

引張りを受ける有孔薄板の極限解析

正員 岡 林 稔*

要 旨 塑性理論における極限解析法によって有孔引張り材の塑性限界を調べたもので、これにより有孔引張り材の限界荷重を求める近似計算法を提案したものである。

1. 仮 定

最初に次の仮定が許されるものとする。

- 1) 材料は非圧縮性の完全塑性体であり、降伏は Mises の降伏条件にしたがう。
- 2) 薄板は近似的に平面応力の状態にある。すなわち板厚方向に z 軸をとるとき

$$\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

σ_x, σ_y および τ_{xy} は z に無関係

平面応力の問題に塑性理論を適用して、その応力状態や塑性流れの状態を解析することは大変むずかしいが、極限解析法¹⁾によれば限界荷重（無制限塑性流れを起し始めるときの荷重）の上界および下界を求めることができるから、なるべく真の値に近い限界荷重をこれによって探してみる。平面応力の場合、平均応力度 S は

$$S = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3}$$

となり、偏差応力度の成分は次のごとくなる。

$$S_x = \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y), \quad S_y = \frac{1}{3}(-\sigma_x + 2\sigma_y),$$

$$S_z = -\frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y)$$

したがって Mises の降伏条件は

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{(2\sigma_x - \sigma_y)^2}{9} + \frac{(-\sigma_x + 2\sigma_y)^2}{9} + \frac{(\sigma_x + \sigma_y)^2}{9} \right\} + \tau_{xy}^2 \leq k^2$$

整理して

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 \leq 3k^2 \dots\dots\dots(1)$$

となる。 k は純粋せん断の降伏応力度であり、単純引張りの降伏応力度は $\sqrt{3}k$ である。

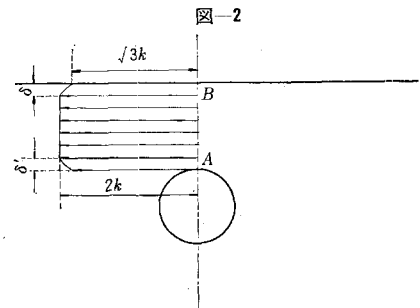
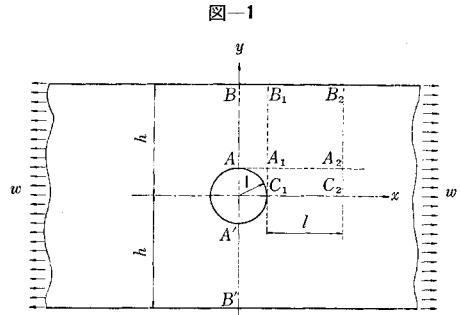
2. 円孔1個が帯状板の中心線上にある場合

円孔の半径を1とする。図-1においてAB(あるいはA'B')上の降伏条件は左右対称性により、次のごとくなる。

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y \leq 3k^2 \dots\dots\dots(2)$$

したがって σ_x の最大値は $2k$ であり、このとき σ_y は k になっていなくてはならない。また $\sigma_y = 0$ ならば

* 名古屋工業大学教授 土木工学科



σ_x は大きくとも $\sqrt{3}k$ でなければならない。このことより AB 上では降伏条件だけからいえば 図-2 のとき応力分布が考えられるわけであり、 $\delta, \delta' \rightarrow 0$ の極限を考えれば、 x 方向の引張りの合力は次のごとくなる。

$$2k(2h-2)$$

これを総断面積で割った値 w は次のごとくなる。

$$w = 2k \frac{h-1}{h} \dots\dots\dots(3)$$

(3) 式は降伏条件だけから求めたものであるが、限界荷重に対する一つの上界を与えるものである。なお極限解析法にしたがって限界荷重の上界を求めるには、適当な許容速度の場を考えなければならないが、(3) 式の値ならば比較的簡単な許容速度の場を考えることによって導くことができる。

限界荷重の下界を極限解析法にしたがって求めるには許容応力の場を考えなければならないが、その簡単な例として次のようなものが考えられる。図-1において

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

の部分についていけば十分である。

ABB₁A₁ 部…強さ $wh/(h-1)$ の一様な x 方向引張り

AA₁C₁ 部…無応力

C₁B₁B₂C₂ 部 ($x-1=\xi$ とおいて)

$$\left. \begin{aligned}
 & \left\{ \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{w}{l^3} (3l\xi^2 - 2\xi^3) \\
 \sigma_y &= \frac{3w}{l^3} (2\xi - l)(h-y^2) \\
 \tau_{xy} &= -\frac{6w}{l^3} \xi y(l-\xi)
 \end{aligned} \right. \quad (4) \\
 & \left\{ \begin{aligned}
 \sigma_x &= \frac{w}{(h-1)l^3} (hl^3 - 3l\xi^2 + 2\xi^3) \\
 \sigma_y &= \frac{3w}{(h-1)l^3} (2\xi - l)(h-y)^2 \\
 \tau_{xy} &= -\frac{6w}{(h-1)l^3} \xi(l-\xi)(h-y)
 \end{aligned} \right. \\
 & x > (l+1) \dots \text{強さ } w \text{ の一樣な } x \text{ 方向引張り}
 \end{aligned}
 \right\}$$

