

水平横荷重を受けるアーチ橋について

正員 倉 西 茂*

ANALYSIS OF ARCH BRIDGE UNDER CERTAIN LATERAL FORCES

By Dr. Eng., Shigeru Kuranishi, C.E. Member

Synopsis: In this paper, the author carries out the analysis of two-hinged arch bridge under certain lateral forces, which is composed of two arched main girders and calculates the torsional moment, bending moment and normal stress acting on the arched girders, representing the bridge by a curved beam. The influences of flexural rigidity of cross beams on the torsional rigidity of bridge and the tensile forces produced in the arch shoes are discussed.

要旨 本論文は2本の主桁をもった鋼アーチ橋を1本のはりで代表させ、水平横荷重を受けたときに生じるねじりモーメント曲げモーメントを求めるとともに主桁に働く応力度を算出したものである。また横桁の曲げ剛性が橋のねじり剛性によれば影響や支点に引張り応力が働く恐れのあることが述べられている。

1. 序論

垂直荷重のつくる連力線図にアーチ軸線の形を近似させることにより、アーチ橋は応力の軽減をはかることができる。しかし橋軸に垂直な水平荷重に対しては、橋軸の弯曲の影響を受けてアーチリブに曲げとねじり応力が働き、必ずしも応力的に有利な構造とはいえない。特に支間が長くなると巾員と支間の比が小さくなり、横荷重により端部のアーチ シューに引張り力が生じるかどうかという問題とともにアーチリブに働く直応力度の値も問題になってくる。このアーチリブに対する横荷重問題については岡本舜三教授¹⁾により二、三の断面のものについて解かれているが、一般の鋼アーチ橋に見られるように2本の主桁を横桁、横構で結合した形式のものについて解かれた例はまだ見当らないようである。そこで本論文では、このような形式のものについて応力解析、および変形計算を行なったものである。

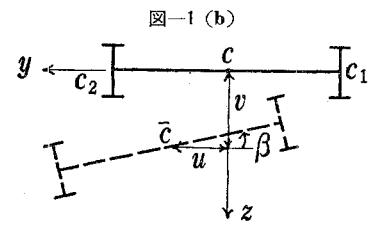
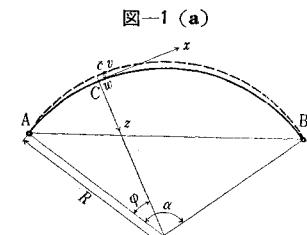
またこれらの値を用いて補剛アーチ橋にも近似的に適用できる。取り扱いの簡便さからアーチ軸線は円弧アーチに限ったが特にライズが高くない限り同じ挾矢比であれば放物線アーチなどにも適用できると思われる。

2. 基礎弾性方程式の誘導

(1) 橋断面の変形がないとした場合

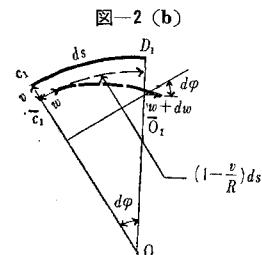
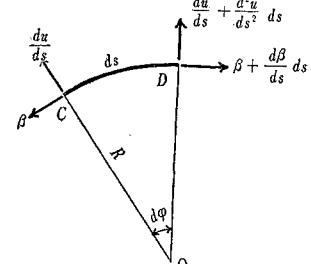
2本のアーチ主桁は剛体の横桁で剛結されており、主桁断面の形は変形しないものとする。また横構の伸び、すなわち側方へのせん断変形も無視する。図-1に示したように極座標の原点をアーチ円弧の中心にとり、その

中心角を α とする。任意の断面Cは支点Aを原点としこれとなす角 φ で与える。また断面に固定した座標 x, y, z を同図に示したようにとる。水平横荷重 q を受けてアーチ軸上の任意の点cは輻射方向に v 、アーチ軸



方向に w 、アーチをふくむ面に垂直に u だけ変形するものとする。ここでアーチ軸は両主桁の断面中心を結ぶ線の中点を通る曲線で、これによりアーチ橋を代表させる。 v は中心に向うもの w は φ が増加する方向に、 u は支点Aより見て左方に荷重 q は u と同一方向に向うものを正とする。橋断面の回転は支点Aより見て逆時計まわりに回転するものを正とする。

いまアーチの微少部分CDをとり出し、その変形状態を考えて見る。図-2(a)に示したように断面Cは z 軸まわりに (du/ds) だけ回転し断面Dは $(du/ds + d^2u/ds^2 \cdot ds)$ だけ回転する。また断面Cは x 軸まわりに β だけ回



