁 1 のたわみを  $\delta_{1c,kx}$ , 主桁  $m$  のたわみを  $\delta_{mc,kx}$  とし、中間支点 (1c) に単位荷重が作用したときの (1c) 点のたわみは  $\delta_{1c,1c}$  ( $nc$ ) 点のたわみを  $\delta_{mc,1c}$  とし、( $mc$ ) 点に単位荷重が作用したときの ( $nc$ ) 点のたわみを  $\delta_{mc,mc}$ , (1c) 点のたわみを  $\delta_{1c,mc}$  とすれば

$$\begin{aligned} \delta_{1c,kx} W &= \delta_{1c,1c} X_1 + \delta_{1c,mc} X_2 \\ \delta_{mc,kx} W &= \delta_{mc,mc} X_2 + \delta_{mc,1c} X_1 \end{aligned} \dots\dots\dots (38)$$

より  $X_1, X_m$  を求めることができる。またここで相反定理より

$\delta_{kx,1c} = \delta_{1c,kx}$   $\delta_{1c,mc} = \delta_{mc,1c}$  であり  $\delta_{1c,mc} = \delta_{mc,1c}$  である。たわみの方向は図-6 の力の作用する方向と一致するものを正とする。

5. 計算例

(1) I 型断面主桁 4 本の場合

図-7, 8 に示したような断面および形状をもった 4 本主桁の曲線格子桁について応力計算例を示す。橋中心線

図-7 計算例 (1) に使用した橋断面

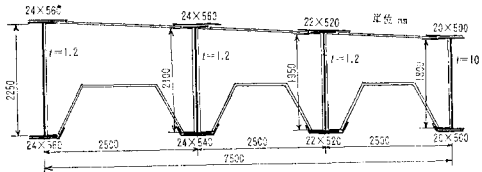
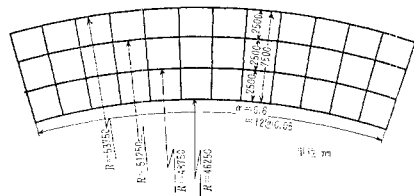


図-8 計算例 (1) の曲線桁の平面図



の曲率半径は 50 m,  $\alpha$  は 0.6 弧度である。各主桁の断面定数曲率半径は表-1 に示す。解析には横桁を剛体とみなした近似計算法を用い、集中荷重  $W=1$  が主桁 1, および 4 の中央に載ったときの曲げモーメントを求めると図-9 が得られる。中央断面での横桁に働く曲げモーメント図は図-10 に示す。フーリエ級数は第 10 項までとって計算したが主桁に働く曲げモーメントは 4% ほ

ど小さく計算されている。

表-1 計算例1に使用した主桁の諸定数

$k$	1	2	3	4
$R_K$	5 375 cm	5 125 cm	4 875 cm	4 625 cm
$J_K$	$4.6141 \times 10^6 \text{ cm}^4$	$3.8495 \times 10^6 \text{ cm}^4$	$2.9659 \times 10^6 \text{ cm}^4$	$2.1422 \times 10^6 \text{ cm}^4$
$J_K^T$	$645.70 \text{ cm}^4$	$618.62 \text{ cm}^4$	$481.45 \text{ cm}^4$	$326.67 \text{ cm}^4$
$C_{bdK}$	$9.0182 \times 10^8 \text{ cm}^6$	$7.1438 \times 10^8 \text{ cm}^6$	$5.0123 \times 10^8 \text{ cm}^6$	$3.4504 \times 10^8 \text{ cm}^6$
$\alpha=0.6, \alpha'=0.05, \lambda=250 \text{ cm}$				
$J^q=6 \times 10^9 \text{ cm}^4$				

図-9 主桁に働く曲げモーメント図

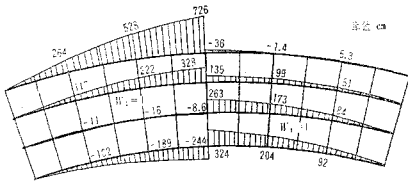
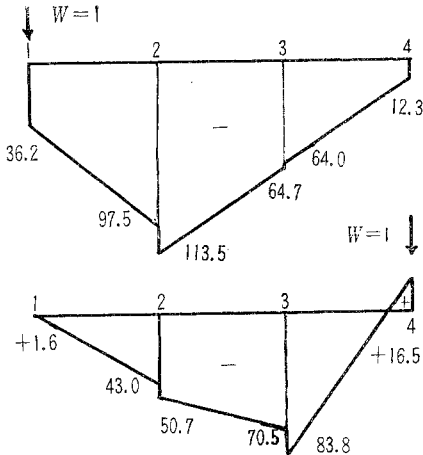