ここで

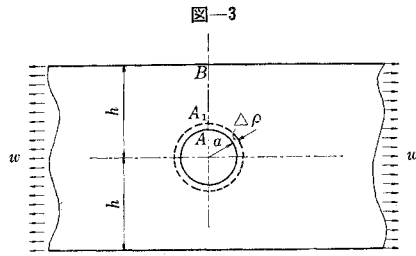
$$w = \sqrt{3k} \frac{h-1}{h} \dots\dots\dots (5)$$

とし l を十分大きくとれば、到るところ降伏不等式を満足し釣合条件および境界条件も満足するから、これは静的許容応力の場合である [(4) 式中 C_1, B_1, B_2, C_2 部に対する応力度は高さ l 、支間 $2h$ のはりの普通の曲げ理論による応力度の値を用いてある]。したがって (5) 式は限界荷重に対する一つの下界を考える。

この結果は孔が円形であるということが少しも考慮されていない。孔の y 方向の最大巾が 2 でありさえすれば x 方向の巾が何であっても同じである。よって次に、孔が円形であることを考えて、これより少しでも大きい下界を求めるため次のようなことを考える。図-3 において外力の強さ w を次第に大きくして (弾性応力状態) 最初に円孔周縁上の A が降伏するときの w を定める。ここで円孔周辺で半径 ρ が

$$a + 4\rho > \rho > a \quad (4\rho \text{ はごく小さい})$$

の部分の応力状態はこのままにし、その他の部分に対しては、あたかも半径が $(a+4\rho)$ の円孔があるものと仮定して、外力 $4w$ を加えたときの弾性応力状態を加算する。この $4w$ は A_1 部がちょうど降伏するような大ききとする。このような操作を順次くり返して仮想円孔の半径が h に達するまで行なう。この状態は釣合条件、境界条件、降伏不等式をすべて満足するから、最後の外力総計は限界荷重の下界を与える。なお、この状態の各段階における弾性応力状態を厳密に求めることは困難で



あるが、極限解析法では、応力度成分が前記の3条件さえ満足すればよいのであるから、近似式として次式を用いることとする (正確には検算していないが、数点について検算してみた結果から、この式を用いても到るところ降伏不等式を満足するものと思われる)。すなわち応力関数 ϕ として (ρ は円孔の半径) 次のようにおく。

$$\begin{aligned}
 \phi = w & \left[\frac{y^2}{2} + \frac{(h^2 - y^2)^2}{(\sqrt{x^2 + y^2} - \rho + h - y)^2 (\sqrt{x^2 + y^2} - \rho + h + y)^2} \right. \\
 & \left\{ -\frac{\rho^2}{4} \log \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} - \frac{\rho^2}{4} + \frac{\rho^4}{4(x^2 + y^2)} + \frac{3\rho^2 x^2}{x^2 + y^2} \right. \\
 & \left. \left. - \frac{3\rho^4 x^2}{2(x^2 + y^2)^2} + 3A \right\} \right. \\
 & \left. + \frac{(h^2 - y^2)^3}{(\sqrt{x^2 + y^2} - \rho + h - y)^3 (\sqrt{x^2 + y^2} - \rho + h + y)^3} \right. \\
 & \left. \left\{ -\frac{2\rho^2 x^2}{x^2 + y^2} + \frac{\rho^4 x^2}{(x^2 + y^2)^2} - 2A \right\} \right]
 \end{aligned}$$

ただし、 $A = \rho(h^2 - \rho^2)(4h - \rho)/12h^2$

これより応力度成分は次式によって計算する。

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

この式は $h \gg \rho$ のとき円孔の付近ではほとんど

$$\begin{aligned}
 \phi = w & \left\{ \frac{y^2}{2} - \frac{\rho^2}{4} \log \frac{x^2 + y^2}{\rho^2} + \frac{\rho^4}{4(x^2 + y^2)} + \frac{\rho^2 x^2}{x^2 + y^2} \right. \\
 & \left. - \frac{\rho^4 x^2}{2(x^2 + y^2)^2} \right\}
 \end{aligned}$$

となり、 $\rho \rightarrow h$ のときは $x=0$ 上で σ_x がほとんど一樣に $wh/(h-\rho)$ となるように作った。また各段階における 4ρ はできるだけ小さく選んだ方がよいわけであるが、便宜上 $(h-a)$ を 10 等分し、その間では $4w$ の強さや応力度が直線あるいは放物線的に変化するもの

表-1 ($w=0.3077$)

y	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
$4w$ の強さ	1.3420	0.7230	0.3825	0.1603	0.0542	-0.0139	-0.0367	-0.0296	-0.0220	-0.0097	0
σ_x	1.0	1.0548	1.0624	1.0532	1.0386	1.0239	1.0042	1.0121	1.0001	0.9994	1.0
σ_y	0	0.1205	0.1394	0.1167	0.0824	0.0497	0.0084	0.0246	0.0001	-0.0013	0

注 1) $4w$ の強さは直線的に変化するものと仮定する。したがって例えば、 ρ を 1.0 から 1.2 に拡大する間に増加すべき $4w$ は $\frac{1.3420 + 0.7230}{2} \times 0.2$

