

糸張式(移動弦)曲線整正法の精度と食違量の 合理的消去法について

正員 多 谷 虎 男*

要旨 鉄道における曲線、すなわち円曲線および緩和曲線の整正には、かなり以前から主として糸張式曲線整正法が用いられてきたが、近年この従来の手作業による糸張式曲線整正法を機械化して軌道検測車または軌道試験車などにより、いわゆる“軌道狂い”なるものを測定することが、ますます盛んに行なわれるようになった。

このような状況にかんがみ、このさいます糸張式(移動弦)曲線整正法自体の原理的精度について、再検討を加え、測定結果の評価限度を明確にすることが必要であろうと考えられる。本稿は以上のような見地から、糸張式(移動弦)曲線整正法自体の原理的精度について、誤差論的に再検討を加え、測定結果の評価限度を示したものである。

1. 角図法の利点およびその誤差

糸張式(移動弦)曲線整正法の基本的原理が、元來角図法にもとづくものであることはいまさら説明するまでもないが、糸張式(移動弦)曲線整正法が角図法にもとづくものである以上、その誤差を考えるにはまず角図法の誤差について考察しなければならぬ。しかし、この問題は本稿の中心課題ではなく、また紙数の関係もあるので、ここでこの問題について詳細に論ずることは避け、単に結論的にその精度と長所を例示することとする。

角図法が直交縦横座標による曲線敷設法ならばに糸張式(移動弦)曲線整正法に比して精度上優れている点はおよそ次のとおりである。

(1) 直交縦横座標による曲線形の誘導または敷設では、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{(\ddot{y})}{\{1 + (\ddot{y})^2\}^{3/2}} \approx \ddot{y} \quad \text{または}$$

$$\mu = \frac{1}{\{1 + \tan^2 \varphi\}^{3/2}} \approx 1$$

あるいは $\tan \varphi \approx \varphi$

なる近似をしばしば行なう必要があるが、角図法では、曲率半径 ρ を曲線長 l の関数として表わし、直接、

$$\int_0^l \frac{1}{\rho} dl \quad \text{および} \quad \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dldl$$

の積分演算を行なうので、演算結果には前記のような近似による誤差をふくまない。

(2) 糸張式(移動弦)曲線整正法では一定長の弦を有する現場の曲線部分の“亘り正矢量”(注: 曲線上の

各点の曲率半径がつぎつぎに変化する場合に、このような曲線部分の両端を結んだ弦に対して得られる正矢量を“亘り正矢量”と呼び、曲線部分の中点の曲率円に対する一定弦長の正矢量を“曲率円正矢量”と呼ぶこととする)を測定し、この測定値を近似的に、

$$\frac{l^2}{8\rho} \quad (\text{ただし, } \rho: \text{曲線中点の曲率半径}, l: \text{弦長})$$

に等しいと見なして軌道狂いを算出するものであるが、曲率円正矢量を M とするとき、 $M = \frac{l^2}{8\rho}$ なる式は、元來近似式であり、かつこの場合“亘り正矢量”を“曲率円正矢量”に等しいと、見なすことによる誤差が重複する。しかるに角図法本来の方法では、正矢図から離れて

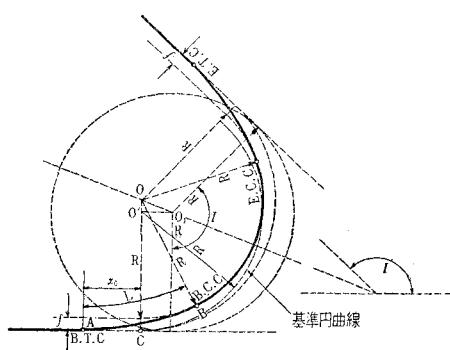
$$\int_0^l \frac{1}{\rho} dl \quad \text{および} \quad \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dldl$$

の数式的演算を行なうのであるから、この演算結果には上記のような誤差はふくまない。

角図法の精度上の利点は大体上述のようであるが(角図法の一般的利点としてはこのほかに、曲線座標を用いて曲線を敷設しえることもある)このような角図法においてさえ、誤差は決して皆無ではない。そのおもな原因是、積分演算の実行に当って、(a) 原点よりの曲線長を基準線上の各横座標点で基準線に立てた垂線との交点で測定し、常に $l \approx l_i$ と置くこと(ただし、 l_i : 敷設曲線の曲線長、 l_0 : 基準線の曲線長)、(b) 一定直線に対する基準曲線および敷設曲線の螺旋角(方向角)をそれぞれ φ_0, φ とし、 $\sin(\varphi - \varphi_0) \approx \varphi - \varphi_0$ と置くこと。の2つの仮定に起因している。

例えば図-1のような直線通減緩和曲線のそう入にお

図-1 角図法の誤差



いて、直線および C 点でこの直線に接する半径 R の円曲線を基準曲線に採用して角図法を適用すれば、第1条

* 工学博士、国鉄鉄道技術研究所

件:「緩和曲線終端 (B.C.C.) で基準線と緩和曲線の接線方向が互いに平行なるべきこと」すなわち,

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{1}{\rho} dl - \int_{x_0}^L \frac{1}{R} dl &= 0 \quad \text{より} \\ \int_0^L \frac{1}{R} \cdot \frac{l}{L} dl - \int_{x_0}^L \frac{1}{R} dl &= 0 \\ \left[\frac{l}{2RL} \right]_0^L - \frac{1}{R} (L - x_0) &= 0 \\ \therefore x_0 &= \frac{L}{2} \end{aligned} \quad \dots \quad (1)$$

が得られ、また第2条件:「緩和曲線の基準線に対する移程は、緩和曲線の終端 (B.C.C) において f なるべきこと」すなわち,

$$\begin{aligned} f &= \int_0^L \int_0^l \frac{1}{\rho} dldl - \int_{x_0}^L \int_{x_0}^l \frac{1}{R} dldl \quad \text{より} \\ f &= \left[\frac{l^3}{6RL} \right]_0^L - \left[\frac{1}{2R} l^2 \right]_{x_0}^L + \left[\frac{x_0}{R} l \right]_{x_0}^L \\ &= \frac{L^2}{6R} - \frac{1}{2R} (L^2 - x_0^2) + \frac{x_0}{R} (L - x_0) = \frac{L^2}{24R} \end{aligned} \quad (2)$$

なる周知の関係が得られ、緩和曲線の敷設に必要な緩和曲線上の各点の基準線に対する移程 e も、

$$\left. \begin{aligned} l < \frac{L}{2} : e &= \frac{l^3}{6RL} = \frac{L^2}{6R} \xi^3 \\ l > \frac{L}{2} : e &= \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dldl - \int_{x_0}^l \int_{x_0}^l \frac{1}{R} dldl \\ &= \frac{L^2}{6R} \xi^3 - \frac{L^2}{2R} \left(\xi - \frac{1}{2} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \quad (3)$$