図-10 中央横桁に働く曲げモーメント図 (単位 cm)



(2) 閉断面主桁 2本の場合

図-11 に示したようにダブル ウェブの主桁を用いた場合について 3.(1) の (22) 式により計算する。主桁

図-11 計算例(2)に使用した橋断面

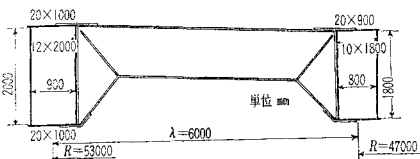
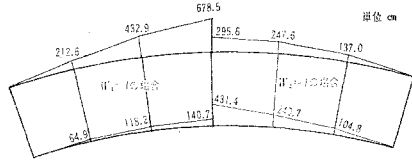


表-2 計算例2に使用した主桁の諸定数

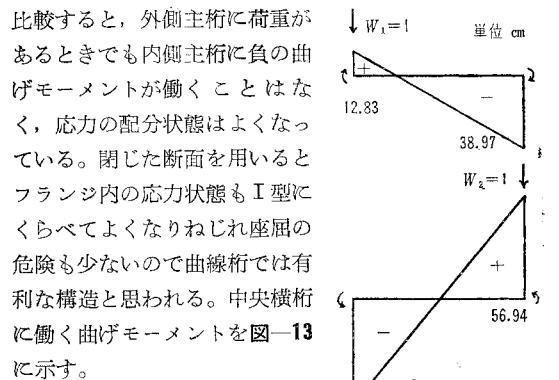
$k$	1	2
$R_K$	$5.3 \times 10^3 \text{ cm}$	$4.7 \times 10^3 \text{ cm}$
$J_K$	$5.6804 \times 10^6 \text{ cm}^4$	$3.9532 \times 10^6 \text{ cm}^4$
$J_K^T$	$3.0986 \times 10^6 \text{ cm}^4$	$1.9099 \times 10^6 \text{ cm}^4$
$\alpha=0.6, \alpha'=0.10, \lambda=600 \text{ cm}$		
$K^q=1.66 \times 10^4 \text{ cm}^3, J^q=1 \times 10^6 \text{ cm}^4$		

の諸定数は表-2に示す。閉じた断面にした場合曲げねじり剛性はねじり剛性の項に比して小さくなるので省略した。集中荷重  $W=1$  が主桁1 および2の中央にあるときの曲げモーメント図を 図-12 に示す。曲げモー

図-12 主桁に働く曲げモーメント図



メントの計算には (27) 式を用い 図-13 横桁に働く曲げモーメント図



参考文献

- 1) Klemp, W.: "Ein neues Verfahren für Trägerros-tberechnung", Beton und Stahlbetonbau, 21 Jahrg. Heft 1, 1956 (内容的には Homberg, Leonhardt, の方法と同等である)
- 2) 平井・倉西: "曲線桁について", 第13回土木学会年次学術講演会概要, 1957
- 3) 平井・倉西: "曲線橋理論について", 土木技術 13巻7号 1958
- 4) 倉西・鎌田: "白糸橋実測報告", 土木技術 13巻8号, 1958
- 5) 倉西: "水平横荷重を受けるアーチ橋について", 土木学会論文集第73号, 1961-3
- 6) 最上武雄: "応用力学下巻", 克誠堂出版社 1951

\* 文献 3) においては次の各項が不足している。(10) 式で

$$\beta = \left[ \frac{1}{1+\mu^2} \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin \alpha} \sin \varphi - \frac{1}{\mu(1+\mu^2)} \frac{\sinh \mu(\alpha-\gamma)}{\sinh \mu \alpha} \sinh \mu \varphi + \left\{ \frac{1}{\mu(1+\mu^2)} \sinh \mu(\varphi-\gamma) - \frac{1}{1+\mu^2} \sin(\varphi-\gamma) \right\}_{\varphi=\gamma} \right] \frac{R^3}{EC_{bd}} P \cdot \left( e^{-\frac{R+e}{1+\mu^2}} \right)$$