となる。

注 2) 各点の応力度は無限度で単位の強さの引張り外力を加えたときの値が ρ に対して放物線的に変化するものと仮定する (ρ に対する変化の割合が $4w$ の強さよりも激しいだろうとの推定による)。したがって例えば、 $y=1.2$ に対する応力度を求めるためには $w=1$ に対し $\rho=1.0, 1.1, \text{ および } 1.2$

の 3 つの場合について応力度の値を計算しておく必要がある。

表-2 ($w=0.3271$)

y	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0
Δw の強さ	1.1600	0.3740	0.1318	0.0136	-0.0071	-0.0222	-0.0112	-0.0111	-0.0021	-0.0026	0
σ_x	1.0	1.0773	1.0589	1.0329	1.0134	1.0008	0.9958	0.9954	0.9970	0.9990	1.0
σ_y	0	0.1786	0.1306	0.0694	0.0273	0.0017	-0.0084	-0.0092	-0.0061	-0.0020	0

との仮定を設けて計算した結果は次のとおりである。円孔の真の半径 a を長さの単位にとり、1 とする。また応力度等は単純引張りの降伏応力度 $\sqrt{3}k$ を単位にとり、1 とする。よって、 $h=3$ の場合の $x=0$ 上の各値を表-1 に示す。

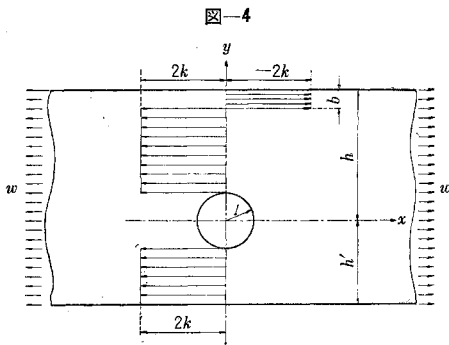
以上により $h=3$ の場合の引張り外力の大きさ ($y>0$ の部分について) は 2.051 となり、(4) 式より得られる値 2 に比して 2.5% 程度大きい。同様に $h=6$ の場合を表-2 に示す。

この結果、引張り外力の大きさ ($y>0$ の部分について) は 5.092 となり、(4) 式より得られる値 5 に比して 1.8% 程度大きい。

以上から、円孔が帯状板の中心線上にあって h が a の数倍程度であれば、限界荷重の下界として (4) 式で計算される値より 2~3% 程度高いものをもってよいだろうと推定される。

3. 帯状板の中心線をはずれて1個の円孔がある場合

図-4 において $h>h'$ とする。(3) 式を導いたときと同様に降伏条件だけから、この場合の限界荷重に対する上界を求めると、釣合条件からの制約を受けて 図-4 の状態が最大であることが容易にわかる。



ただし
$$b = \frac{h+h' - \sqrt{(h+h')^2 - 4(h-h')}}{2}$$

$$w = \frac{2k\{\sqrt{(h+h')^2 - 4(h-h')} - 2\}}{h+h'} \quad (6)$$

であって、上の直線限界から巾 b の間は圧縮応力。また前同様に孔が円形であることを考慮せずに限界荷重の下

界を求めれば

$$1 > x > -1, h > y > 1 \text{ (および } -1 > y > -h')$$

の範囲では σ_x は x に無関係に 図-4 の状態の $2k$ を $\sqrt{3}k$ に代えたもの、 σ_y および τ_{xy} はともに 0 とし

$$1 > x > -1, 1 > y > -1$$

の範囲は無応力状態

$$x > 1$$

に対しては (4) 式に準じてとれば静的許容応力の場合が得られるから、

$$w = \frac{\sqrt{3}k\{\sqrt{(h+h')^2 - 4(h-h')} - 2\}}{h+h'} \dots (7)$$

が得られる。ただこの場合は、上の直線境界から巾 b の間では長い区間にわたって x 方向の圧縮応力を考えているので、(7) 式の値をそのまま下界にとることに不安を感じる。よって、 x 方向の垂直応力度はどれも圧縮にはならないという制限を加えると (6) 式の b の代りに

$$b = \frac{h+h' - \sqrt{(h+h')^2 - 8(h-h')}}{2} \dots (8)$$

とし、この範囲では $\sigma_x = 0$ とする。かつ (7) 式の代りに

$$w = \frac{\sqrt{3}k\{h+h' - 4 + \sqrt{(h+h')^2 - 8(h-h')}\}}{2(h+h')} \dots (9)$$

を用いればよいこととなる。しかし、(7) 式の結果と (9) 式の結果は実はほとんど差がない。実際に数字を入れてみると表-3 に示すごとくである。

4. 円孔を有する断面が2列ある場合

第1に、この場合も孔が円形であることを考慮しないで下界を求める。孔が円形であることを考慮すれば、その値より 2~3% は下界を高めてもよいであろうと推定される。

第2に、 x 方向の引張り応力度は前同様に圧縮が起らないものとの制限を設ける。そもそも前に x 方向の応力度に圧縮が起る場合を静的許容応力の場合に採用することに不安を感じたのは座屈ということ考えたからである。しかし、これは実際に起る応力状態について問題にするべきもので、実際の応力状態が座屈を起こさないものなら、それに対する静的許容応力の場合どんな応