として得られるけれども、緩和曲線終点 (B.C.C) 以後において、数式上、敷設円曲線と常に平行となるべき基準円曲線 (C点において直線と接する半径 R の円) は、図-1において見るように平行ではなく、円曲線終点 (E.C.C) 付近に至る頃にはついに敷設円曲線と交るに至る。このような平行となるべき性質は図-1にも明らかなように、むしろ半径 ($R+f$) の円曲線にある。すなわち、本来の角図法においてもまた、長区間の曲線敷設ではとうてい無視し得ない誤差を生ずるものである。

しかしながら一方、角図法における移程 (基準線に対する曲線座標の縦距) は、厳密には、同一曲線横座標を有する敷設曲線および基準曲線の上の点の2つの伸開線の長さの差 (B.C.C における接線による2つの伸開線の切断長の差) として与えられること (証明・略) と考え合わせれば、通常、一緩和曲線長程度の曲線区間では本来の角図法自体は実用に差し支えない程度の誤差しかふくまないものであることがわかる。

2. 糸張式曲線整正法 (移動弦正矢の測定による曲線整正法) における誤差

糸張式曲線整正法では、本来の角図法以外にさらにどのような誤差が追加せられるかを考察するに当って、まずこの方法の手作業に発生する誤差原因を作業順序に従って列挙すれば、

(1) 現場曲線の正矢測定値すなわち現場正矢を計算基礎として用いること (現場正矢の数値が、基準曲線正矢のように数学公式による解析算定値ではなく、測定値であること)。

(2) 計画曲線の曲率円正矢量 M として、

$$M = \frac{l_0^2}{8\rho} \quad (l_0 = \text{弦長}, \rho = \text{曲率半径})$$

なる近似公式を用いること。

(3) 本来の角図法の理論では、

$$\begin{aligned} e' &= e_0 + \int_0^l \int_0^l \left(\frac{1}{\rho'} - \frac{1}{\rho} \right) dldl \\ &= e_0 + \int_0^l \int_0^l \left(\frac{1}{\rho'} \right) dldl - \int_0^l \int_0^l \left(\frac{1}{\rho} \right) dldl \end{aligned}$$

を計算すべきであるのに対して、糸張式曲線整正法では近似的に e' の値として、

$$e_0 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^i (\bar{M}_i' - M_i) = e_0 + 2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^i \bar{M}_i' - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^i M_i \right)$$

を計算していること。

ただし e : 計画曲線に対する現場曲線の移程

e_0 : 原点における e の値

ρ' : 現場曲線の曲率半径

ρ : 計画曲線の曲率半径

\bar{M}_i' : 測点 i の現場正矢 (直り正矢)

M_i : 測点 i の計画正矢 (曲率円正矢) $\frac{l_0^2}{8\rho}$

l_0 : 弦長

さて (1) の原因による誤差は誤差解析の都合上、(3) の誤差の後に述べることとし、まずすべての数値は測定誤差をふくまないものとして考究を進めるこにする。

(2) の近似による個々の誤差は通常 0.01 mm 以下できわめてわずかな値に過ぎない (証明・略)。

次に (3) の誤差は、

$$\left\{ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^i (\bar{M}_i' - \int_0^l \int_0^l \left(\frac{1}{\rho'} \right) dldl) \right\} - \left\{ 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^i \left(\frac{l_0^2}{8\rho_i} \right) - \int_0^l \int_0^l \left(\frac{1}{\rho} \right) dldl \right\} \dots \quad (4)$$

であって、これだけの誤差が角図法本来の誤差に追加されるわけである。(4) 式において、まず第一項の誤差について考えるに、この誤差は一般に B.C.C., B.T.C. などの曲率変化点では「直り正矢」と「曲率円正矢」とが相違するためと、離散的二重和と積分値との相違の影響のために生ずるものであるが、千差万別の狂いを有する現場曲線について、これを一率に論ずることは困難である。そこで狂いのない円曲線 (緩和曲線のないもの) および3次緩和曲線をもつ円曲線について、この第一項がどのような誤差量となるかを調べて、狂いを有する現場曲線に対する目安を得ることにする。一般に、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dx dx &= \int_0^l \int_0^l \frac{l_1^2}{2\rho} \left(\frac{dx}{l_1} \right) \left(\frac{dx}{l_1} \right) \\ &\approx \int_0^l \int_0^l M \left(\frac{dx}{l_1} \right) \left(\frac{dx}{l_1} \right) \end{aligned}$$

であるから、この場合の第一項の誤差量は、

$$2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^i \bar{M}_i - 2 \int_0^l \int_0^l M\left(\frac{dx}{l_i}\right)\left(\frac{dx}{l_i}\right)$$

となるが、この値は円曲線については図-2 および表-1 に示すように、また、3次緩和曲線については図-3 および表-2 に示すように、完全に0となる。

次に(4)式の第二項の誤差は、上記の所論から、

$$\int_0^l \int_0^l \frac{1}{\rho} dx dx = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^i \bar{M}_i$$

が成立するから、結局、

$$2 \left(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^i M_i - \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^i \bar{M}_i \right) = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{i=1}^i (M_i - \bar{M}_i)$$

に等しい。しかるに「曲率円正矢」 M_i と「直り正矢」 \bar{M}_i とは B.C.C., B.T.C. などの曲率変化点でわずかに相違する ($l_0=10\text{m}$ の場合精々 1mm 程度以下である)だけであるから、その二重和演算のために測点数の増大とともに、この値は距離に比例して増大するけれども、長さ 100m 程度の緩和曲線では、終端で精々 20mm 程度の誤差となるに止まる。