* 東大工学博士 東北大学講師 工学部土木工学科

転し断面Dは $(\beta + d\beta/ds \cdot ds)$ だけ回転する。よってC断面に対する断面Dのz軸まわりの回転の増加のわりあり τ_z は

$$\begin{aligned}\tau_z ds &= \left(\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2} ds \right) \cos d\varphi \\ &\quad + \left(\beta + \frac{d\beta}{ds} ds \right) \sin d\varphi - \frac{du}{ds} \\ \therefore \tau_z &\doteq \frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\beta}{R} \end{aligned}\quad \dots(1)$$

で与えられる。同様にして断面Cに対する断面Dのx軸まわりの回転の増加の割合 τ_x はねじり率を表わし、

$$\begin{aligned}\tau_x ds &= \left(\beta + \frac{d\beta}{ds} \cdot ds \right) \cos d\varphi \\ &\quad - \left(\frac{du}{ds} + \frac{d^2u}{ds^2} ds \right) \sin d\varphi - \beta \\ \therefore \tau_x &\doteq \frac{d\beta}{ds} ds - \frac{du}{ds} d\varphi \end{aligned}\quad \dots(2)$$

で与えられる。つぎに図-1(b)で左側の主桁がCD面で切り取られる部分を C_1D_1 とし、主桁中心の変位を u_1, v_1, w_1 とし、ほかの側の主桁のそれは u_2, v_2, w_2 で表わすこととする。いま $\overline{C_1D_1}, \overline{C_2D_2}$ の伸びと C_1, C_2 断面に対する D_1, D_2 断面のy軸まわりの回転の変化、すなわち曲率の変化 τ_{y1}, τ_{y2} を求めよう。最初 ds だけ離れていた2点 C_1D_1 は変化しそれぞれ $(v_1, w_1), (v_1 + dv_1/ds \cdot ds, w_1 + dw_1/ds \cdot ds)$ なる点 $\overline{C_1D_1}$ に移る。高次の微少項を無視すればz軸方向に $dv_1 + (w_1 + dw_1) d\varphi \doteq dv_1 + w_1 d\varphi$ だけ \overline{D}_1 は \overline{C}_1 に対し変位の差を生じる。よって $\overline{C_1D_1}$ の傾斜は

$$\frac{dv_1 + w_1 d\varphi}{ds} = \frac{dv_1}{ds} + \frac{w_1}{R} \quad \dots(3)$$

で与えられる(図-2(b)参照)。この傾斜の変化がy軸まわりの、アーチ主桁の曲率変化を与えるのであるから、y軸まわりの曲率の変化 τ_{y1} は

$$\tau_{y1} = \frac{d^2v_1}{ds^2} + \frac{1}{R} \frac{dw_1}{ds} \quad \dots(4)$$

と書くことができる。いま主桁の中心軸の伸びを ϵ_{x1} とすれば図-2(b)からもわかるように

$$\epsilon_{x1} = -\frac{v_1}{R} + \frac{dw_1}{ds} \quad \dots(5)$$

で与えられる。(4)式に(5)式を代入して次式を得る。

$$\tau_{y1} = \frac{dv_1}{ds^2} + \frac{v_1}{R^2} + \frac{\epsilon_{x1}}{R} \quad \dots(6)$$

橋全断面の中心軸の伸びは他の項に比して無視できるものとすれば、主桁の中心軸の伸びは

$$\epsilon_{x1} = -\frac{b}{2} \left(\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\beta}{R} \right) \quad \dots(7)$$

とおくことができる。ここで b は主桁間隔である。また $v_1 = v + b\beta/2$ なる関係があるゆえ、これらを(6)式に代入して、次式を得る。

$$\tau_{y1} = \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} + \frac{b}{2} \left(\frac{d^2\beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2u}{ds^2} \right) \quad \dots(8-a)$$

右側の主桁についても同様に次式が得られる。

$$\tau_{y2} = \frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} - \frac{b}{2} \left(\frac{d^2\beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2u}{ds^2} \right) \quad \dots(8-b)$$

いまアーチ軸に働くy軸まわりの曲げモーメントを M_y , z軸まわりの曲げモーメントを M_z , x軸まわりのねじりモーメントを MT とし、 M_y の中主桁(1)に働くものを M_{y1} 、主桁(2)に働くものを M_{y2} とし、それぞれ変形を増大させるものを正とすれば次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_z &= -EJ_z \left(\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\beta}{R} \right) \\ M_{y1} &= -EJ_y \left(\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} + \frac{b}{2} \left(\frac{d^2\beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2u}{ds^2} \right) \right) \\ M_{y2} &= -EJ_y \left(\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} - \frac{b}{2} \left(\frac{d^2\beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2u}{ds^2} \right) \right) \\ MT &= 2GJ_T \left(\frac{d\beta}{ds} - \frac{1}{R} \frac{du}{ds} \right) + \frac{b}{2} (Q_2 - Q_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots(9-a \sim d)$$