表-3 ($w/\sqrt{3}k$ の表)

h'	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
h	4	5	6	7	8	5	6	7	8	6	7	8
(7) 式	0.6726	0.6854	0.7007	0.7165	0.7318	0.7528	0.7592	0.7673	0.7761	0.8015	0.8052	0.8100
(9) 式	0.6717	0.6830	0.6972	0.7123	0.7273	0.7524	0.7583	0.7659	0.7743	0.8014	0.8047	0.8093

力状態であっても釣合条件と境界条件を満足し、降伏不等式に反しなければ極限解析の理論に矛盾を生じない。それでは実際の応力状態が座屈を起こすようなものであることがあるであろうか。もしそうであれば極限解析の理論をそのまま適用はできなくなる。座屈という現象は同時に2つ以上の釣合状態が考えられる場合でなければ起こらないから、実際の応力状態で起こるとすれば、塑性領域と孔と座屈領域とが連続して帯状板の巾を横断するような場合にはじめて考えられ得るものと思われる。しかしこのような状態に達するときには塑性領域が相当に発達して塑性領域と孔とが連続してほとんど帯状板の巾を横断するに近い状態になっておるものと推定し、そのまま極限解析の理論を適用して計算することにする。そうすれば、 x 方向の圧縮が起こらないようにとの制限は不用であるが、2. の場合の表-3 に示すとおり、この制限の存否はあまり計算結果に影響しない。円孔を有する断面が2列ある場合についても同様に影響が少ないであろうと考えてこの制限を残すことにした。その方が計算をいくらかでも楽にするという理由による。

以上の仮定によって行なった限界荷重の下界の計算は次のごとくである。図-5 においてIおよびIIIの領域は

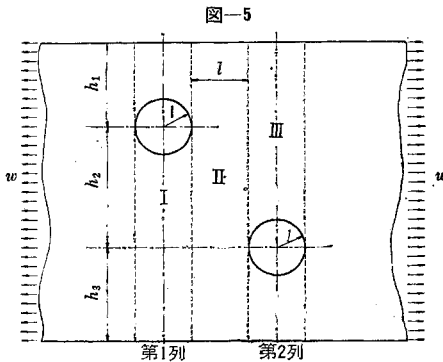


図-5



図-6

2) の場合と同様に $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ の部分と無応力の部分とからなり、これらより外側の部分についても 1. や 2. に述べた応力状態に準じたものを考える。IIの領域については、これを取り出して示した 図-6 について述べる。

p および q は図に示すとおり x 方向の垂直応力度を示し、その大きさは y の関数であって

$$\int_0^{h_1+h_2+h_3} p dy = \int_0^{h_1+h_2+h_3} q dy = N \dots\dots\dots(10)$$

$$\int_0^{h_1+h_2+h_3} p y dy = \int_0^{h_1+h_2+h_3} q y dy = N \frac{h_1+h_2+h_3}{2} \dots(11)$$

でなければならない。また

$$h_2+h_3+1 > y > h_2+h_3-1$$

では $p=0$ であり

$$h_3+1 > y > h_3-1$$

では $q=0$ であり、その他の部分では p, q いずれも大きくとも $+1$ でなければならない。

$$l > x > 0$$

の部分については

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= p - \frac{p-q}{l^3} (3lx^2 - 2x^3) \\ \sigma_y &= \frac{6(2x-l)}{l^3} M \\ \tau_{xy} &= \frac{6x(l-x)}{l^3} S \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ただし $M = y \int_0^y (p-q) dy - \int_0^y y(p-q) dy,$

$$S = \int_0^y (p-q) dy$$

で示される応力状態を考える。こうすれば到るところ、釣合条件を満足し

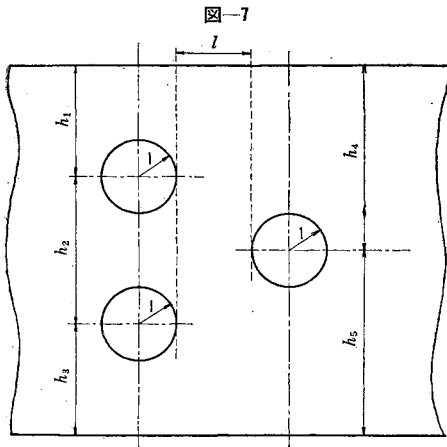
$$y=0 \text{ および } y=h_1+h_2+h_3$$

でもに

$$M=S=0$$

であるから境界条件も満足する。したがって、 p および q を上の制限の範囲内で適当に定め、しかもどこでも降伏不等式を満足するようにする。その中で与えられた l に対して最も大きい N を与えるものをもって、その l に対する限界荷重の下界とする。したがって、下界を求めるためには p および q の種々の分布状態について数多くの試算を行なって比較する必要があるが、この問題は大きくわけて2つの型にわけられる。第1は 図-5 のごとく、第1列の円孔の数と第2列の円孔の数とが等しい場合であり、第2は 図-7 のごとく第1列の円孔の数より第2列の円孔の数が少ない場合である。 l の値を種々に変えた場合、最大の N は $l \rightarrow \infty$ の場合に起こるが、第2の型では有限の l に対してその値に達し得る点で異なっている。