以上(4)式の第一項および第二項に対する考察結果を

図-2 円曲線における測点と正矢との関係

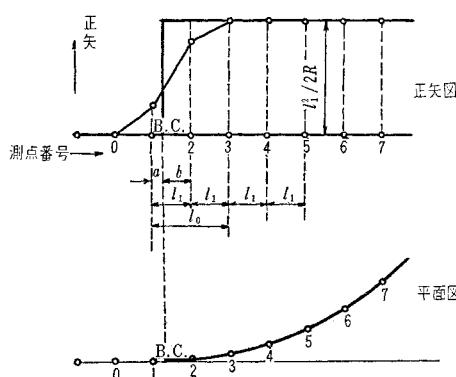


図-3 3次緩和曲線における測点と正矢との関係

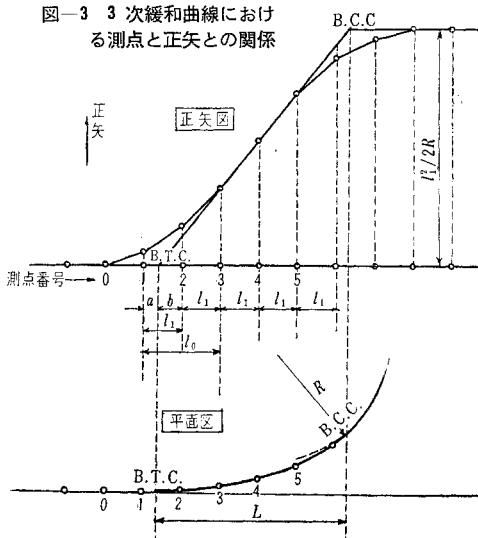


表-1 狂いのない円曲線における糸張式曲線整正法と角図法の比較

測点	直り正矢 M_i	累計 $\sum_i M_i$	移程 $\times \frac{1}{2} = \sum_i \bar{M}_i$
0	0	0	0
1	$\frac{b^2}{4R}$	$\frac{b^2}{4R}$	0
2	$\frac{(b+l_1)^2}{4R} - \frac{b^2}{4R}$	$\frac{(b+l_1)^2}{4R}$	$\frac{l_1^2}{4R}$
3	$\frac{l_1^2}{2R}$	$\frac{l_1^2}{2R} + \frac{(b+l_1)^2}{4R}$	$\frac{(b+l_1)^2}{4R}$
4	$\frac{l_1^2}{2R}$	$\frac{l_1^2}{2R} + \frac{2l_1(b+2l_1)}{4R}$	$\frac{(b+2l_1)^2}{4R}$
5	$\frac{l_1^2}{2R}$	$\frac{l_1^2}{2R} + \frac{2l_1(b+3l_1)}{4R}$	$\frac{(b+3l_1)^2}{4R}$
6

測点円正矢 M_i	$\int M\left(\frac{dx}{l_i}\right) = \frac{l_i^2}{2\rho} \cdot \left(\frac{dx}{l_i}\right) = \frac{l_i}{2} \int \frac{dx}{\rho}$	$\int \int M\left(\frac{dx}{l_i}\right)\left(\frac{dx}{l_i}\right) = \frac{1}{2} \int \int \frac{1}{\rho} dx dx$
0	0	0
1	0	0
2	$\frac{l_1^2}{2R}$	$\frac{l_1 b}{2R}$
3	$\frac{l_1^2}{2R}$	$\frac{l_1(b+l_1)}{2R}$
4	$\frac{l_1^2}{2R}$	$\frac{l_1(b+2l_1)}{2R}$
5	$\frac{l_1^2}{2R}$	$\frac{l_1(b+3l_1)}{2R}$
6

総合するに、狂いを有する現場曲線については第一項の値が完全に0ではない影響がつけ加わるが、結局(3)の原因による誤差は、長さ 100mm 程度の緩和曲線の終端で、通常数 cm 以下に止る(ただし、弦長 $l_0=10\text{m}$ とする)。この誤差はいずれにしても、糸張式整正法が離散的に行なわれる結果(“直り正矢”が“曲率円正矢”と異なることも一種の離散的影響と考える)、生ずるものであるから、弦長 l_0 を小さくとって、曲線を小刻みにすればするほど、小さくすることができる性質のものである。最後に(1)の誤差原因に立ちもどって、考察して見よう。この誤差は測定値に付随する誤差であるから、糸張式曲線整正法に限らず、ほかの観測をともなう方法においても同様に生じ得る誤差であるが、問題は糸張式曲線整正法の測定方式そのものが、たとえいえば細部測量の積み重ね的な方法であって、この方法だけでは(本来の角図法のように骨格としての基準曲線を設定しない場合には)三角測量に相当する基幹骨格測量を欠いている点にある。いま、測点 i における現場正矢と計画正矢との差の値を d_i で表わせば、糸張式曲線整正法(伏島式)では、第 n 測点の「正矢の差の累計」 $= (l_i/2) \varphi$ やび「移動量」はそれぞれ一般に、次の形で表わされる。

$$[\text{正矢の差の累計}] = (d_1 + d_2 + \dots + d_n)$$

「移動量」 $= 2\{(n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \dots + 2d_{n-2} + d_{n-1}\}$ 計画正矢は計算値であるから観測誤差をふくまないが、現場正矢はそれぞれ互いに独立な観測誤差をふくむと考

表-2 狂いのない3次緩和曲線における系張式
曲線整正法と角図法の比較

測点	直り正矢 \bar{M}_i	累計 $\sum_i \bar{M}_i$	移程 $\times \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{2} \sum_i \bar{M}_i$
0	0	0	0
1	$\frac{b^3}{12RL}$	$\frac{b^3}{12RL}$	$\frac{b^3}{12RL}$
2	$\frac{(b+I_1)^3 - b^3}{12RL - 6RL}$	$\frac{(b+I_1)^3 - b^3}{12RL}$	$\frac{(b+I_1)^3 - b^3}{12RL}$
3	$\frac{I_1^2(I_1+b)}{2RL}$	$\frac{(b+2I_1)^3 - (b+I_1)^3}{12RL}$	$\frac{(b+2I_1)^3 - (b+I_1)^3}{12RL}$
4	$\frac{I_1^2(2I_1+b)}{2RL}$	$\frac{(b+3I_1)^3 - (b+2I_1)^3}{12RL}$	$\frac{(b+3I_1)^3 - (b+2I_1)^3}{12RL}$
5	$\frac{I_1^2(3I_1+b)}{2RL}$	$\frac{(b+4I_1)^3 - (b+3I_1)^3}{12RL}$	$\frac{(b+4I_1)^3 - (b+3I_1)^3}{12RL}$
6

測点	曲率円正矢 M_i	$\int M \left(\frac{dx}{l_i} \right) = \int \frac{l_i^2}{2\rho} \left(\frac{dx}{l_i} \right) = \frac{l_i}{2} \int \frac{dx}{\rho}$	$\int \int M \left(\frac{dx}{l_i} \right) \left(\frac{dx}{l_i} \right) = \frac{1}{2} \int \int \frac{1}{\rho} dx dx$
0	0	0	0
1	0	0	0
2	$\frac{I_1^3 b}{2RL}$	$\frac{I_1 b^2}{4RL}$	$\frac{b^3}{12RL}$
3	$\frac{I_1^2(I_1+b)}{2RL}$	$\frac{I_1(b+I_1)^2}{4RL}$	$\frac{(b+I_1)^3}{12RL}$
4	$\frac{I_1^2(2I_1+b)}{2RL}$	$\frac{I_1(b+2I_1)^2}{4RL}$	$\frac{(b+2I_1)^3}{12RL}$
5	$\frac{I_1^2(3I_1+b)}{2RL}$	$\frac{I_1(b+3I_1)^2}{4RL}$	$\frac{(b+3I_1)^3}{12RL}$
6

えられるから、その誤差分散を σ^2 とすれば、第 n 測点について次式が成立する。

$$\text{「正矢の差の累計」の誤差分散} = n \sigma^2 \quad \dots \dots \dots (5)$$

「移動量」の誤差分散

$$\begin{aligned} &= 4 \{ (n-1)^2 \sigma^2 + (n-2)^2 \sigma^2 + \dots + 2^2 \sigma^2 + \sigma^2 \} \\ &= \frac{2}{3} (n-1)n(2n-1) \sigma^2 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (6)$$

