

# アーチ橋のねじれ座屈について

正員 倉 茂\*

**要旨** 本論文は2本主桁の円弧2ヒンジ・アーチ橋に等分布荷重が載ったときのねじれ座屈を論じたものである。座屈応力の算出にはエネルギー法を使用し、 $\sigma_{cr} = E\alpha_k(i/\alpha R)^2$  の形で座屈応力を与え、アーチ軸に直接載荷した場合の  $\alpha_k$  を種々のねじれ剛性、主桁間隔、中心角のものについて求め、さらに荷重がアーチクラウンより  $h_c$  だけ上にある場合の  $\alpha_k$  の減少率  $\mu_h$  横桁の曲げによるねじり剛性の低下率  $\mu_q$  を与えたものである。

## 1. 緒論

本論文で取り扱っているのは2本主桁の2ヒンジアーチ橋が等分布荷重を受けて側方へたわみながらねじれ座屈を起こす問題である。取り扱いの簡便さから円形アーチを取り上げたが、荷重によりアーチリブに生じている曲げモーメントの値は座屈値にそれほど大きな影響を与える、主として関係するのはアーチリブに働いている直応力の値であるから、特に支間に比してアーチ高が高くない限り等しい水平反力を生じている放物線アーチ橋にも近似的に適用できるものと思われる。主桁のねじれ中心を結ぶ線の中点を通る軸をアーチ軸と呼び、アーチ橋はこのアーチ軸で代表させ、各部の変化はすべてこの軸の変位で書き表わすこととする。また主桁のねじれ中心と重心は一致するものとする。ここで座屈値を求めるにはすべてエネルギー法を用いた。なお本論文では床版の曲げ剛性は考慮せず、おもに上路式アーチ橋を対象としている。

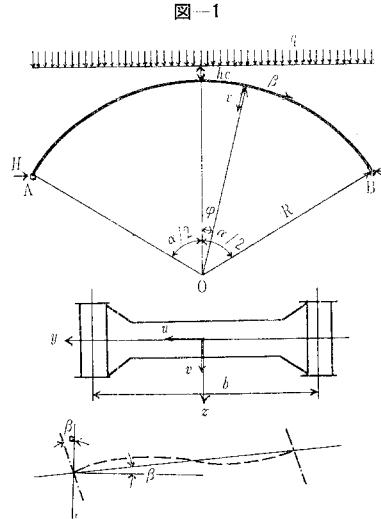
## 2. 等分布荷重を受けるアーチ主桁が座屈変形を起こしたとき桁に蓄えられるエネルギー

アーチ軸のねじれ角は  $\beta$ 、主桁のねじれ角を  $\beta_0$ 、アーチ軸の水平変位は  $u$ 、輻射軸方向の変位は  $v$  とし 図-1 に示した方向に変位するものを正とする。アーチ軸は等分布荷重  $q$  を受け次式で与えられる水平反力と曲げモーメントを受けているものとする。

$$H = \frac{qR}{8} \left( \frac{3}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3}{2} \alpha \right) - \frac{7}{6} \sin \frac{3}{2} \alpha \right) - \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4} \sin \alpha + \frac{\alpha}{4} \cos \alpha \quad (1)$$

$$M = \frac{qR^2}{2} \left( \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \varphi \right) - HR(1 - \cos \varphi) \quad (2)$$

この荷重状態でのアーチ軸の変形を無視し、この応力状態の下でアーチ軸が座屈変形を起こしたときアーチが



得るエネルギーを計算しよう。

### (1) 主桁のねじれ変形によるひずみエネルギー

主桁のねじり率  $\tau_x$  は

$$\tau_x = \frac{\alpha \beta_0}{ds} - \frac{1}{R} \frac{du}{ds}$$

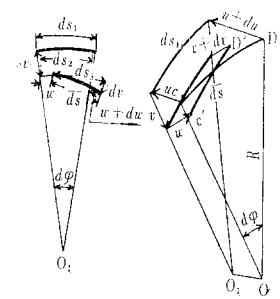
で与えられるゆえ、主桁の曲げねじり剛性を無視すれば主桁に蓄えられるひずみエネルギー  $V_1$  は2主桁で

$$V_1 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{2GJ_T}{2} \left( \frac{\alpha \beta_0}{ds} - \frac{1}{R} \frac{du}{ds} \right)^2 R \cdot d\varphi \quad (3)$$

である。ここで  $GJ_T$  はねじり剛性である。曲げねじりの項は省略したが、主桁が閉じた断面の場合この項はねじり剛性の項に比して省略し得るのが普通であり、開いた断面の場合はアーチ軸のねじれ角と主桁のねじれ角は等しくなり、アーチ軸全体としての曲げねじりの項に比して、主桁のそれは小さくなり無視し得るものと思われる。もしこの項を考えるときは、桁全体としての曲げねじり剛性に加えれば近似的に補正できる。

### (2) 主桁の伸びによるひずみエネルギー

次にアーチ軸と各主桁の伸びを求めよう。図-2において



$$ds_1^2 = ds^2 + du^2, \quad ds_2 = ds_1 \left( 1 - \frac{v}{R} \right)$$

$$ds_3 = ds_2 + dv, \quad ds_3^2 = ds^2 - dv^2$$

\* 東大工博 東北大学助教授、工学部土木工学科

よって

$$\overline{ds^2} = dv^2 + \left\{ (ds^2 + du^2)^{1/2} \left( 1 - \frac{v}{R} \right) + dw \right\}^2 \dots \dots (4)$$

なる関係があり、2次以上の高次の微小量を省略すると伸び  $\epsilon$  は

$$\begin{aligned} \epsilon &= \frac{\overline{ds} - ds}{ds} = -\frac{v}{R} + \frac{dw}{ds} - \frac{v}{R} \frac{dw}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{v}{R} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \dots \dots (5) \end{aligned}$$

一般に伸びの項は小さく(5)式の最初の2項は、他の2次の項と同程度の微少量と考えられるので、

$$-\frac{v}{R} + \frac{dw}{ds} = \delta \dots \dots \dots (6)$$

とおき、 $\delta$  は変位の項に比して2次の微少量とすれば(6)式を(5)式に代入して高次の微少量を省略すれば結局アーチ軸の伸びは次式で与えられる。

$$\epsilon = -\frac{v}{R} + \frac{dw}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \dots \dots (7)$$