よって、第1の型の例として 図-5 の h_1 と h_3 とが



等しい上下逆対称の場合について限界荷重の下界を求め
る。そのためには領域Ⅱの部分の応力状態を定めればよ
く、逆対称性により 図-6 ($h_1=h_3$) において

$$\frac{h_1+h_2+h_3}{2} = h_1 + \frac{h_2}{2} \geq y > 0$$

の部分について述べれば十分である。なお今後も長さの
単位には円孔の半径をとり、応力度などの単位には単純
引張りの降伏応力度 $\sqrt{3}k$ をとる。

$$y = h_1 + \frac{h_2}{2}$$

においては

$$M=0, \quad p=q$$

が成立し、その位置での S を仮定したとき (それを S_0
とする)

$$h_1 + \frac{h_2}{2} > y > h_1 + 1$$

の範囲では常に

$$x = \frac{l}{2}$$

で降伏不等式の等号が成立し、その他の点では不等号が
成立するように p および q を定めるのが有利であるこ
とが試算によりわかる (l と h_2 との寸法の関係によっ
ては、 p および q が $+1$ を越えてはならないという制限
により、これに多少修正を要する場合もある)。

$$h_1 + 1 > y > h_1 - 1$$

の範囲では

$$q=0$$

であって、 p はなるべく y の値の大きい部分に集中し
た方が有利である。したがって、この部分は

$$p=1 \quad \text{と} \quad p=0$$

の部分から成る。

$$h-1 > y > 0$$

では、釣合条件と

$$x=l$$

で降伏不等式の等号が成立するという条件で p および
 q を定める。しかるときは、この場合も p は

$$p=1 \quad \text{と} \quad p=0$$

の部分から成るという結果が得られる。以上の方針で
 S_0 を種々に仮定し、

$$h_1 + \frac{h_2}{2} > y > 0$$

の区間を細分して、各区間ごとに p および q は直線的
変化をすると仮定して

$$h_1=h_2=3, \quad h_2=4$$

の場合について計算した結果を次に示す。

$$l=4$$

と指定すると 表-4 の結果が得られる。

表-4

S_0	0.8	0.78	0.76
N	6.4032	6.4040	6.4038

したがって

$$N=6.4040$$

を採用する。その他の l に対しても同様の計算を行なっ
て 表-5 の結果を得る。

表-5

l	4	5	6	8	10
N	6.4040	6.5614	6.6715	6.8495	6.9509

この寸法の場合は

$$N_{\max}=7.1231, \quad N_{\min}=6.0$$

であって、表-5 の結果は近似的に次式で表わすことが
できる。一般の l に対して

$$\frac{N-N_{\min}}{N_{\max}-N} = Al^2 \dots\dots\dots(13)$$

この場合、定数 A を 表-5 の結果から求めて、結局次
式を得る。

$$N = \frac{6.0 + 0.3134 l^2}{1 + 0.0440 l^2}$$

次に第2の型の例として、図-7 の h_1 と h_3 および h_4
と h_5 がそれぞれ等しい上下対称の場合について下
界を求める。この場合 l が比較的小さいときは

$$h_5 - 1 > y > h_3 + 1$$

の範囲で

$$M=0, \quad p=q$$

になる箇所があるので、試算によってその位置を探し、
そこでの S を仮定して

$$h_5 - 1 > y$$

について、前同様の計算を行なう。 l が比較的大きいと
きは

$$y = h_5 - 1$$

における S の絶対値が1を越えてはならないという制
限により多少の修正を受ける。

$$h_3 > y > h_5 - 1$$

については、 p を等分布とし、この間の p の合力が

$$y = h_5 - 1$$

における S の絶体値に等しくなるようにすればよい。以上によって p および q が定まれば N が定まる。よって

$$h_1=h_3=3, \quad h_4=h_5=6$$

の場合について計算した結果は表-6のごとくである。

表-6

l	2	3	4	5
N	6.4443	6.9759	7.5721	8.0

N が最大値 (=8.0) をとる l の値は 4 と 5 の間にある。この寸法では

$$N_{\min}=6.0$$

であるが、表-6 の結果は近似的に次式で表わすことができる。一般の l に対して

$$N=N_{\min}+Al^2 \leq N_{\max} \dots\dots\dots(14)$$

定数 A の値を表-6 の結果より求めて結局次式を得る。

$$N=6.0+0.1059 l^2 \leq 8.0$$

最後に上記の 2 例を参照して、一般の場合の近似値を求める方法を述べる。 l の 2, 3 の値に対して N の近似値を得れば (13) 式あるいは (14) 式を参照して他の l に対する N も推定できる。第 1 の型で l が比較的大きい場合は簡単である。すなわち、 l が大きければ p および q の分布は $l \rightarrow \infty$ の場合に非常に近いであろう。 $l \rightarrow \infty$ の場合のそれはわかっているから、これと相似で一定の比率でその大きさを縮小した p および q を考え、 N の値が例えば

$$N=N_{\min}+0.9(N_{\max}-N_{\min})$$

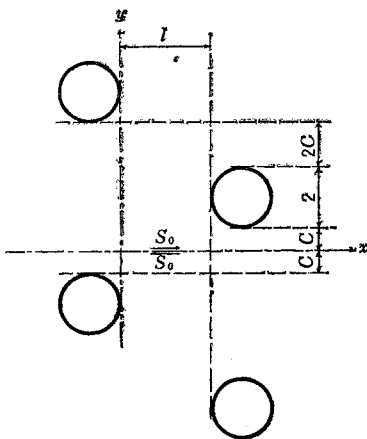
となるように選ぶ。次に y のいかなる値に対して

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2$$

の値が大きくなるかということは視察によって簡単にいくつか選べるから、それらの y の値に対して x の種々なる値につき上式の値を計算し、これが最大で 1 になるように l を定めればよい。