(6) 式は第 0 番目および第 1 番目の測点位置を正しいものとした場合に、第 n 測点の整正移動量の計算値上に現われる誤差分散の推定値を表わす式で、この値は距離の 3 乗に比例することを示している。

また第 n 測点と第 $(n-1)$ 測点との移動量の差、すなわち第 n 測点の第 $(n-1)$ 測点に対する相対的移動量についての誤差を考えてみると、

「第 n 測点の第 $(n-1)$ 測点に対する相対的移動量」

$$\begin{aligned} &= 2 \{ (n-1)d_1 + (n-2)d_2 + \dots + 2d_{n-2} + d_{n-1} \} \\ &\quad - 2 \{ (n-2)d_1 + (n-3)d_2 + \dots + 2d_{n-3} + d_{n-2} \} \\ &= 2 \{ d_1 + d_2 + \dots + d_{n-2} + d_{n-1} \} \end{aligned}$$

∴ 「第 n 測点の第 $(n-1)$ 測点に対する相対的移動量」の誤差分散 $= 4(n-1)\sigma^2 \dots \dots \dots (7)$

すなわち、「第 n 測点の第 $(n-1)$ 測点に対する相対的移動量」の誤差分散の推定値は距離に比例する。

(7) 式も (6) 式と同様に第 0 番目および第 1 番目の測点位置が完全に正しかった場合の誤差分散の推定値を表わす式であるが、もしも第 0 番目および第 1 番目の測点

を、これらの測点を結んだ直線にほぼ平行な直線上にある 2 つの基準点からの距離、 e_0, e_1 を測って求めるものとすれば、第 0 番目および第 1 番目の測点を結ぶ直線は、2 つの基準点を結ぶ直線に対して、

$$e_0 + \frac{(e_1 - e_0)}{l_1} nl_1 = ne_1 - (n-1)e_0$$

で表わされ、 e_0, e_1 は互いに独立な誤差をふくむと考えられるから、その誤差分散を σ_1^2 とすれば、この測定操作のために、第 n 測点の移程におよぼす誤差分散は、

$$n^2 \sigma_1^2 + (n-1)^2 \sigma_1^2 = (2n^2 - 2n + 1) \sigma_1^2 \dots \dots \dots (8)$$

である。すなわちこの場合には結局、第 n 測点の移動量の総誤差分散としては、(8) 式に示す値だけの誤差分散が (6) 式にさらに追加せられることになる。また、この場合には「第 n 測点の第 $(n-1)$ 測点に対する相対的移動量」の総誤差分散は、(7) 式にさらに、

$$(e_1 - e_0) \text{ の誤差分散} = 2 \sigma_1^2 \dots \dots \dots (9)$$

だけの量を追加した値となる。

以上は「第 n 測点の移動量」または「第 n 測点の第 $(n-1)$ 測点に対する相対的移動量」の計算値の上に現われる誤差について考えたのであるが、系張式曲線整正法では、通常、第 0 および第 1 測点、第 n および第 $(n+1)$ 測点を、それぞれ既知の正しい直線上にとり、第 0 および第 1 測点より出発して、終端側の第 n 測点で正しい点位置に閉そくさせるようにするのが普通であるから、第 n 測点で生じた食違量は、適当に各測点に配分せられて修正消去せられる（ただし、これによって得られた各測点位置は推定位置に過ぎない）。このように適当な間隔ごとに正しい位置の基準点を設けて誤差を消去するようにすれば一応問題は解消せられる。

しかし、もしも出発点以外に既知基準点を設けてない場合には上述の誤差量は消去されることはもちろん、出発点以外に既知基準点が設けてある場合でも、次の基準点までの距離が過大であるならば、各測点位置の不確実推定量は漸次増大して実用にならなくなる。

例えば、 $l_0 = 2l_1 = 10 \text{ m}$ とし、 $\sigma = \sigma_1 = 1 \text{ mm}$ と仮定して^{1), 2)} 始点から 100 m 離れた測点における誤差を考えてみると、この場合には $n = 20$ であるから、

$$\frac{2}{3} (n-1)n(2n-1) \sigma^2 + (2n^2 - 2n + 1) \sigma_1^2 = 10641.$$

$$4(n-1)\sigma^2 + 2\sigma_1^2 = 78.$$

$$\sqrt{10641} = 103.15 \text{ mm}$$

$$\sqrt{78} = 8.8 \text{ mm}$$

すなわち、始点から 100 m 離れた測点の移動量には、103.15 mm の標準偏差を持つ誤差がともない、始点から 100 m の測点と 95 m の測点との相対的移動量には 8.8 mm の標準偏差の誤差をともなうということになる。

これを要するに、糸張式整正法では上述のように正矢のわずかな測定誤差の存在によっても、移動量の推定誤差分散は測点数の3乗に比例し、間隔 l_1 の2測点間の相対的な狂いできえ、その推定の誤差分散は始点からの測点数に比例して急速に増大するものであり、これらの値は曲線を小刻みにして l_1 の値を小さくしても、 σ の値は通常小さくなるとは考えられず、反面、 n の値が増大するので測点数の増加とともにむしろ増大する。この性質は、原因(3)にもとづく誤差と相反的である。

なお糸張式曲線整正法について、付言して置きたいことは、以上の議論は、現場曲線、計画曲線のいずれについても、曲率半径 ρ は弦長 l_1 に比してきわめて大きく、その符号も少なくとも l_1 の間では一定で ($M = l_1^2/8\rho$ が成立するために)，かつ曲線終端での螺旋角 ϕ も相当に小さい、との仮定の上に立っていたことである。従って糸張式曲線整正法に限らず、角図法においてもいわば以上の議論は、いわゆる“大通り”について成り立つ事柄であって、いわゆる“小通り”については問題は自ら別個で、改めて検討を要するわけである。

3. 軌道測定車による軌道整正の問題

軌道測定車による道軌状態の測定も、原理的には糸張式測定と同じである。

先づ3輪軸測定車では、その測定値の中から各測点ごとの正矢測定値を拾い出して、これに糸張式整正法のときと同様な操作を施せば、理論上は各測点の移動量を算出できるようである。しかし糸張式整正法のときのように第 n 測点が狂いのない基準点であるという保証はなく、またこの場合、狂いのない基準点との関係も一般に不明であるので、“大通り”の整正には、ほとんど使用できない。このことは次のような別個に誘導された方法で（この方法は ρ の比較的小さい“小通り”的な場合にも通用するが、この方法でも接線角 ϕ は糸張式のときと同様に小さいものと仮定する）、定直線に対する各測点の縦距を算出する場合でも同様である。すなわち 図-4 に示すように、基準直線を x 軸にとり、3輪軸測定車の隣接軸距を l_1 とし、各輪軸位置での軌道中心線の x 軸に対する縦距を $f(x)$ で表わし、 x 点における正矢量を $g(x)$ で表わせば、