次に各主軸の伸びを計算しよう。原点より正側を見て左側の主軸には変位の記号の肩に(1)をつけ、右側の主軸のものには(2)をつけて、それぞれの変位を表わせば(7)式と同様に

$$\epsilon^{(1)} = -\frac{v^{(1)}}{R} + \frac{dw^{(1)}}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv^{(1)}}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{du^{(1)}}{ds} \right)^2 \dots \dots \dots (8 \cdot a)$$

$$\epsilon^{(2)} = -\frac{v^{(2)}}{R} + \frac{dw^{(2)}}{ds} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv^{(2)}}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{du^{(2)}}{ds} \right)^2 \dots \dots \dots (8 \cdot b)$$

が得られる。各主軸の変位は、

$$\left. \begin{aligned} v^{(1)} &= v - \frac{b}{2} \beta, \quad w^{(1)} = \frac{b}{2} \frac{du}{ds} + w, \quad u^{(1)} = u^{(2)} = u \\ v^{(2)} &= v + \frac{b}{2} \beta, \quad w^{(2)} = -\frac{b}{2} \frac{du}{ds} + w \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

で与えられるものとすれば(9)式を(8)式に代入することにより

$$\left. \begin{aligned} \epsilon^{(1)} &= \frac{b}{2} \left( \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{R} \beta \right) + \frac{b^2}{8} \left( \frac{d\beta}{ds} \right)^2 - \frac{b}{2} \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \epsilon \\ \epsilon^{(2)} &= -\frac{b}{2} \left( \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{R} \beta \right) + \frac{b^2}{8} \left( \frac{d\beta}{ds} \right)^2 + \frac{b}{2} \frac{d\beta}{ds} \cdot \frac{dv}{ds} + \epsilon \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10 \cdot a \sim b)$$

を得る。よって主軸の伸びひずみエネルギー  $V_2$  は、

$$V_2 = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{EF}{2} (\epsilon^{(1)2} + \epsilon^{(2)2}) ds \dots \dots \dots (11)$$

$\epsilon$  は  $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)}$  よりさらに高次の微小量とし、高次の微小量を省略し整理すると、

$$V_2 = \int_{-a/2}^{a/2} \frac{EFb^2}{4} \left( \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{R} \beta \right)^2 R \cdot d\varphi \dots \dots \dots (12)$$

を得る。

### (3) 主軸の曲げひずみエネルギー

次に主軸の曲げによるひずみエネルギーを求めよう。

主軸の微小部分を取り出し  $C^{(1)}D^{(1)}$  とすれば最初  $ds$ だけ離れていた2点が  $\bar{C}^{(1)}(w^{(1)}, v^{(1)}) \bar{D}^{(1)}\left(w^{(1)} + \frac{dw^{(1)}}{ds}, v^{(1)} + \frac{dv^{(1)}}{ds}\right)$  に変位したとき高次の微小量を省略すれば  $z$  軸方向に

$$dv^{(1)} + (w^{(1)} + dw^{(1)}) d\varphi \doteq dv^{(1)} + w^{(1)} d\varphi$$

だけ変位する。よって  $\bar{C}^{(1)}D^{(1)}$  の傾斜は、

$$\frac{dv^{(1)} + w^{(1)} d\varphi}{ds} = \frac{dv^{(1)}}{ds} + \frac{1}{R} w^{(1)}$$

となる。この傾斜の変化が曲率を与えるのであるから、

$$\left( \frac{1}{\rho_y^{(1)}} - \frac{1}{R} \right) = \frac{d^2v^{(1)}}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{dw^{(1)}}{ds}$$

を得る。今(10)式より、

$$\frac{d^2v^{(1)}}{ds^2} = -\frac{b}{2} \frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{d^2v}{ds^2}, \quad \frac{d^2w^{(1)}}{ds^2} = \frac{b}{2R} \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{dw}{ds}$$

また(7)式より、

$$\frac{1}{R} \frac{dw}{ds} = \frac{v}{R^2} + \frac{\epsilon}{R} - \frac{1}{2R} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2R} \left( \frac{du}{ds} \right)^2$$

が得られるからこれらをまとめて、

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\rho_y^{(1)}} - \frac{1}{R} \right) &= \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{b}{2} \frac{d^2\beta}{ds^2} + \frac{b}{2R} \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \\ &\quad + \frac{\epsilon}{R} - \frac{1}{2R} \left( \frac{dv}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2R} \left( \frac{du}{ds} \right)^2 \end{aligned}$$

よって高次の微小量を省略すれば、

$$\left( \frac{1}{\rho_y^{(1)}} - \frac{1}{R} \right) = \left( \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \right) - \frac{b}{2} \left( \frac{d^2\beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2u}{ds^2} \right) \dots \dots \dots (13 \cdot a)$$

を得る。同ように

$$\left( \frac{1}{\rho_y^{(2)}} - \frac{1}{R} \right) = \left( \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \right) + \frac{b}{2} \left( \frac{d^2\beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2u}{ds^2} \right) \dots \dots \dots (13 \cdot b)$$

が得られる。よって主軸の曲げによって得られるひずみエネルギー  $V_3$  は、

$$\begin{aligned} V_3 &= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{EJ_y}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\rho_y^{(1)}} - \frac{1}{R} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho_y^{(2)}} - \frac{1}{R} \right)^2 \right\} R \cdot d\varphi \\ &= \int_{-a/2}^{a/2} \frac{2EJ_y}{2} \left\{ \left( \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{4} \left( \frac{d^2\beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2u}{ds^2} \right)^2 \right\} R \cdot d\varphi \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

で与えられる。

### (4) 横桁に蓄えられるひずみエネルギー

横桁は図-1に示したように両端に  $(\beta - \beta_0)$  なるたわみ角を生じるのであるから、端モーメント  $M_q$  を加えたとき端部の回転が  $(\beta - \beta_0)$  となるためには、

$$M_q = (\beta - \beta_0) \frac{6EJ_q}{b}$$

であるから横桁に蓄えられるひずみエネルギー  $\bar{V}_4$  は

$$\bar{V}_4 = 2 \cdot \frac{1}{2} M_q (\beta - \beta_0) = \frac{6EJ_q}{b} (\beta - \beta_0)^2$$

である。ここで  $J_q$  は、横桁の断面2次モーメントである。横桁の間隔を  $\lambda$  とすれば、桁全体に蓄えられるエネ

ルギー  $V_4$  は、

$$V_4 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{6EJ_q}{b\lambda} (\beta - \beta_0)^2 R \cdot d\varphi \quad \dots \dots \dots (15)$$

で与えられる。

(5) 座屈を起こす瞬間に働いていた応力のなす仕事  
主桁の伸びにより、主桁に最初から働いていた直応力  $N/2$  のなす仕事は、

$$V_5 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} -\frac{N}{2} (\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}) R \cdot d\varphi$$