第 1 の型および第 2 の型を通じて l があまり大きくない場合は次のごとくして N の近似値を求め得る。最初に図-8のごと

図-8



く第 1 列と第 2 列の円孔が交互に配置され、かつ間隔が等間隔である部分の p および q の分布について述べる (間隔が等間隔でない場合は多少試算の回数が増すが、ほぼ類似の考え方で計算することが

できる)。座標軸を図のごとくとるとき

$$0 \geq y \geq -(c+1)$$

の範囲で p および q の分布を定めれば十分である。なお以後において

添字 0 は $y=0$ における値を

添字 1 は $y=-c$ における値を

表わす。よって

$$y=0$$

においては

$$M_0=0, \quad p_0=q_0$$

が成立するものとし、 p_0 および q_0 の大きさは S_0 を仮定して

$$x = \frac{l}{2}$$

で降伏不等式の等号がちょうど成立するように定める。次に

$$0 > y > -c$$

の間では p および q が、それぞれ直線的变化をするものとして

$$x = \frac{l}{2}, \quad y = -c$$

でちょうど、降伏不等式の等号が成立するように p_1 および q_1 を定める。このままでは降伏不等式をやや上まわる部分が生ずる。その最大はほぼ

$$x = \frac{l}{2}, \quad y = -\frac{c}{2}$$

に生ずる。よって

$$x = \frac{l}{2}$$

上で平均して

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 = 1$$

が成立するようにするため

$$x = \frac{l}{2}, \quad y = -\frac{c}{2}$$

における

$$A = \sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2$$

を求め、すべてこの応力度に

$$A' = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{A}} \right)$$

を乗ずる。以後 A' を乗じた量にはすべて肩符 ' をつける。なおこの際 S_1' を求めておく。

次に

$$-c > y > -(c+1)$$

では $|S_1'|$ を巾 1.0 で除して

$$p=0 \quad q = \frac{|S_1'|}{1.0}$$

を考える。以上によって、 p および q の分布が定まるから巾 $(2c+2)$ 当りの引張り合力 N' も定まる。この計算順序を表にして示すと表-7のごとくなる。

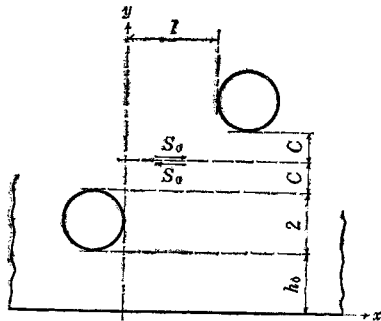
表-7

記号	S_0	$p_0=q_0$	Q'	M_1	S_1	Q	p_1	q_1	$(\sigma_x)_2$	S_2	τ_2	A
計算法	仮定	$\sqrt{1-\frac{6.75 S_0^2}{l^2}}$	$\frac{6 c S_0}{2 c^2+3 l^2}$	$-\frac{l^2}{2} Q'$	S_0-cQ'	$\sqrt{1-\frac{6.75 S_1^2}{l^2}}$	$Q+Q'$	$Q-Q'$	$\frac{p_0+Q}{2}$	$S_0-\frac{cQ'}{4}$	$\frac{1.5 S_2}{l}$	$(\sigma_x)_2^2+3\tau_2^2$
記号	A'	p_0'	M_1'	S_1'	p_1'	S_0'	N'					
計算法	$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{A}}\right)$	$A'p_0$	$A'M_1$	$A'S_1$	$A'p_1$	$A'S_0$	$2 c p_0'+ S_1' $					

よって S_0 を種々に代えて N' の最大値を求める。

第2に 図-9 のごとく直線境界に円孔が隣接する部分について述べる。この場合も2円孔のちょうど中間

図-9



$$y = h_0 + 2 + c$$

において

$$M=0$$

が成立していると仮定し、 S_0 を適当に仮定して前の方法と同様に計算を進める。

$$h_0 + 2 > y$$

の範囲では釣合と降伏条件とから p および q を定めるのであるが、表-8 のごとく計算すれば近似的にこれら満足する結果が得られる。

表-8

記号	M_1'	S_1'	p_0'	b	N''
計算法	表-7に同じ			$\frac{2M_1'+S_1'^2}{4+2S_1'}$	$h_0 - \frac{3b^2}{4l^2} + 2cp_0' + S_1' $

表-9

$h_1=h_3$	h_2	N_{min}	N_{max}	$N_{0.9}$	$N_{0.9}$ に 対する l	比較的小さ い l (l_0)	l_0 対する N	N の近似式
3	4	6.0	7.1231	7.0108	16.90	4	6.3948	$\frac{6+0.228 l^2}{1+0.032 l^2}$
3	5	7.0	8.0	7.9	19.03	5	7.3680	$\frac{7+0.192 l^2}{1+0.024 l^2}$
3	6	8.0	8.8990	8.8091	23.16	6	8.3516	$\frac{8+0.151 l^2}{1+0.017 l^2}$
4	5	9.0	10.1789	10.0610	23.53	5	9.3680	$\frac{9+0.173 l^2}{1+0.017 l^2}$
4	6	10.0	11.0828	10.9745	26.815	6	10.3516	$\frac{10+0.144 l^2}{1+0.013 l^2}$