ここで、 EJ_z は橋断面全体としての側方へ対する曲げ剛性で主桁の断面積を F とすれば近似的に $J_z = Fb^2/2$ で与えられる。 J_y は主桁のy軸まわりの断面2次モーメント、 GJ_T は主桁のねじり剛性、 Q_1, Q_2 はそれぞれの主桁に働く中心方向に向うせん断力である。しかるに

$$-Q_1 = \frac{dM_{y1}}{ds} - \frac{M_{1T}}{R}, \quad -Q_2 = \frac{d}{ds} - \frac{M_{2T}}{R} \quad \dots(10)$$

なる関係が力の平衡より生じるから(図-3参照) $M_{1T} = M_{2T}$ とし

$$Q_2 - Q_1 = \frac{dM_{y1}}{ds} - \frac{dM_{y2}}{ds} = EJ_y b \left(\frac{d^3\beta}{ds^3} - \frac{1}{R} \frac{d^3u}{ds^3} \right)$$

$$\text{よって } MT = 2GJ_T \left(\frac{d\beta}{ds} - \frac{1}{R} \frac{du}{ds} \right) - \frac{EJ_y b^2}{2} \left(\frac{d^3\beta}{ds^3} - \frac{1}{R} \frac{d^3u}{ds^3} \right) \quad \dots(11)$$

を得る。またy軸まわりの曲げモーメントに対しても

$$M_y = M_{y1} + M_{y2} = -2EJ_y \left(\frac{d^2v}{ds^2} + \frac{v}{R^2} \right) \quad \dots(12)$$

が得られる。いま

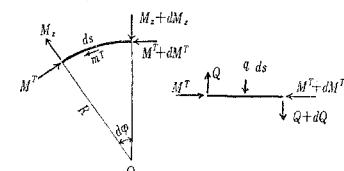


図-3

アーチ軸の微少部分を取り出して作用する力の平衡を見ると図-3で示したように次の関係を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{dM_z}{d\varphi} - Q - \frac{MT}{R} &= 0, \\ \frac{\partial MT}{\partial \varphi} + M + Rm^T &= 0, \quad q - \frac{1}{R} \frac{\partial Q}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots(13-a \sim c)$$

(13-b)式の関係を入れ(11),(9-a)式より u の項を消去すればねじれ角 β についての微分方程式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} &-\frac{C_{bd}}{R^4} \beta'''' + \left(\frac{C_T}{R^2} - \frac{C_{bd}}{R^4} \right) \beta'' + \frac{C_T}{R^2} \beta \\ &= -\frac{1}{R} \left(1 + \frac{C_T}{C_J} \right) M_z + \frac{C_{bd}}{C_J R^3} M_z'' - m^T \end{aligned} \quad \dots(14)$$

上式より β を求めれば変位 u は (9-a) 式を用いて計算することができる。ここで'は α について微分したことを表わし、

$$C_T = 2GJ_T, C_{bd} = \frac{EJ_y b^2}{2}, C_J = \frac{EFb^2}{2}$$

である。

(2) 横桁の曲げを考慮した場合

本節では横桁は主桁に剛結されているが、その曲げ変形を考慮した場合の弾性方程式を求める。前節と同じく横構の伸び変形は無視し、主桁自身の曲げねじり剛性は省略する。前節と同じ記号を用い、1本の横桁の断面2次モーメントを J_q とする。図-4 に示したように、横

図-4



桁端は $(\beta - \beta_1)$ なるたわみ角を生じる。ここで β は主桁中心軸を結ぶ直線の傾き、 β_1 は主桁のねじり角である。このとき横桁端に働いている曲げモーメントの値は

$$M_q = \frac{6EJ_q}{b}(\beta - \beta_1) \quad \dots \dots \dots (15)$$

である。いまこの M_q が格間に一ように分布しているものとすれば単位長さ当たり次式で与えられる。

$$\bar{M}_q = \frac{M_q}{\lambda} = \frac{6EJ_q}{b\lambda}(\beta - \beta_1) \quad \dots \dots \dots (16)$$

ここで λ は横桁間隔である。

主桁のみで受けもっている z 軸まわりの曲げモーメントの量を省略すれば、 \bar{M}_q は主桁に対しひねじりモーメントとして働くのであるから次の式が成立する。

$$GJ_T \left(\frac{d^2\beta_1}{ds^2} - \frac{d^2u}{ds^2} \cdot \frac{1}{R} \right) + 6 \frac{EJ_q}{b\lambda} (\beta - \beta_1) = 0 \quad \dots \dots \dots (17)$$