で与えられる。よって上式に (11) 式を代入し、

$$V_5 = - \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} N \left\{ \frac{b^2}{8} \left( \frac{d\beta}{ds} \right)^2 + \varepsilon \right\} R \cdot d\varphi \quad \dots \dots \dots (16)$$

が得られる。巾員に比して主桁の高さが比較的高いときは、主桁のねじりにより橋軸方向のせん断の伸びによる仕事、

$$V_5' = \int \frac{N}{2} (i_0)^2 \left( \frac{d\beta_0}{ds} \right)^2 R \cdot d\varphi$$

$$(i_0)^2 = \frac{1}{F} \int_F r^2 dF \quad r \text{ はねじれ中心よりはかる。}$$

を加えなければならない。最初から働いていた水平軸まわりの曲げモーメントのなす仕事は、

$$V_6 = - \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{M}{2} \left( \left( \frac{1}{\rho_y^{(1)}} - \frac{1}{R} \right) + \left( \frac{1}{\rho_y^{(2)}} - \frac{1}{R} \right) \right) R \cdot d\varphi$$

より (13) 式を代入し

$$V_6 = - \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} M \left( \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R} \right) R \cdot d\varphi \quad \dots \dots \dots (17)$$

を得る。荷重の失なうポテンシャルエネルギーは荷重がアーチ軸上に直接載っているものとすれば、

$$V_7 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} q \{ v \cos \varphi - w \sin \varphi \} R \cdot d\varphi \cos \varphi \quad \dots \dots \dots (18)$$

荷重がアーチ クラウンで  $hc$  だけ高く水平線上にあるときは図-3 に見られるようにアーチ軸より

$$h = (h_c + R) - R \cos \varphi$$

だけ高いところにあり、荷重はアーチをふくむ面に直角方向にのみ移動するものとする。アーチ軸のねじれ角の水平方向の成分は

$$\bar{\beta} = \beta \cos \varphi$$

で与えられるゆえ、荷重の失なうポテンシャルエネルギーは  $V_7$  よりさらに、

$$V_8 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} q \frac{h}{2} \bar{\beta}^2 \cos \varphi R \cdot d\varphi$$

よって

$$V_8 = \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \frac{q}{2} \{ (h_c + R) \beta^2 \cos^2 \varphi - R \beta^2 \cos^3 \varphi \} \cos \varphi R \cdot d\varphi \quad \dots \dots \dots (19)$$

が得られる。

#### (6) 桁全体が得るポテンシャルエネルギー

桁全体が得るポテンシャルエネルギー  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= (V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6 - V_7 - V_8) \\ &= \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left[ \frac{2GJ_T}{2} \left( \frac{d\beta_0}{ds} - \frac{1}{R} \frac{du}{ds} \right)^2 \right. \\ &\quad + \frac{2EJ_y}{2} \left( \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{1}{R} v \right)^2 + \frac{EJ_y b^2}{4} \left( \frac{d^2 \beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2 u}{ds^2} \right)^2 \\ &\quad + \frac{EFb^2}{4} \left( \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{R} \beta \right)^2 + \frac{6EJ_q}{b\lambda} (\beta - \beta_0)^2 \\ &\quad \left. - N \frac{b^2}{8} \left( \frac{d\beta}{ds} \right)^2 - M \left( \frac{d^2 v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - q \left\{ v \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} (h_c + R) \beta^2 \cos^2 \varphi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{R}{2} \beta^2 \cos^3 \varphi - \frac{w}{2} \sin^2 \varphi \right\} \right] R \cdot d\varphi \quad \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

ここでアーチ軸の伸びは小さいとして省略した。上式を見るとねじれ角  $\beta$  と水平変位  $u$  は連成して  $V$  を最小にする変形を与えるが、  $v$  と  $w$  はそれぞれ独立に  $V$  を最小にする変形を示す。よって  $v$ ,  $w$  による座屈はここで除外しアーチのねじれ座屈についてのみ考えることにする。(20) 式で  $v=0$ ,  $w=0$  とおき  $G=2 GJ_T$ ,  $C_{bd} = \frac{EJ_y b^2}{2}$ ,  $C_{Jy} = 2 EJ_y$ ,  $C_J = \frac{EFb^2}{2}$ ,  $C_q = 12 \frac{EJ_q}{b\lambda}$  とおき荷重は直接アーチ軸上に載っているものとすれば (20) 式は

$$\begin{aligned} V &= \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left[ \frac{C_T}{2R^2} \left( \beta_0' - \frac{1}{R} u' \right)^2 + \frac{C_{bd}}{2R^4} \left( \beta'' - \frac{1}{R} u'' \right)^2 \right. \\ &\quad + \frac{C_J}{2R^2} \left( \frac{1}{2} u'' + \beta \right)^2 + \frac{C_q}{2} (\beta - \beta_0)^2 \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{b^2}{8R^2} \beta'^2 + \frac{1}{2R^2} u'^2 \right\} N \right] R \cdot d\varphi \quad \dots \dots \dots (21) \end{aligned}$$

ここで、' は  $\varphi$  について微分したことを示している。

### 3. 座屈荷重の算出

#### (1) 座屈変形

ここで  $V$  を  $\beta$ ,  $\beta_0$ ,  $u$  について変分し  $V$  を最小すなわち  $\delta V=0$  にする変位  $\beta$ ,  $\beta_0$ ,  $u$  を求めよう。アーチの両端での変位は常に 0 であるから変分法により

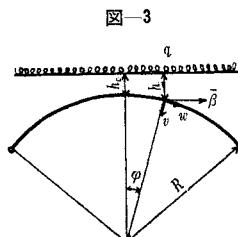
$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial V}{\partial \beta_0''} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial V}{\partial \beta_0'} + \frac{\partial V}{\partial \beta_0} &= 0 \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial V}{\partial \beta''} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial V}{\partial \beta'} + \frac{\partial V}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \frac{\partial V}{\partial u''} - \frac{d}{d\varphi} \frac{\partial V}{\partial u'} + \frac{\partial V}{\partial u} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (23)$$