(11) 式で

$$v = \left[ \frac{1}{1+\mu^2} \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin \alpha} \sin \varphi + \frac{1}{\mu^2(1+\mu^2)} \frac{\sin \mu(\alpha-\gamma)}{\sinh \mu \alpha} \sinh \mu \varphi - \frac{1}{\mu^2} \frac{\alpha-\gamma}{\alpha} \varphi - \left\{ \frac{1}{\mu^2(1+\mu^2)} \sinh \mu(\varphi-\gamma) + \frac{1}{1+\mu^2} \sin(\varphi-\gamma) - \frac{1}{\mu^2} (\varphi-\gamma) \right\}_{\varphi=\gamma} \right] \frac{R^4}{EC_{bd}} P \cdot \left( e^{-\frac{R+e}{1+\mu^2}} \right)$$

(原稿受付: 1961.2.11)

## ANALYSIS OF THE CURVED BRIDGE WITH MULTIPLE MAIN PLATE GIRDERS

By Dr. Eng., Shigeru Kuranishi, C.E. Member

In this paper, the author presents a method of analysis of horizontally curved plate girder bridges composed of multiple circularly curved main girders and cross beams rigidly connected to the main girders.

Expanding all the forces and distortions: i.e. the loads, bending moments, and twist moments acting on the main girders; the deflections and twist angles of the main girders; and the reactions between the main girders and cross beams; into the Fourier series in terms of sine and determining their coefficients by the equilibrium of forces and the coincide of displacements of the main girders and the cross beams at the panel points, the analysis presented hereinafter is carried on. Therefore the cross beams are assumed here to be uniformly distributed along the main girders.

Let vertical loads and twist moments acting on the main girders express in the Fourier series, then we have

$$w = \sum_{r=1}^{\infty} w^{(r)} \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi, \quad m^T = \sum_{r=1}^{\infty} m^{T(r)} \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi \quad (1)$$

The bending moment due to the above loads is also expressed in the form

$$M = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{r\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} (R \cdot w^{(r)} + m^{T(r)}) \sin \frac{r\pi}{\alpha} \varphi \quad (2)$$

where, for concentrated load, the coefficient of this expansion, as well known, is given by

$$w^{(r)} = \frac{2W}{\alpha} \sin \frac{r\pi}{\alpha} r$$

in which  $R$  is the radius of curvature and  $\alpha$  is the centre angle of the main girder. Since the differential equations for deflection and twist angle of a curved beam are given by

$$\begin{aligned} & \frac{-EC_{bd}}{R^3} \frac{d^4 \beta}{d\varphi^4} + \left( GJ_T - \frac{EC_{bd}}{R^2} \right) \frac{1}{R} \frac{d^2 \beta}{d\varphi^2} \\ & + GJ_T \frac{\beta}{k} = \left( 1 + \frac{GJ_T}{EJ} \right) M - \frac{C_{bd}}{R^2 J} \frac{d^2 M}{d\varphi^2} \\ & - m^T \frac{d^2 u}{R^2 d\varphi^2} = - \frac{M}{EJ} + \frac{\beta}{R} \dots \dots \dots (3) \end{aligned}$$

the deflection and twist angle of the  $k$ -th main girder numbered from outside are able to be expressed also in a form of the sine expansion from eq.(1), (2) and (3) as follows:

$$\left. \begin{aligned} Eu_K &= \sum_{r=1}^{\infty} Eu_K^{(r)} = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ U_K^{w(r)} (w_K^{(r)} - v_K^{(r)}) + U_K^{T(r)} m_K^{T(r)} \right\} \\ E\beta_K &= \sum_{r=1}^{\infty} E\beta_K^{(r)} = \sum_{r=1}^{\infty} \left\{ B_K^{T(r)} m_K^{T(r)} + B_K^{w(r)} (w_K^{(r)} - v_K^{(r)}) \right\} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

where

$$\left. \begin{aligned} B_K^{w(r)} &= \frac{\left\{ 1 + \frac{GJ_K^T}{EJ_K} + \frac{C_{bdK}}{R^2 J_K} \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 \right\} R_K^2}{C_K^T \left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\}^2} \\ B_K^{T(r)} &= \frac{\left\{ 1 + \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 \left( 1 + \frac{C_{bdK}}{R^2 J_K} \right) \right\} R_K}{C_K^T \left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\}^2} \\ U_K^{w(r)} &= \frac{1}{\left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2} \left\{ R_K B_K^{w(r)} + \frac{R_K^3}{EJ_K \left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\}} \right\} \\ U_K^{T(r)} &= \frac{1}{\left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2} \left\{ R_K B_K^{T(r)} - \frac{R_K^2}{EJ_K \left\{ \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\}} \right\} \\ C_K^{T(r)} &= \frac{C_{bdK}}{R_K^2} \left( \frac{r\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{G}{E} J_K^T \end{aligned} \right\} (5-a \sim e)$$

in which  $v_K$  and  $m_K^T$  are the reaction force and moment respectively between the  $k$ -th main girder and the cross beams,  $J_K$ ,  $J_K^T$  and  $C_{bdK}$  are the moment of inertia, the torsional coefficient and the bending-twist coefficient of the section of the  $k$ -th main girder respectively.