表-10

$h_1=h_3$	$h_4=h_5$	N_{min}	N_{max}	l_1	l_1 対する N	l_2	l_2 対する N	N の近似式
3	6	6.0	8.0	2	6.4030	3	6.9194	$6+0.101 l^2 \leq 8$
3	6.5	7.0	9.0	3	7.5834	4	8.0176	$7+0.064 l^2 \leq 9$
3	7	8.0	10.0	4	8.7644	5	9.1199	$8+0.046 l^2 \leq 10$

よって

$$h_0 + 3 + 2c > y > 0$$

間の引張り合力 N'' が得られ、 S_0 を種々に代えて N'' の最大値が得られる(ただし、前述の N' や反対側直線境界付近の N'' をもあわせて考えて全体の合力が板中の中央を通らねばならないという制限内で N'' を定める必要がある)。

最後に 図-10 のような場合、すなわち同じ列に隣接し (y に関して) 円孔がある場合は O_1 と O_2 との中間に

$$M=S=0$$

の部分があると考えるのが結局有利であり、したがって O_1 と O_2 との間に直線境界があるものと考えて前の方法を適用すればよい。この場合も最後に全体の釣合を崩さないように配慮すべきである。

以上の方法によって、実際に計算した N の近似値の数例を掲げる。

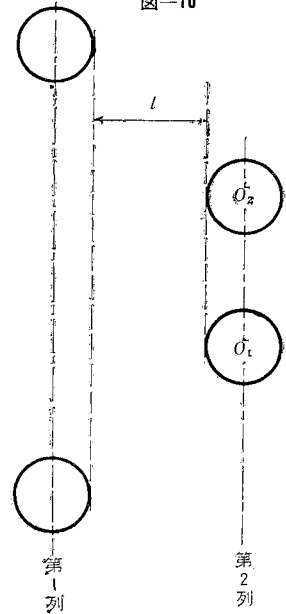
図-5 の型では 表-9 のごとく結果を得る。

ただし

$$N_{0.9} = N_{min} + 0.9(N_{max} - N_{min})$$

図-7 の型では 表-10 のごとく結果を得る。

図-10



第1列

第2列

参考文献

- 1) Prager, W. and Hodge, P.G.: Theory of Perfectly Plastic Solids

(原稿受付: 1961.5.23)

LIMIT ANALYSIS OF THE TENSIONED INFINITE STRIP CONTAINING CIRCULAR HOLES

By Minoru Okabayashi, C.E. Member

Under the undermentioned assumption, the writer explains a method to calculate the approximate value of limiting tensile load on the infinite strip containing circular holes.

Assumption 1. The material is incompressible and perfectly plastic solid, and obeys Mises' yield condition.

Assumption 2. The infinite strip is approximately in a state of plane stress.

The yield condition can be written as follows.

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2 \leq 3 k^2 \dots\dots\dots (1)$$

The coordinates x is identified with the direction of axis of the strip.

k denotes the yield stress of pure shear and $\sqrt{3}k$ the yield stress of simple tension.

1. Case of one hole on the centre line of the strip.

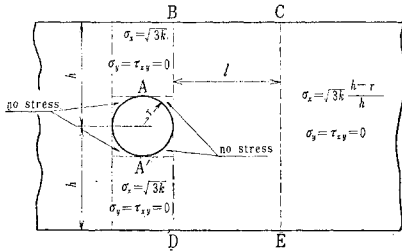


Fig. 1

To obtain lower bound of the limiting load, the stress field shown in Fig. 1 is considered as one of the statically admissible stress field. Zone BCDE is considered as a beam of height l and span $2h$, and the stress distributions of neighbouring zones are load distributions on this beam. The stress field of zone BCDE is given by the common bending theory applying to this beam.

Then, let l be sufficiently large, the statically admissible stress field is obtained. Therefore, the lower bound of the limiting load N_L is obtained as equation (2)

$$N_L = 2 \sqrt{3} k (h-r) \dots\dots\dots (2)$$

By symmetry and yield condition, the upper bound of the limiting load N_U is obtained as equation (3).

$$N_U = 4 k (h-r) \dots\dots\dots (3)$$

Considering that the hole is circular, it is

possible to obtain N_L larger than the value of equation (2). The result of calculation shows that it is about 3% larger than the value of equation (2) when the breadth of the strip is several times the diameter of the hole. Therefore, on the following problems too, the writer calculates the lower bound of the limiting load ignoring that the hole is circular, and estimates that the real limiting load is at least several % larger.