よって、

$$\frac{C_T}{R^2} \left( \beta_0'' - \frac{1}{R} u'' \right) + C_q (\beta - \beta_0) = 0 \quad \dots \dots \dots (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{bd}}{R^4} \beta'''' + H \frac{b^2}{4R^2} \beta'' + \frac{C_J}{R^2} \beta + C_q \beta - C_q \beta_0 \\ - \frac{C_{bd}}{R^3} u''' + \frac{C_q}{R^3} u'' = 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (25)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{C_J}{R^4} + \frac{C_{bd}}{R^6} \right) u'''' + \left( \frac{H}{R^2} - \frac{C_T}{R^4} \right) u'' - \frac{C_{bd}}{R^5} \beta'''' \\ + \frac{C_J}{R^3} \beta'' + \frac{C_T}{R^3} \beta_0''' = 0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (26)$$



ここでアーチ軸に働く直応力  $N$  は近似的に水平反力  $H$  と等しいとした。(25), (26) 式より  $\beta_0, \beta_0'$  を求め、(24) 式に代入すれば、

$$\frac{C_J}{R^3} u'' + \left( \frac{H}{R} + \frac{C_J}{R^3} \right) u'' + \left( \frac{C_J}{R^2} + \frac{Hb^2}{4R^2} \right) \beta'' + \frac{C_J}{R^2} \beta = 0 \quad \dots \dots \dots (27)$$

を得る。今端部条件を満足するたわみ曲線として、

$$u = R \cdot A \left( \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \quad \dots \dots \dots (28)$$

をとれば、 $\beta$  として (27) 式を満足し端部条件  $\varphi = \pm \frac{\alpha}{2}$  で  $\beta = 0, \beta'' = 0$  となるねじれ曲線が求まる。

$$\beta = A \left( \nu_1 \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \nu_2 \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \quad \dots \dots \dots (29)$$

ここで

$$\nu_1 = \frac{\left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left[ \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{R^2 H}{C_J} + 1 \right) \right]}{\left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left( 1 + \frac{Hb^2}{4C_J} \right) - 1} \quad \dots \dots \dots (30 \cdot a)$$

$$\nu_2 = \frac{3 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ 9 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{R^2 H}{C_J} + 1 \right) \right\}}{9 \left( 1 + \frac{Hb^2}{4C_J} \right) \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1} \quad \dots \dots \dots (30 \cdot b)$$

$\beta_0$  も同様にして、

$$\beta_0 = A \left( \nu_3 \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \nu_4 \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \quad \dots \dots \dots (31)$$

ここで、

$$\nu_3 = \frac{\left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{C_q}{C_T} R^2 \nu_1}{\left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{C_q}{C_T} R^2} \quad \dots \dots \dots (32 \cdot a)$$

$$\nu_4 = \frac{3 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{C_q}{C_T} R^2 \nu_2}{9 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{C_q}{C_T} R^2} \quad \dots \dots \dots (32 \cdot b)$$

を得る。以上は対称変形であるが、逆対称の変形もどうように、

$$\left. \begin{aligned} u &= RA \left( \sin \frac{2\pi}{\alpha} \varphi + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{\alpha} \varphi \right) \\ \beta &= A \left( \nu_1' \sin \frac{2\pi}{\alpha} \varphi + \nu_2' \sin \frac{4\pi}{\alpha} \varphi \right) \\ \beta_0 &= A \left( \nu_3' \sin \frac{2\pi}{\alpha} \varphi + \nu_4' \sin \frac{4\pi}{\alpha} \varphi \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (33 \cdot a \sim c)$$

と求まるが、一般に対称変形の方が低くい座屈荷重を与える。

## (2) 座屈荷重

(27), (28), (29) 式を  $V_i (i=1, 2 \sim 6)$  に代入し次のようにおけば、

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left( \beta_0' - \frac{1}{R} u' \right)^2 d\varphi \\ &= \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ (1 - \nu_3)^2 + (1 - 3\nu_4)^2 \right\} \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left( \beta'' - \frac{u''}{R} \right)^2 d\varphi \\ &= \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \left\{ (1 - \nu_1)^2 - (3 - 9\nu_2)^2 \right\} \frac{\alpha}{2} \\ I_3 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left( \frac{u''}{R} + \beta \right)^2 d\varphi \\ &= \left[ \left\{ \nu_1 - \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \right\}^2 + \left\{ \nu_2 - 3 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \right\}^2 \right] \frac{\alpha}{2} \\ I_4 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} (\beta - \beta_0)^2 d\varphi \\ &= \{ (\nu_1 - \nu_3)^2 + (\nu_2 - \nu_4)^2 \} \frac{\alpha}{2} \\ I_5 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \beta'^2 d\varphi \\ &= \left\{ \nu_1^2 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + 9\nu_2^2 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \right\} \frac{\alpha}{2} \\ I_6 &= \frac{1}{A^2} \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left( \frac{u'}{R} \right)^2 d\varphi \\ &= \left\{ 2 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \right\} \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (34 \cdot a \sim f)$$

$\delta V = 0$  より

$$C_I I_1 + \frac{C_{bd}}{R^2} I_2 + C_J I_3 + C_q R^2 I_4 - H_{cr} \left( \frac{b^2}{4} I_5 + R^2 I_6 \right) = 0$$

よって限界水平反力  $H_{cr}$  は

$$H_{cr} = \frac{GI_1 + \frac{C_{bd}}{R^2} I_2 + C_J I_3 + C_q R^2 I_4}{\frac{b^2}{4} I_5 + R^2 I_6} \quad \dots \dots \dots (35)$$

で与えられる。 $I_i (i=1, 2 \sim 6)$  は  $H$  の関数として与えられているので (35) 式は  $H_{cr}$  の陰関数となっているが、 $I_i (i=1, 2 \sim 6)$  中の  $H_{cr}$  による  $H_{cr}$  の変化は比較的小さく遂次近似を行えば十分正確な値が得られると思われる。(35) 式を整理して書けば限界応力度  $\sigma_{cr}$  は、

$$\begin{aligned} \sigma_{cr} &= E \\ &\times \frac{4a^2 m \left( \frac{i}{\alpha R} \right)^2 \bar{I}_1 + a^4 \left( \frac{b}{\alpha R} \right)^2 \left( \frac{i}{\alpha R} \right)^2 \bar{I}_2 + a^2 \left( \frac{b}{\alpha R} \right)^2 \bar{I}_3}{a^2 \left( \frac{b}{\alpha R} \right)^2 \bar{I}_5 + 4 \bar{I}_6} \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (36)$$

$$\text{ここで } m = \frac{GJ_T}{EJ_y}, i^2 = \frac{J_y}{F}, \bar{I}_i = I_i \left( \frac{2}{\alpha} \right)$$

である。

今 (30) 式で  $H$  の項の最小荷重に対する影響は小さいとし無視すれば、

$$\nu_1 = \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2, \nu_2 = 3 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \quad \dots \dots \dots (37)$$