Here let us employ the bending moments acting on the ends of the cross beams as redundant forces. Then, applying the slope deflection method for the cross beams, we have the following simultaneous equations:

at  $k=2, 3, \dots, k, \dots, m-1, m$  (hereafter neglect the index  $(r)$ )

$$\begin{aligned} & (2B_{K-1}^w \lambda^2 - 3U_{K-1}^w \lambda) w_{K-1} + (B_K^w \lambda^2 + 3U_K^w \lambda) w_K \\ & = (-2B_{K-1}^w \lambda + 3U_{K-1}^w) m_{K-2K-1}^T + (-2B_{K-1}^w \lambda \\ & + 3U_{K-1}^w - 2B_{K-1}^T \lambda^2 + 3U_{K-1}^T \lambda) m_{K-1K-2}^T \\ & + (-2B_{K-1}^T \lambda^2 + 3U_{K-1}^T \lambda + 2B_{K-1}^w \lambda - B_K^w \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -3 U_{K-1}^w - 3 U_K^w - \frac{\alpha' \lambda^3}{2 J_{qK}} m_{K-1K}^q + (-B_{K\lambda}^T)^2 \\
 & - 3 U_{K-1}^T \lambda + 2 B_{K-1}^w \lambda - B_{K\lambda}^w - 3 U_{K-1}^w - 3 U_K^w \\
 & \cdot m_{K-1K}^q + (-B_{K\lambda}^T)^2 - 3 U_{K-1}^T \lambda + B_{K\lambda}^w + 3 U_K^w \\
 & \cdot m_{KK+1}^q + (B_{K\lambda}^w + 3 U_K^w) m_{m+1K}^q \dots \dots \dots (6-a)
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 & (B_{K-1}^w \lambda^2 - 3 U_{K-1}^w) \omega_{K-1} + (2 B_{K\lambda}^w + 3 U_K^w) \omega_K \\
 & = (-B_{K-1}^w \lambda + 3 U_{K-1}^w) m_{K-2K-1}^q + (-B_{K-1}^T)^2 \\
 & + 3 U_{K-1}^T \lambda - B_{K-1}^w \lambda + 3 U_{K-1}^w) m_{K-1K-2}^q \\
 & + (-B_{K-1}^T)^2 + 3 U_{K-1}^T \lambda + B_{K-1}^w \lambda - 2 B_{K\lambda}^w \\
 & - 3 U_{K-1}^w - 3 U_K^w) m_{K-1K}^q + (-2 B_{K\lambda}^w - 3 U_K^T \lambda \\
 & + B_{K-1}^w \lambda - 2 B_{K\lambda}^w - 3 U_{K-1}^w - 3 U_K^w - \frac{\alpha' \lambda^3}{2 J_{qK}}) \\
 & \cdot m_{KK-1}^q + (-2 B_{K\lambda}^w - 3 U_K^T \lambda + 2 B_{K\lambda}^w + 3 U_K^w) \\
 & \cdot m_{KK+1}^q + (2 B_{K\lambda}^w + 3 U_K^w) m_{KK+1}^q \dots \dots \dots (6-b)
 \end{aligned}$$

in which  $\lambda$  is the distance between the neighboring main girders,  $m_{KK+1}^q$  is the end moment of the cross beam between the  $k$ -th and  $(k+1)$ th main girders acting on the joint with the  $k$ -th main girder,  $J_q$  is the moment of inertia of the cross beams' action and  $\alpha'$  is the angle between the neighboring cross beams. From those end moments obtained here, the forces acting on the main girders are calculated by the following equations.

$$\begin{aligned}
 \lambda v_K &= (m_{KK+1}^q + m_{K+1K}^q) - (m_{K-1K}^q + m_{KK-1}^q) \\
 m_K^T &= m_{KK-1}^q + m_{KK+1}^q
 \end{aligned} \quad (7)$$