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2} \{f(x-l_1) + f(x+l_1)\}$$

$$\therefore f(x+l_1) = 2f(x) - f(x-l_1) - 2g(x) \dots (10)$$

いま、 $0 \leq x_0 \leq l_1$ 、 $x = x_0 + il_1$ 、($i \geq 1$) とし、

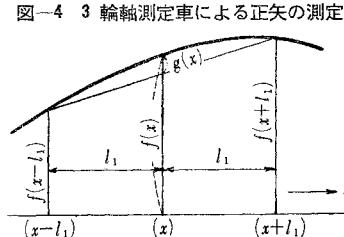


図-4 3輪軸測定車による正矢の測定

$$\left. \begin{aligned} f(x_0 + il_1) &= f_i \\ g(x_0 + il_1) &= g_i \end{aligned} \right\}$$

と表わすと、(10) 式から一般に、

$$f_{i+1} = 2f_i - f_{i-1} - 2g_i$$

なる式が得られる。上式において $i=1, 2, \dots, n-1$ とすれば、

$$f_2 = 2f_1 - f_0 - 2g_1$$

$$f_3 = 2f_2 - f_1 - 2g_2$$

$$\dots$$

$$f_n = 2f_{n-1} - f_{n-2} - 2g_{n-1}$$

上式を辺々相加えれば次式が得られる。

$$f_n - f_1 = (n-1)(f_1 - f_0) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^i g_j$$

$$= (n-1)(f_1 - f_0) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)g_i \dots (11)$$

ゆえに出発点において、 $f(x_0) = f_0$ 、 $f(x_0 + l_1) = f_1$ 、 $(0 \leq x_0 \leq l_1)$ をあらかじめ測定して置き（従って、 $0 \leq x \leq 2l_1$ について $f(x)$ を測定して置き）、 g_i ($i=1, 2, \dots, n-1$) を測定車で測定すれば、(11) 式から曲線上のすべての点の縦距を求めることができ、従って曲線の現状を一応知ることができる。

しかしながら、 g_i の測定誤差の分散を σ^2 とし (g_i の測定誤差は互い独立であるとする)、 f_0, f_1 の測定誤差の分散を σ_1^2 とすれば (f_0, f_1 の測定誤差も互に独立であるものとする)、(11) 式から f_n の誤差分散は、

「 f_n の誤差分散」

$$= n^2 \sigma_1^2 + (n-1)^2 \sigma_1^2 + 4 \{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\} \sigma^2 \\ = (2n^2 - 2n + 1) \sigma_1^2 + \frac{2}{3} (n-1)n(2n-1) \sigma^2 \dots (12)$$

(12) 式は、糸張式整正法の場合の (6) 式および (8) 式を合体した式で、結果的に糸張式の場合と同じである。

次に 図-5 のような4輪軸配置の測定車について考えて見よう。図-5 のように記号を定め、

$$0 \leq x_0 \leq 2l'_1, x_i = x_0 + il'_1, f(x_i) = f_i$$

とすれば、

$$\left. \begin{aligned} g_{i-2, i-1} &= f_{i-1} - \frac{1}{3}(2f_{i-2} + f_{i+1}) \\ g_{i-2, i} &= f_i - \frac{1}{3}(f_{i-2} + 2f_{i+1}) \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

これから次式が得られる（中間、省略）。

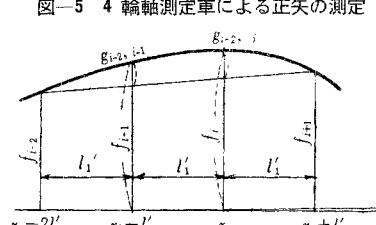


図-5 4輪軸測定車による正矢の測定

$$f_{2m+1} = (2m+1)f_1 - 2mf_0 + m(g_{0,2} - 2g_{0,1}) \\ - \sum_{i=1}^m (m-i+1)(g_{2i-2,2i-1} + g_{2i-2,2i}) \quad \dots (14)$$

すなわち、3輪軸のときと同様に出発点において $f(x_0) = f_0$, $f(x_0 + l_1) = f_1$, ($0 \leq x_0 \leq 2l_1'$) をあらかじめ測定して置き(従って $0 \leq x \leq 3l_1'$ について $f(x)$ を測定して置き), $g_{2i-2,2i-1}$ および $g_{2i-2,2i}$ ($i=1,2,\dots,m$) を測定車で測定すれば、(14)式から一応は曲線上のすべての点の縦距を計算することができる。しかし f_0, f_1 の誤差分散を σ_1^2 , $g_{i,j}$ の誤差分散を σ^2 とすれば、 f_{2m+1} の誤差分散は、

$$\begin{aligned} [f_{2m+1}] \text{の誤差分散} &= \{(2m+1)^2 + 4m^2\}\sigma_1^2 \\ &+ \{9m^2 + 2(m-1)^2 + 2(m-2)^2 + \dots + 2.1^2\}\sigma^2 = (8m^2 + 4m+1)\sigma_1^2 + \left\{7m^2 + \frac{1}{3}m(m+1)(2m+1)\right\}\sigma^2 \dots (15) \end{aligned}$$

測定車の全長が3輪軸のものと同長すなわち、 $2l_1 = 3l_1'$ とすれば、 $nl_1 = \frac{3}{2}nl_1' = 2ml_1'$ から $m = \frac{3}{4}n$ であるから、 n^3 の項だけに注目して、(15)式の値は(12)式の値のおおよそ $1/4 \times 27/32$ である。従って標準偏差は3輪軸の場合の0.46倍になる。しかしながら、(12)式、(15)式のいずれにしても、誤差分散は距離の3乗に比例して急速に増大することを示しており、このゆえに途中で誤差の閉そく消去の行なわれない測定車では、“大通り”の整正是不可能である。

そこで測定車の効用として残された点は、その測定値による“小通り”的整正、または整正の能、不能は別として軌道狂いの発見である。次にこの点について考えて見よう。今小通り狂いの一例として、狂いが、

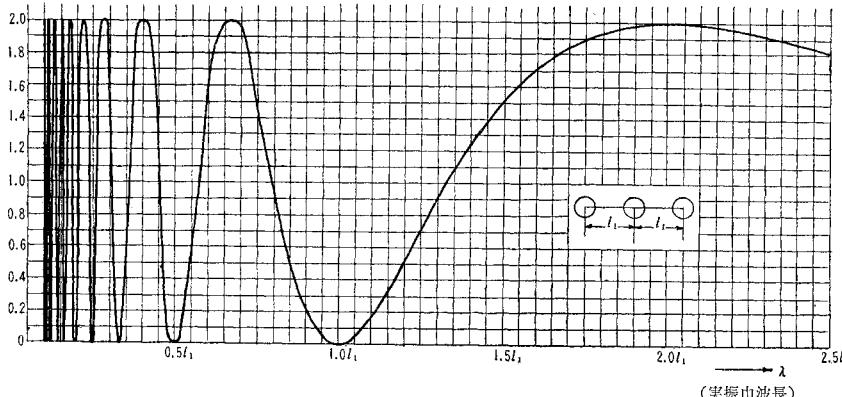
$$A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x) \quad (\text{ただし, } A: \text{振巾}, \lambda: \text{波長})$$