となり、また横樋は十分剛であり、主析に剛結されているものとすれば  $\nu_1 = \nu_3, \nu_2 = \nu_4$  となる。この場合  $\bar{I}_i$  の値はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \bar{I}_1 &= \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ 2 - 20 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + 82 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \right\} \\ \bar{I}_2 &= \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \left\{ 10 - 164 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + 726 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^4 \right\} \\ \bar{I}_3 &= \bar{I}_4 = 0, \bar{I}_5 = 82 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^6, \bar{I}_6 = 2 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (38 \cdot a \sim e)$$

図-4 (a) (39) 式の座屈係数の値

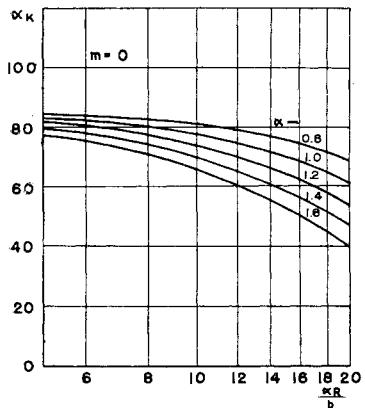


図-4 (b) (39) 式の座屈係数の値

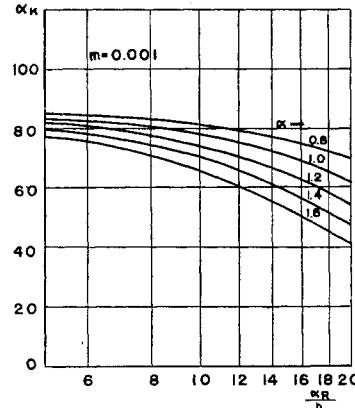
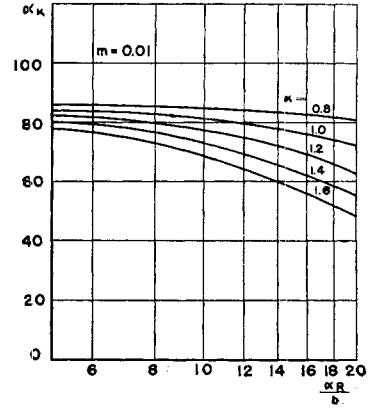


図-4 (c) (39) 式の座屈係数の値



もし横桁はヒンジで主桁に結合されているものとすれば、(32)式で

$$\nu_3 = 1, \nu_4 = \frac{1}{3}$$

となり、よって(34-a)式で

$$I_1 = 0$$

となり、主桁のねじり剛性はこのような変形に

対しては発揮できない。(36)式はさらに整理すると(37)式で与えられるような変形に対しても、

$$\sigma_{cr} = E \alpha_k \left( \frac{i}{\alpha R} \right)^2 \quad \dots \dots \dots \quad (39)$$

$$\alpha_k = \frac{4 \alpha^2 m \bar{I}_1 + \alpha^4 \left( \frac{b}{\alpha R} \right)^2 \bar{I}_2}{\alpha^2 \left( \frac{b}{\alpha R} \right)^2 \bar{I}_5 + 4 \bar{I}_6} \quad \dots \dots \dots \quad (40)$$

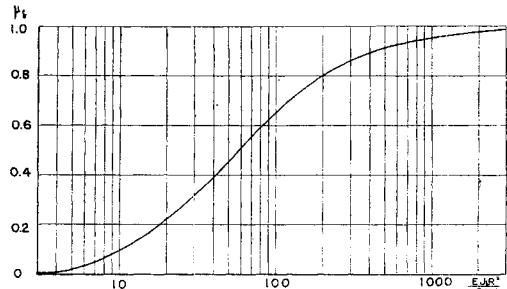
が得られる。すなわちアーチ主桁の水平軸まわりの回転半径  $i$  とアーチ軸全長の比の関数として座屈応力を示し、その係数  $\alpha_k$  を  $\alpha, m, \left( \frac{b}{\alpha R} \right)$  の値を変えて示せば図-4(a)~(d) が得られる。

### (3) 横桁の曲げ剛性の影響

前節でわかるとおりアーチ主桁のねじれ剛性がねじれ座屈におよぼす影響は非常に大きいが、主桁を連結する横桁の曲げ剛性がある程度の値をもたないとねじれ剛性の効果は発揮できない。また横桁がピン構造で主桁に結合されているときも同ようである。今  $\frac{C_q R^2}{6 C_T} = \frac{E J_q R^2}{G J_T b \lambda} = p$  の値を変え、主桁のねじり剛性の低下率  $\mu_q$  を求めたのが図-5である。図からわかるとおり主桁のねじり剛性を十分に発揮させるには  $p$  は  $10^3$  程度の値をとることが望ましく、1程度ではほとんどねじり剛性は期待

できない。

本理論では横構の変形を無視しているが、横構の断面が小さいとやはり耐荷力は減少すると予想される。また端部で  $z$  軸まわりの回転が許されると限界応力は今与えられた値の  $1/4$  以下となり、アーチはねじれ変形に対し非常に弱くなってしまう。アーチのねじれ座屈を防止する上からも、起拱部は十分強固にする必要があると思われる。

図-5 横桁の曲げ変形によるねじり剛性の減少率  $M_q$ 

### (4) 荷重がアーチ クラウンより $h_c$ だけ上にある場合

前章ではこの項を省略して計算を進めたが、座屈変形は直接アーチ軸に載荷された場合と同じく(28), (29), (31)式を用いて  $V_s$  を求めると次式が得られる。

$$V_s = q \frac{A^2}{2} R^2 I_s$$

$$I_s = \left( 1 + \frac{h_c}{R} \right) \left[ \frac{\nu_1^2}{4} \left\{ \frac{3}{4 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 9} \sin \frac{3}{2} \alpha + \frac{3}{4 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1} \sin \frac{\alpha}{2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2} \alpha + 3 \sin \frac{\alpha}{2} \right\} + \frac{\nu_1 \nu_2}{2} \left\{ \frac{3}{4 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 9} \sin \frac{3}{2} \alpha \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3}{4 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1} \sin \frac{\alpha}{2} - \frac{3}{16 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 9} \sin \frac{3}{2} \alpha \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{16 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1} \sin \frac{\alpha}{2} \right\} + \frac{\nu_2^2}{4} \left\{ \frac{1}{12 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 3} \sin \frac{3}{2} \alpha \right. \right]$$