2. Case of one eccentric hole.

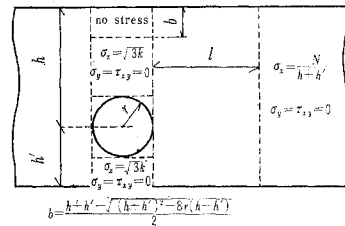


Fig. 2

The stress field shown in Fig. 2 is considered under the restriction that σ_x does not take the negative value (compression). N is obtained as follows :

$$N = \frac{\sqrt{3}}{2} k \{ h + h' - 4r + \sqrt{(h+h')^2 - 8r(h-h')} \} \dots\dots\dots (4)$$

Without above restriction, the value of N is almost unchangeable.

3. Case of two sections containing circular holes.

Two types are considered.

1st. type:—Two sections contain same number of holes as shown in Fig. 3.

2nd. type:—The number of holes of the

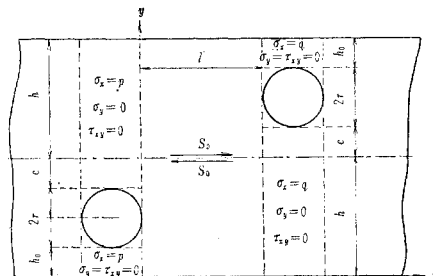


Fig. 3

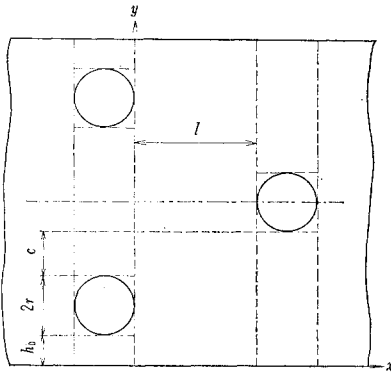


Fig. 4.

first section is more than that of the second section as shown is Fig. 4.

Varying the distance between two sections, the value of the limiting load N varies and becomes maximum when the distance becomes infinitely large. But, on the second type, the value of N can be identified with the maximum value when the distance between two sections is finite and appropriate.

i) Case of 1st. type

In Fig. 3 p denotes the normal stress on the straight line $x=0$, and q on the straight line $x=l$. Then, p and q must satisfy the following equations.

$$\int_0^{2h} p dy = \int_0^{2h} q dy = N \dots\dots\dots (5)$$

$$\int_0^{2h} p y dy = \int_0^{2h} q y dy = Nh \dots\dots\dots (6)$$

$$p, q \leq \sqrt{3} k$$

especially $p=0$ for $h_0 + 2r > y > h_0$

$q=0$ for $h+c+2r > y > h+c$

For $l > x > 0$, the stress field shown by the following equations is considered.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= p - \frac{p-q}{l^3} (3lx^2 - 2x^3) \\ \sigma_y &= \frac{6(2x-l)}{l^3} M \\ M &= y \int_0^y (p-q) dy - \int_0^y y(p-q) dy \\ \tau_{xy} &= \frac{6x(l-x)}{l^3} S, \quad S = \int_0^y (p-q) dy \end{aligned} \right\} \dots (7)$$

The values of p and q are chosen appropriately to satisfy the yield inequality everywhere, and make the value of N as large as possible for given l . The largest N is considered as the lower bound of the limiting load for given l . As a result of many trial calculations, it seems good to adopt the following principle. If M_0 and S_0 denote M and S on the centre line of the strip, respectively,

$$M_0 = 0$$

is satisfied. Assuming the value of S_0 , the values of p and q are determined to satisfy the following equation at $x=l/2$

$$\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3 \tau_{xy}^2 = 3 k^2 \dots\dots\dots (8)$$

Even for $h+c > y > h$, the values of p and q are determined by the same restriction. For $y > h+c$, the method of determining the values of p and q is not so difficult to use. Then, varying the assumed value of S_0 , the largest value of N is found. It is lower bound of the limiting load for given l .

ii) Case of 2nd type.

N can be obtained by the method analogous to the case of 1st. type. But, in Fig. 4

$$M = 0$$

does not satisfy

$$y = \frac{1}{2} \{ (h_0 + 2r) + (h_0 + 2r + c) \}$$

and therefore calculation is more complicated.

4. Method of the approximate calculation

Based on the results calculated on the above principle, the writer proposes the approximate calculating method. Here in Fig. 5 and Fig. 6, the writer shows two $N-l$ curves obtained by the approximate calculation method. (The radius of hole is taken as unit of length and $\sqrt{3}k$ as unit of stress. The thickness of the strip is considered as unity.)

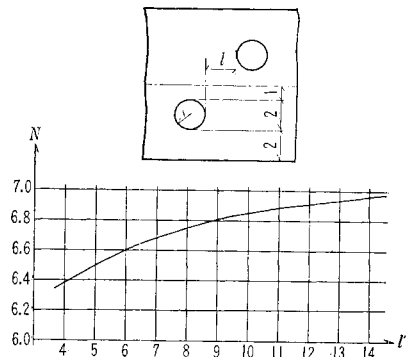


Fig. 5

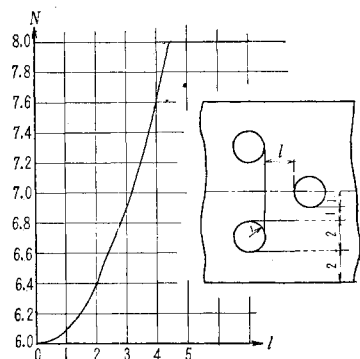


Fig. 6