で表わされるような蛇行狂いである場合について考察する。

この場合、3輪軸測定車による正矢測定値は次式で表わされる。

$$g = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + l_1) \\ - \frac{1}{2} A \left\{ \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x) + \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + 2l_1) \right\}$$

図-6 3輪軸測定車による正矢測定値の実振巾に対する倍率



$$= A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + l_1) - A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + l_1) \cos \frac{2\pi}{\lambda} l_1 \\ = 2A \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} l_1 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + l_1) \dots (16)$$

すなわち、振巾 A の蛇行狂いは、振巾 $= 2A \sin^2 \frac{\pi}{\lambda} l_1$, 位相差 $= \frac{2\pi}{\lambda} l_1$ の正弦曲線として記録され、特に $\lambda = l_1$, $\frac{l_1}{2}$, $\frac{l_1}{3}$, $\frac{l_1}{4}$, … のときは、蛇行曲りが現実に存在するにもかかわらず正矢測定値は常に0となって現われ、また $\lambda = 2l_1$, $\frac{2}{3}l_1$, $\frac{2}{5}l_1$, $\frac{2}{7}l_1$, … のときには蛇行の振巾は現実の2倍の振巾として記録される。次に4輪軸測定車による測定では、

$$\begin{aligned} g_1 &= A \left[\sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + l_1') \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left\{ 2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x) + \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + 3l_1') \right\} \right] \\ g_2 &= A \left[\sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + 2l_1') \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left\{ \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x) + 2 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x + 3l_1') \right\} \right] \end{aligned}$$

いま、 $\frac{2\pi}{\lambda}x = \alpha$, $\frac{2\pi}{\lambda}l_1' = \beta$ と置けば上式は一般に次のような形に表わされる。

$$\begin{aligned} g_1 &= A \sqrt{\frac{14}{9} - \frac{2}{3} \left(2 \cos \beta + \cos 2\beta - \frac{2}{3} \cos 3\beta \right)} \\ &\quad \cdot \sin(\alpha + \phi_1) \\ g_2 &= A \sqrt{\frac{14}{9} - \frac{2}{3} \left(2 \cos \beta + \cos 2\beta - \frac{2}{3} \cos 3\beta \right)} \\ &\quad \cdot \sin(\alpha + \phi_2) \end{aligned} \dots (17)$$

ただし、

$$\tan \phi_1 = \frac{\sin \beta - \frac{1}{3} \sin 3\beta}{\cos \beta - \frac{1}{3} \cos 3\beta - \frac{2}{3}} \quad \text{とする。}$$

$$\tan \phi_2 = \frac{\sin 2\beta - \frac{2}{3} \sin 3\beta}{\cos 2\beta - \frac{2}{3} \cos 3\beta - \frac{1}{3}}$$

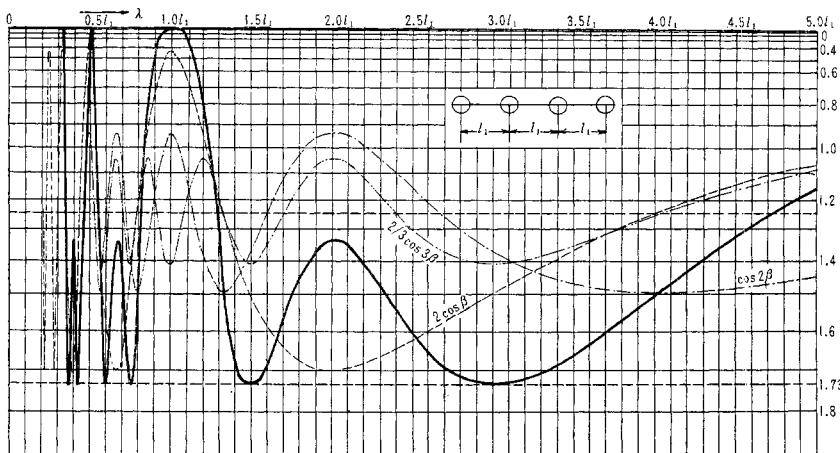
従ってこの場合には元の蛇行狂いの振巾は、

$$k = \sqrt{\frac{14}{9} - \frac{2}{3} \left(2 \cos \beta + \cos 2\beta - \frac{2}{3} \cos 3\beta \right)} \dots (18)$$

倍の振巾として、記録せられる。(16)式の振巾および(18)式は蛇行狂いの波長の大きさによって変動し一定ではない。その状況を図示すれば、図-6および図-7のようにである。

なお、以上の考察では蛇行狂いとして同一波長および振巾の正弦曲線が連続する場合について考

図-7 4 輪軸測定車による正矢測定値の実振巾に対する倍率



えたのであるが、異なる種々の正弦曲線が混合している場合には、蛇行狂いはほぼ、有限項の Fourier 級数として示されるから、この場合の測定車の測定値は、上述の場合と全く同様にして波長入を変数とする一種の Fourier 級数となり、上述の場合と同様の結果が得られる。

以上の考察から、軌道測定車の記録から蛇行狂いの真的振巾を見出すことのできないことがわかり、従ってその記録を基にして“小通り”の整正を行なうこともまた不可能であることがわかる。

最後に軌道測定車の記録による轨道狂いの発見の能否の問題は、図-6、図-7において k の値が 0 またはほとんど 0 となるような波長の蛇行狂いは発見不能、または困難であるから、軌道測定車によって、轨道狂いを常に発見し得るとは限らないことがわかる。

4. 糸張式整正法における食違量の合理的消去法

糸張式整正法では、誤差（食違量）の消去について、従来各測点の正矢測定値に同量の誤差量を生じたものの仮定の下に、各測点の移動量の誤差量は、ほぼ距離の自乗に比例するとして、食違量を各測点に配分する方法が行なわれて来た。しかし、従来の方法は確率論的には正しい方法とはいえない。次に確率論的に合理的な移動量誤差（食違量）の消去法（配分法）について考察する。

いま、第 n 測点の移動量誤差について考えるに、まず第 $(n-1)$ 測点の移動量に生ずる誤差分布を、正規分布、

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma_x} \right)^2 \right\} \quad (19)$$