図-6 (a) 荷重が  $h_c$  だけアーチ クラウンより上にあるときの  $\alpha_k$  減少率  $M_h$

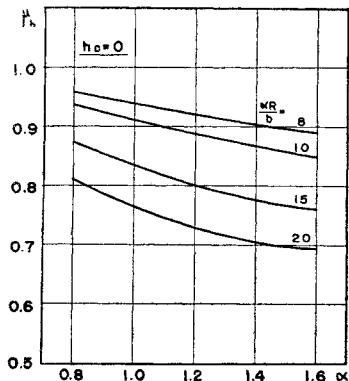
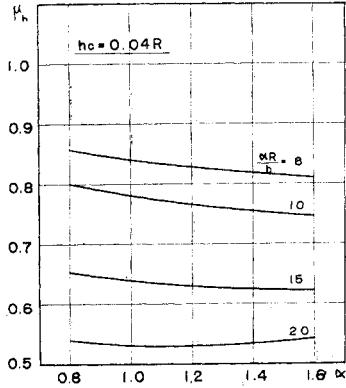


図-6 (d) 同上



$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{36\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{3} \sin \frac{3}{2}\alpha + 3 \sin \frac{\alpha}{2} \Big] \\
 & - \left[ \frac{\nu_1^2}{8} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 4} \sin 2\alpha + \frac{2}{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right. \right. \\
 & + 2 \sin \alpha + \frac{3}{2}\alpha \Big\} + \frac{\nu_1\nu_2}{8} \left\{ \frac{2}{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 4} \sin 2\alpha \right. \\
 & + \frac{4}{\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \alpha - \frac{1}{2\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 2} \sin 2\alpha \\
 & - \frac{4}{4\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \alpha \Big\} + \frac{\nu_2^2}{8} \left\{ \frac{1}{9\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 4} \sin 2\alpha \right. \\
 & + \frac{2}{9\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2 - 1} \sin \alpha + \frac{1}{4} \sin 2\alpha + 2 \sin \alpha + \frac{3}{2}\alpha \Big\} \Big]
 \end{aligned} \quad (41)$$

よって (35) 式の分母に  $\frac{R^2 I_b}{\alpha_H}$  を加えると荷重がアーチ クラウンより  $h_c$  だけ高い場合の限界水平反力を求めることができる。 $\alpha_H$  は (1) 式で与えたように荷重  $qR$  による水平反力を求める係数で  $H = \alpha_H \cdot qR$  で与えられる。荷重が  $h_c$  だけアーチ クラウンより上にあるための  $\alpha_k$  の減少率  $\mu_h$  は (37) 式で与えられる変形に対しても、

図-6 (b)  
同左

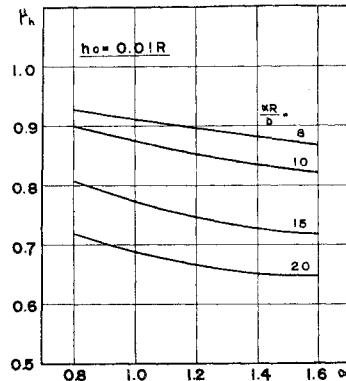


図-6 (c)  
同左

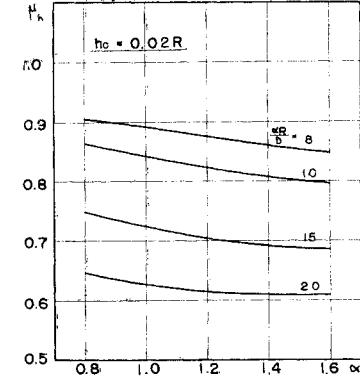


図-6 (a)～(d) に示したようになる。すなわちアーチ軸に直接載っているとした場合の  $\alpha_k$  を  $\mu_h$  倍すればよい。このように荷重が高い位置にあるための減少率はかなり大きく  $h_c = 0.04R$  の場合主桁間隔が狭く  $\alpha R/b = 20$  のときは座屈荷重は約半分になってしまう。

#### 4. 結 言

主桁に閉じた断面を使用すると  $m=1 \sim 0.1$ 、開いた断面を使用すると  $10^{-2} \sim 10^{-3}$  程度の値を  $m$  はとするものと思われる。 $m=10^{-2} \sim 10^{-3}$  程度のねじり剛性ではほとんどねじれ座屈の防止に役立たないことが 図-4 を見るとわかる。アーチ軸の長さを一定にとって考えるとアーチの高さが低い場合ねじり剛性が小さいときは主桁間隔が座屈荷重におよぼす影響は比較的小さいが、ねじり剛性が大きくなると、主桁間隔が狭くなると逆にかえってねじれ座屈荷重は大きくなり、例えば  $m=0.1$ 、 $b/\alpha R=1/8$  のときにくらべ  $b/\alpha R=1/20$  のときは座屈応力は約2倍となる。アーチの高さが高くなるとねじり剛性が小さいものは主桁間隔が狭くなるに従い座屈荷重は低下するが、ねじり剛性が大きいときは主桁間隔が狭いほど座屈荷重は大きくなるが、低いアーチほどは大きくならない。一般にアーチの高さが高いほど座屈荷重は低下する。

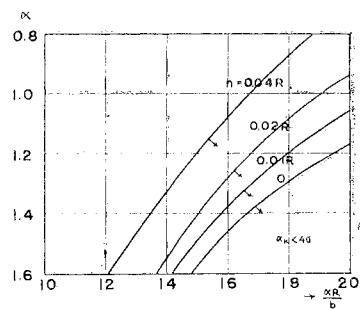
このようにねじり剛性が大きいときは主桁間隔が狭いとねじれ座屈よりも側方への曲げ座屈、または面内座屈の方が問題になるとと思われる。側方への曲げ座屈は、(29), (31) 式で  $\nu_1=\nu_3=1$ ,  $\nu_2=\nu_4=1/3$  なる値をとると起りその限界水平反力は、

$$\sigma_{cr} = E \alpha_{KB} \left( \frac{b}{\alpha R} \right)^2 \quad (42)$$

で与えられ  $\alpha_{KB}$  は 表-1 で与えられる。

表-1

$\alpha$	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6
$\alpha_{KB}$	$4.87\pi^2$	$4.72\pi^2$	$4.72\pi^2$	$4.61\pi^2$	$4.51\pi^2$

図 7  $\alpha_K$  が 40 以下なる  $\alpha$  と  $\frac{\alpha R}{b}$  の関係

面内座屈と比較すると逆対称面内座屈の  $\alpha_K$  は 40 度の値をとるが、荷重が直接アーチ軸に載っているときはねじれ剛性が小さく  $\alpha=1.6$ ,  $b/\alpha R=1/20$  程度のときは  $\alpha_K$  は 40 度となり、ねじれ座屈が起る危険が生じるが荷重がアーチ クラウンより  $h_c$  だけ上にあるときは、