If the cross beams are assumed to be rigid, the analysis is considerably simplified. Let vertical loads, twist moments and reactions express in the Fourier expansion, then the coefficients of the series are given as functions of distortions in the forms

$$\begin{aligned}
 m_K^T &= E(-M_K^T u_K + M_K^T \beta_K) \\
 v_K - \omega_K &= E(-W_K^u u_K + W_K^T \beta_K)
 \end{aligned} \quad (8)$$

in which

$$\begin{aligned}
 M_K^{T u(r)} &= \frac{J_K}{R_K^2} \left( \frac{r \pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{G J_K^T}{E J_K} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{C_{bdK}}{R_K^2 J_K} \left( \frac{r \pi}{\alpha} \right)^2 \right\} \\
 M_K^{T \beta(r)} &= \frac{J_K}{R_K} \left\{ 1 + \frac{G J_K^T}{E J_K} + \frac{C_{bdK}}{R_K^2 J_K} \left( \frac{r \pi}{\alpha} \right)^2 \right\} \\
 & \quad + \frac{C_{K^T}}{R_K} \left\{ \left( \frac{r \pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\} \\
 W_K^{u(r)} &= \frac{J_K}{R_K^3} \left( \frac{r \pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ \frac{G J_K^T}{E J_K} + \left( 1 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. \frac{C_{bdK}}{R_K^2 J_K} \right) \left( \frac{r \pi}{\alpha} \right)^2 \right\} \\
 W_K^{\beta(r)} &= \frac{J_K}{R_K^2} \left\{ \frac{G J_K^T}{E J_K} + \left( 1 + \frac{C_{bdK}}{R_K^2 J_K} \right) \right\}
 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\left. \cdot \left( \frac{r \pi}{\alpha} \right)^2 \right\} + \frac{C_{K^T}}{R_K^2} \left\{ \left( \frac{r \pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\} \right\}$$

From the assumption mention above, the deflections of each main girder are given as follows :

$$\left. \begin{aligned}
 u_K &= u_1 + \beta_1 \lambda (k-1) \\
 \beta_1 &= \beta_2 = \dots = \beta_K = \dots = \beta_m
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

From the equilibrium of forces acting on a cross beam

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{K=1}^m v_K &= 0 \\
 \sum_{K=1}^m v_K (k-1) \lambda + \sum_{K=1}^m m_K^T &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

are obtained and substituting eq. (8), eq. (10) in eq. (11), we can obtain the following simultaneous equations :

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m \omega_i &= E \left[ u_1 \sum_{K=1}^m W_K^u + \beta_1 \sum_{K=1}^m \{ W_K^u \lambda (k \right. \\
 & \quad \left. - 1) + W_K^T \beta \} \right. \\
 \sum_{i=1}^m \omega_i (i-1) \lambda &= E \left[ u_1 \sum_{K=1}^m \{ W_K^u (k-1) \lambda \right. \\
 & \quad \left. + M_K^{T u} \} + \beta_1 \sum_{K=1}^m \{ W_K^u (k-1)^2 \lambda^2 \right. \\
 & \quad \left. + W_K^T (k-1) \lambda + M_K^{T u} \lambda (k-1) \right. \\
 & \quad \left. + M_K^{T \beta} \right]
 \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

$u_1$  and  $\beta_1$  may be easily computed and substituting the  $u_1$  and  $\beta_1$  obtained here in eq. (8), the forces acting on the main girder are given by

$$\begin{aligned}
 m_K^T &= -M_K^{T u} u_1 + \{ M_K^{T \beta} - M_K^{T u} (k-1) \lambda \} \beta_1 \\
 v_K - \omega_K &= -W_K^u u_1 + \{ W_K^T - W_K^u (k-1) \lambda \} \beta_1
 \end{aligned} \quad (13)$$

Let us compare these results obtained here with those obtained by letting all the forces express in the sine expansion as given by W. Klemm in the following forms :

$$\left. \begin{aligned}
 \omega_i &= \frac{2^{n-1}}{n} \sum_{x=1}^{n-1} W_x \sin \frac{i \pi}{n} x \\
 W_x &= \frac{n-1}{i} \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \sin \frac{x \pi}{n} i
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

The relationship between the distortion and load in each term of those expansions may be almost the same as those obtained by the Fourier series, if the number of cross beams is fairly large. Therefore, it is useful to employ those equations. (14) for the calculation of the moments due to the vertical loads and reactions between the main girder and cross beam, and the end moments of the cross beams given by eq. (7) and eq. (13).