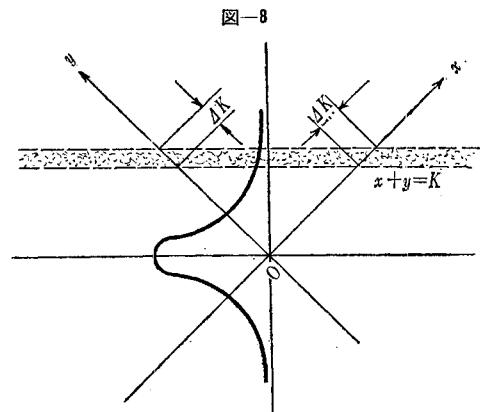
で表わされるものとし、第 n 測点の第 $(n-1)$ 測点に対する相対的移動量の誤差の条件付分布関数を、

$$f_x(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x}{\sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \right)^2 \right\} \quad (20)$$

なる正規関数とする。ここに ρ は y と x との間の相関係数とする。

しかるべきは第 n 測点の移動量の誤差分布に関する確率密度関数 $f(x,y)$ は (19) 式を周辺分布とし、(20) 式を列分布関数として次式で示される。

$$f(x,y) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sqrt{1-\rho^2} 2\pi} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{x}{\sigma_x} \right)^2 + \frac{\left(y - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x \right)^2}{\sigma_y^2 (1-\rho^2)} \right\} \right] \quad (21)$$



また、第 n 測点の移動量の誤差 $(x+y)$ は食違量 K として現われるので、

$$x+y=K \quad (22)$$

と置くことができる。ゆえに第 n 測点の移動量に生ずる誤差 K の分布関数は、(22) 式を用いて、 y を x で書き換え、(21) 式を 図-8 に示されるような領域に従って積分することによって得られる。

すなわち、

$$F(K) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{K-x}^{K+\Delta K-x} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x}{\sigma_x} \right)^2 \right\} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(y - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x \right)^2}{\sigma_y^2 (1-\rho^2)} \right\} dy dx \quad (23)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 + \frac{\left(K-x-\rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x\right)^2}{\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right\}\right] dx \cdot 4K \\ = \frac{4K}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\frac{x^2(\sigma_x^2+2\rho\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2)-2K\sigma_x(\sigma_x+\rho\sigma_y)x+K^2\sigma_x^2}{\sigma_x^2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\right] dx$$

(演算中略)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{(\sigma_x^2+2\rho\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{K}{\sqrt{\sigma_x^2+2\rho\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2}}\right)^2\right\} 4K \quad \dots \dots \dots (23)$$

上式は第 n 測点の移動量に生ずる誤差 K の分布を示す式で、その分布が標準偏差 $\sqrt{\sigma_x^2+2\rho\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2}$ なる正規分布であることを示している。

しかるに (6) 式より第 $(n-1)$ 測点の移動量に生ずる誤差分散 σ_x^2 やび第 n 測点の移動量に生ずる誤差分散 $\sigma_x^2+2\rho\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2$ は、それぞれ、

$$\sigma_x^2 = \frac{2}{3}(n-2)(n-1)(2n-3)\sigma^2 \\ = 4\{(n-2)^2+(n-3)^2+\cdots+2^2+1^2\}\sigma^2 \quad \dots \dots \dots (24)$$

$$\sigma_x^2+2\rho\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2 = \frac{2}{3}(n-1)n(2n-1)\sigma^2 \\ = 4\{(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+2^2+1^2\}\sigma^2 \quad \dots \dots \dots (25)$$

また、第 n 測点の第 $(n-1)$ 測点に対する相対的移動量の誤差分散 σ_y^2 (y の周辺分布の分散) は、(7) 式により、

$$\sigma_y^2 = 4(n-1)\sigma^2 \quad \dots \dots \dots (26)$$

(24) 式、(25) 式および (26) 式から σ_x, σ_y を消去して ρ を求めれば、

$$2\rho\sigma_x\sigma_y = \{4(n-1)^2-4(n-1)\}\sigma^2 = 4(n-1)(n-2)\sigma^2 \\ \therefore \rho = \sqrt{\frac{3(n-2)}{2(2n-3)}} \quad \dots \dots \dots (27)$$

(ただし、 $n \geq 2$)

上記のような解析の結果、第 n 測点の移動量に生ずる誤差分布の確率密度関数 $f(x,y)$ は、図-8において原点を最高点とし、直線

$$y - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x = 0 \quad \text{および} \quad \rho \frac{\sigma_x}{\sigma_y} y - x = 0$$

を 2 つの共軸直径とする橢円の等高線を画く正規曲面をなすことがわかる。

さて、 $x+y=K$ なる K の値が第 n 測点の食違量として与えられたときに、第 $(n-1), (n-2), \dots$ の測点にどれだけの食違消去量を分配するのか確率論的に合理的であるかという問題を考えて見よう。この問題は明らかに最小自乗法の考察にもとづいて、(21) 式の指針。

$$\left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2 + \frac{\left(y - \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x} x\right)^2}{\sigma_y^2(1-\rho^2)} = \left(\frac{x}{\sigma_x}\right)^2$$

$$+ \left\{ \frac{K - \left(1 + \rho \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)x}{\sigma_y \sqrt{1-\rho^2}} \right\}^2 \equiv \varphi(x)$$

を最小ならしめるように x を決定し、この x の値を第 $(n-1)$ 測点の食違消去量とし、次に第 $(n-2)$ 測点の食違消去量は上に得た x の値をさらに K の値と同様に見なし、上の方法と同じ方法をくり返して第 $(n-2)$ 測点の食違消去量を出し、さらに以下同様にして各測点の消去量を出すことが、確率論的に最も Probable な消去量を算出することとなる。

すなわち、

 $\varphi'(x)=0$ と置いて x を求めれば、

$$x = \frac{2(n-2)}{2n-1} K \quad \dots \dots \dots (28)$$

が得られる。

ゆえに、第 $n, (n-1), \dots, 2, 1$ の各測点の誤差消去量は第 n 測点の食違量 (誤差) を K とするとき、それ

$$K, \frac{2(n-2)}{2n-1}K, \frac{2^2(n-3)(n-2)}{(2n-3)(2n-1)}K, \\ \frac{2^3(n-4)(n-3)(n-2)}{(2n-5)(2n-3)(2n-1)}K, \dots, \frac{2^{n-2} \cdot (n-2)! \cdot K}{5, 7, 9, \dots, (2n-1)}, 0.$$

とすることが、確率論的に最も合理的であるといえる。

5. 結 び

以上の考察結果を総括して次のように結論することができる。すなわち、

移動弦による曲線整正法は、線路等級の低い場合でも精々 100m 未満ごとの曲線整正に適し、これをそれ以上の長区間にわたって開放的に運用することは、無意味である。かつてこの場合、各区間ごとに必要最小個数以上の既知基準点があって、これらの点で誤差を閉そく消去できるような方法をとることが絶対に必要である。なお、これらの既知基準点は移動弦による方法ではなく、ほかの骨格的基幹測量によって正確に設定することが必要である。

参 考 文 献

- 1) Eisenbahn Ingenieur 1960, Heft 2
- 2) " Heft 6

(原稿受付: 1961. 3. 7)

ON THE ACCURACY OF THE ALIGNMENT OF CURVED TRACK
BY THE STRING CHORD METHOD AND THE RATIONAL
DISTRIBUTION OF TERMINAL ERROR IN IT

By Dr. Eng., Torao Taya, C.E. Member

In order to adjust the curves in railway track, i.e. circular curve and transition curve, the alignment by String Chord Method has mainly been used for a pretty long time, but in recent years the mechanization of this old handy method, that is, to measure the irregularity of track by the "Track Inspection Car" and to adjust it according to its measured data, has come to be increasingly put in practice. However, it is a matter for regret that the argument is apt to go beyond the limit of correct interpretation about the accuracy of measured data.