ねじれ剛性が小さい場合 図一7で示した曲線より右下側にアーチ主桁間隔および中心角があるとき  $\alpha_K$  は 40 以下となり、面内座屈よりねじれ座屈が生じやすくなる。今述べたように主桁断面を開いた断面を用いた場合ねじれ座屈を起こす可能性があるが、閉じた断面を用いても横橋の剛度が低い場合はねじれ剛性を十分に発揮できない。ねじれ座屈を防止するためには少なくとも  $m\mu_q$  が 0.1 以上の値となることが望ましいと思われる。

## 参考文献

- 1) 長柱委員会：“弾性安定要覧”，コロナ社（1960）
- 2) Timoshenko, S.: Theory of Elastic Stability, McGraw Hill (1936)
- 3) Bleich : Buchling Strength of Metal Structure, McGraw Hill (1952)
- 4) 倉西正嗣：“弾性率”，日本機械学会（1948）
- 5) Ratzerdorfer : Die Kuickenfestigkeit von Staben und Stabwerken, Springer (1936)

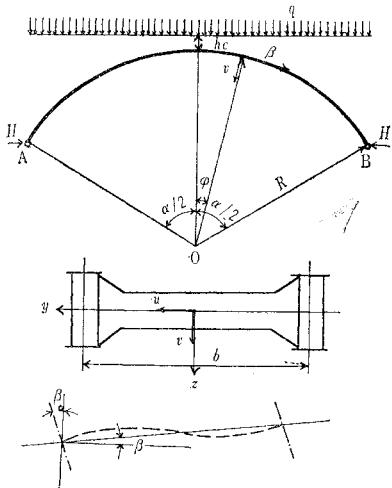
（原稿受付：1961.1.10）

# THE TORSIONAL BUCKLING STRENGTH OF SOLID RIB ARCH BRIDGE

By Dr. Eng., Shigeru Kuranishi, C.E. Member

## SYNOPSIS

In this paper, the author discusses the laterally torsional elastic buckling problem of two-hinge circular arch bridge, composed of two main arched girders, cross beams and lateral bracing, loaded by uniformly distributed vertical forces (see Fig. 1). Employing the energy method, he obtains the critical stress.



**Fig. 1**

The total potential energy of the distorted arch is given as a function of the displacement and twist as follows:

$$\begin{aligned}
 V = & \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \left[ \frac{GJ_T}{R^2} \left( \beta_0' - \frac{1}{R} u' \right)^2 + \frac{EJb^2}{4R^4} \left( \beta'' - \frac{1}{R} u'' \right)^2 \right. \\
 & + \frac{EFb^2}{4R^2} \left( \beta + \frac{1}{R} u'' \right)^2 + \frac{6EJ_q}{b\lambda} (\beta_0 - \beta)^2 \\
 & - \left( \frac{b^2}{8R^2} \beta'^2 + \frac{1}{2R^2} u'^2 \right) H - \frac{q}{2} \{ (h_c + R) \cos^2 \varphi \right. \\
 & \left. - R \cos^3 \varphi \} \beta^2 \} R \cdot d\varphi \dots \dots \dots (1)
 \end{aligned}$$

where  $J_T$  is the torsional coefficient,  $F$  is the area,  $J$  is the moment of inertia about  $y$  axis of the main arched girder's cross section,  $J_q$  is the moment of inertia of the cross beams' cross section and  $\lambda$  is the spacing of the cross beams.

As the functions which satisfy the boundary conditions, the deflection curve and twist

curve of the arch axis are assumed to be of the forms

$$u = A \cdot R \left( \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \dots \dots \dots (2 \cdot a)$$

$$\beta = A \left( \nu_1 \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \nu_2 \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \dots \dots \dots (2 \cdot b)$$

$$\beta_0 = A \left( \nu_3 \cos \frac{\pi}{\alpha} \varphi + \nu_4 \cos \frac{3\pi}{\alpha} \varphi \right) \dots \dots \dots (2 \cdot c)$$

where

$$\nu_1 = \frac{\left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{2R^2H}{EFb^2} + 1 \right) \right\}}{\left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left( 1 + \frac{H}{2EF} \right) - 1}$$

$$\nu_2 = \frac{3 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left\{ 9 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - \left( \frac{2R^2H}{EFb^2} + 1 \right) \right\}}{9 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 \left( 1 + \frac{H}{2EF} \right) - 1}$$

$$\nu_3 = \frac{\left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{6EJ_qR^2}{GJ_Tb\lambda} \nu_1}{\left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{6EJ_qR^2}{GJ_Tb\lambda}}$$

$$\nu_4 = \frac{3 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{6EJ_qR^2}{GJ_Tb\lambda} \nu_3}{9 \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + \frac{6EJ_qR^2}{GJ_Tb\lambda}}$$

Those deflection and twist curves produce no strain energy due to bending about the radial axis and give the arch a minimum strain energy. The buckling load in symmetrical mode is smaller than that in asymmetric one.

The average critical stress at the arch crown can be expressed as

$$\sigma_{cr} = E \alpha_K (i/\alpha R)$$

where  $i$  is the radius of gyration of the main arched girder's cross section and therefore  $(i/\alpha R)$  means the slenderness ratio of the arch rib. The buckling coefficient  $\alpha_K$  depends on the loading condition, the torsional rigidity of the main girder, the flexural rigidity of the cross beams, the distance between the two main girders, and also on the central angle and radius of the arch axis. The  $\alpha_K$  is computed neglecting the terms of  $H$  in Eq. (2) and shown in the figures with various ratios  $m = GJ_T/EJ$ , with various ratios  $(b/\alpha R)$  and with

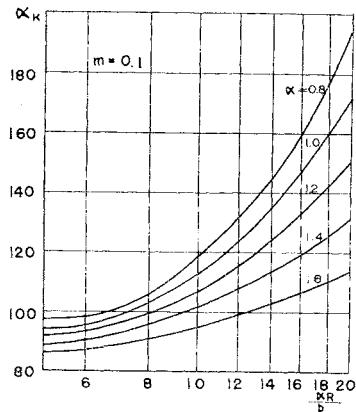


Fig. 2

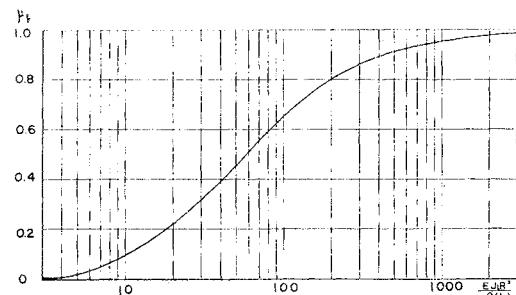


Fig. 4

stress becomes lower. This reduction factor  $\mu_h$  to  $\alpha_K$  is also computed for various ratios  $h_c/R$  and shown in the figures.