For the above mentioned reason, it would be necessary under the present circumstances to examine over again the theoretical accuracy of the alignment by String Chord Method and to determine the limit of estimation about the measured data by it.

1. The error in Angle Diagram Method

Because of the fact that the fundamental principle of the alignment by String Chord Method is derived from the Angle Diagram Method, we must consider first of all the error of the Angle Diagram Method in order to examine the above-mentioned accuracy.

2. The error in the Alignment by String Chord Method

Among the errors of the Alignment by String Chord Method, there are some that are resulted from the dispersive double summation of the height of arc and also from their observational effect, in addition to the above mentioned error in Angle Diagram Method itself. The error that is resulted from the dispersive double summation of the height of arc, is no more than 20 mm about one transition curve of approximately 100 m in length, but the one that is resulted from the observational effect of the height of arc, amounts to an astonishing quantity by the accumulation of errors depending upon the curve length. It occurs as a result of

the fact that the alignment of curve by the String Chord Method is a method such as accumulative Detail Surveying which lacks in the skeleton surveying corresponding to Triangulation. For example, if we assume the using of chord length $l=10$ m, the standard deviation of observation values of each height of arc and of the longitudinal shift from the two standard points at the beginning, $\sigma=\sigma_1=1$ mm, we shall get the results with regard to the standard deviation of the following items :—

(The error deviation about the longitudinal shift of terminal point at a distance 100 m from the beginning point) = 103.15 mm.

(The error deviation about the relative shift between 20th point and 19th point) = 8.8 mm.

From the above consideration, the author has reached the following conclusion about the String Chord Method :—

In the Alignment of track by String Chord Method, it is necessary to set up standard points at each possibly short interval by other precise method, and then always to close and eliminate the error at these standard points in both calculation of shifts and laying down of a curve.

3. The adjustment problem of railway track by the Track Inspection Car

The points considered as the utilities of Track Inspection Car, are the following three items.

- (1) The gross alignment by the measured value.
- (2) The detail alignment by the measured value.
- (3) The detection of Track Irregularity.

It is evident from the theory of preceding paragraphs that we cannot expect the utility of (1) item from such apparatus as the present Track Inspection Car which has no mechanism to make the relation with each standard point

clear. Secondly considering the utility of (2) item, the ratio of the height of arc measured by Track Inspection Car to the real amplitude of Track Irregularity is not constant but variable over a range of 0~2, depending upon the wave length of Track Irregularity (See **Fig. 1** and **Fig. 2**).

Therefore we can conclude that it is not possible to adjust exactly the Track Irregularity or to execute detail adjustment according to the measured value by the Track Inspection Car.

Finally considering the utility of (3) item, as the wave lengths of the Track Irregularity which exist actually in the field, distribute over

a comparatively wide range of 10~20 m and is not constant, so it is very doubtful to what extent we can detect the Track Irregularity.

4. Rational Distribution of terminal error in the String Chord Method

Up to the present, the method to distribute and eliminate the error proportionally to the square distance of each measuring point has been employed for the adjustment of Track, but this conventional method is not correct from a probability point of view. In this paragraph, the author has derived and proposed therefore, a correct method of distribution of terminal error on a probability principle.

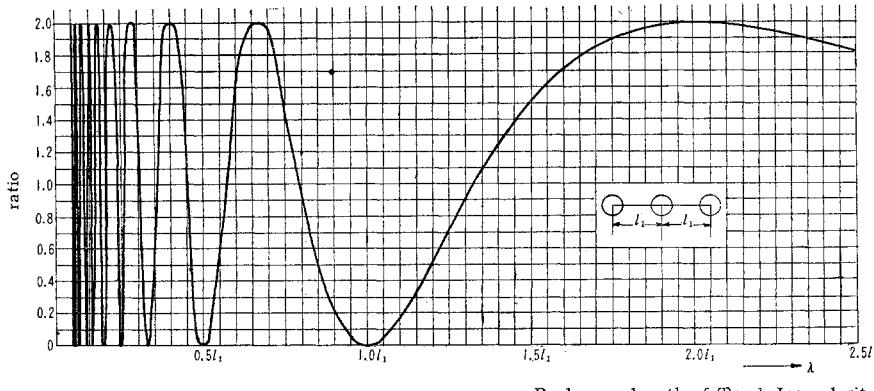


Fig. 1 The ratio between the height of arc measured by 3 axial Track Inspection car and the real amplitude of Track Irregularity.

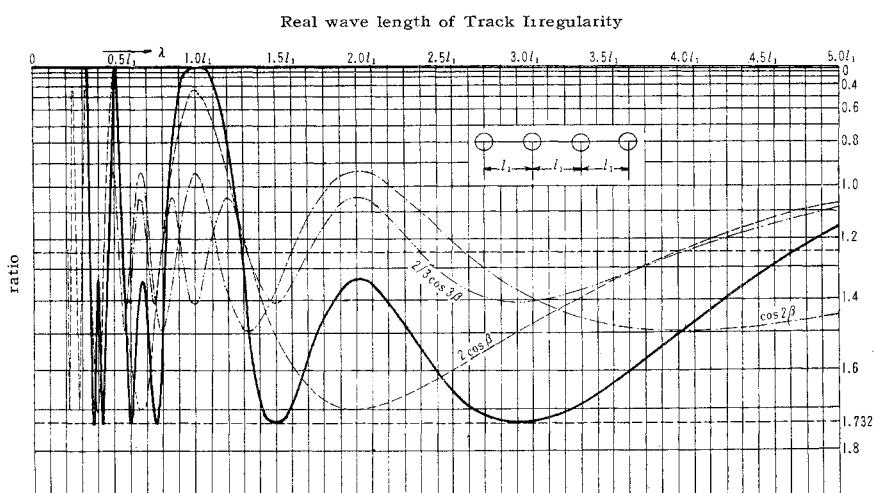


Fig. 2 The ratio between the height of arc measured by 4 axial Track Inspection car and the real amplitude of Track Irregularity.