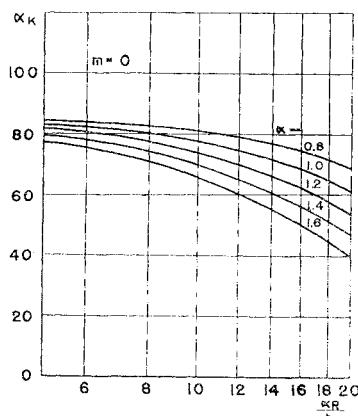


Fig. 3

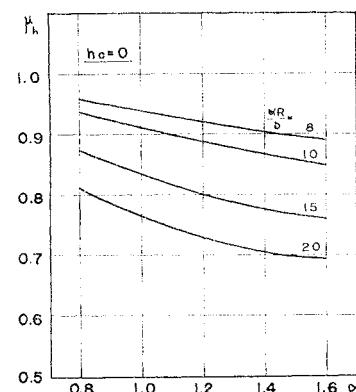


Fig. 5

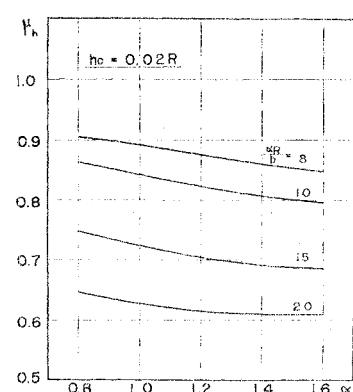


Fig. 6

various central angles  $\alpha$ . For example,  $\alpha_K$  is shown here in Figs. 2 and 3 in the case of  $m=0.1$  and  $m=0$ .

Generally speaking, the flatter is the arch, the higher is the critical stress. When the arched main girder has fairly large torsional rigidity, the narrower is the arch, the higher is the critical stress for the torsional buckling. When the main girder has fairly small torsional rigidity, the narrower is the arch, the lower is the critical stress.

The above mentioned results have been obtained under the assumptions that the cross beams are rigid and rigidly connected to the main arched girder. While the torsional rigidity is reduced by the deformation of cross beams. This reduction factor  $\mu_q$  for the torsional rigidity of the main arched girder is computed and shown in Fig. 4.

When the loads are applied on the horizontal line  $h_c$ , above the arch crown the critical

For example, this reduction factor  $\mu_h$  is shown in Figs. 5 and 6, when  $h_c/R=0$  and  $h_c/R=0.04$ .

The critical stress for the buckling in the plane of arch axis is expressed in the same form as that of the trsional buckling and in this cose,  $\alpha_K$  is about 40. Therefore, there is the possibility of the occurrence of torsional buckling, when  $\alpha_K$  is smaller then 40. The region  $\alpha_K < 40$  is computed varying the ratio  $h_c/R$  in the case  $m=0$  and shown in Fig. 7.

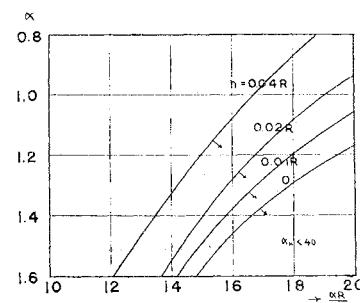
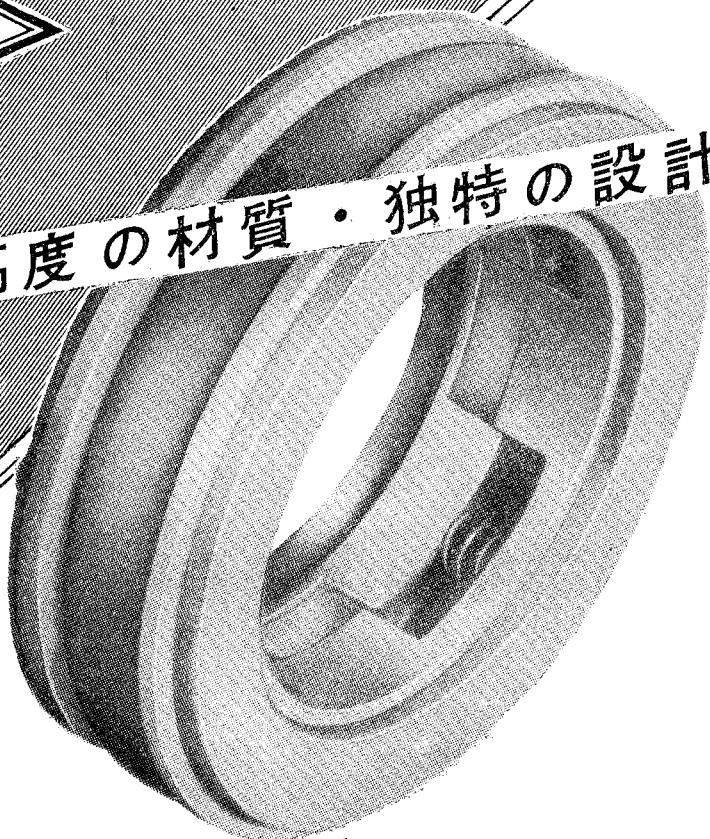


Fig. 7



高度の材質・獨特の設計



ブルドーザー用

側面シール  
(ダイキヤスト)

其他建設機械用オイルシール

## 日本オイルシール工業株式會社

本社・工場 東京都大田区緑谷町5~1222 TEL (741) 代表 0775~9直 0770  
東京営業所 東京都中央区銀座東4~1 TEL (541) 1761~37461.2788  
大阪営業所 大阪市北区堂島大工町3~1 TEL (34) 6615~76620  
名古屋営業所 名古屋市中村区徳島町1~221豊田ビル701号 TEL (55) 代表 5111-5121-3181直 3096  
浜松営業所 浜松市駿河町4~20 TEL 茨町 (3) 0662  
島根営業所 島根市錆原町9~8 TEL (2) 6750  
福岡営業所 福岡市天神町8 西日本ビル 509号 TEL (4) 代表 6731~9  
札幌営業所 北海道札幌市北二条西3~1越山ビル406号 TEL (3) 代表 1324