任意断面でアーチを切りモーメントの平衡を考えると近似的に

$$2GJ_{T1} \left(\frac{d\beta_1}{ds} - \frac{1}{R} \frac{du}{ds} \right) - \frac{EJ_y b^2}{2} \left(\frac{d^3\beta}{ds^3} - \frac{1}{R} \frac{d^3u}{ds^3} \right) = M_T \quad \dots \dots \dots (18 \cdot a)$$

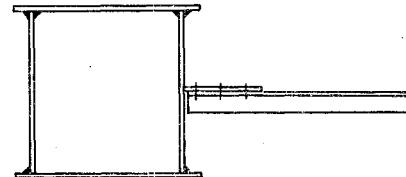
$$- \frac{EFb^2}{2} \left(\frac{d^2u}{ds^2} + \frac{\beta}{R} \right) = M_z \quad \dots \dots \dots (18 \cdot b)$$

が得られる。(17) 式と (18-a), (18-b) 式より β_1 の項を省略すれば β についての微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{C_{bd}}{R^6} \beta_{VI} + \left(\frac{C_{bd}}{R^4} - \frac{C_{bd} \cdot C_q}{C_T} \right) \frac{1}{R^4} \beta_{IV} \\ & + \left(C_q - \frac{C_{bd} \cdot C_q}{R^2 C_T} \right) \frac{1}{R^2} \beta'' + \frac{C_q}{R^2} \beta \\ & = - \frac{C_{bd}}{C_J R^5} M_z IV + \left(\frac{C_{bd} C_q}{C_T C_J} + 1 \right) \frac{1}{R^3} M_z'' \\ & - \left(\frac{C_q}{C_J R} + \frac{C_q}{C_T R} \right) M_z - m^{TT''} + \frac{C_q}{C_T} m^T = 0 \quad \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

ここで $C_q = 12 EJ_q / b\lambda$ を表わす。もし横桁の曲げ剛性が非常に小さいか、あるいは図-5 のように主桁に剛結されていない場合は $J_q \neq 0$ と見ることができる。すると (19) 式は

図-5 ねじり剛性を期待できない横桁結合法



$$\frac{C_{bd}}{R^6} \beta_{VI} + \frac{C_{bd}}{R^6} \beta_{IV} = \frac{C_{bd}}{R^3 C_J} M_z IV + \frac{1}{R^3} M'' - m^{TT''} \quad \dots \dots \dots (19 \cdot a)$$

となり前節 (14) 式で $GJ_T = 0$ とおいた式

$$- \frac{C_{bd}}{R^4} \beta_{IV} - \frac{C_{bd}}{R^4} = \frac{C_{bd}}{R^3 C_J} M_z'' - \frac{1}{R} M - m^T \quad (14 \cdot a)$$

を β について 2 度微分した式と一致する。すなわち主桁にねじり剛性の大きいものを使用しても、ある程度の曲げ剛性をもった横桁で剛結しない限り横荷重によるねじりには効果を発揮しないことがわかる。また $C_q \rightarrow \infty$ とすれば (19) 式は (14) 式と全く一致する。(19) 式は 6 階常微分方程式であるが隅数次の項のみからなっており、その上解の中 $\beta = \sin \varphi, \cos \varphi$ はすぐ得られるから解くことは困難ではない。しかし本節ではいちいち厳密な解を求めるのではなく、横桁の曲げ剛性が橋のねじり剛性に大きな影響を与えると考え、横桁の曲げによるねじり剛性の低下をある荷重状態について求め、これを換算ねじり剛性とし (10) 式のねじり剛性の代りに用いることとする。いま曲げモーメントは $M_z = M_0 \sin \pi \varphi / \alpha$ で与えられるものとすれば、ねじり角は横桁の曲げを考慮に入れると (19) 式より

$$\begin{aligned} \beta = & \frac{C_{bd} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^4 / C_J R^4 + \left(\frac{C_{bd} C_q}{C_T C_J R^2} + \frac{1}{R^2} \right) \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 + C_q \left(\frac{1}{C_J} + \frac{1}{C_T} \right)}{\left\{ C_{bd} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^4 / R^5 + C_{bd} C_q \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 / C_T R^3 + C_q / R \right\} \left\{ \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\}} \\ & M_0 \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} \quad \dots \dots \dots (20 \cdot a) \end{aligned}$$

横桁の曲げを考慮しない場合は (14) 式より

$$\beta = \frac{1 + C_T / C_J + C_{bd} / R^2 C_J}{\left\{ C_{bd} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^4 / R^5 + C_T / R \right\} \left\{ \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2 - 1 \right\}} M_0 \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha} \quad \dots \dots \dots (20 \cdot b)$$

(20-a) 式と同じねじり角を与えるように (20-b) 式の C_T の値を減じ \bar{C}_T とすれば、 \bar{C}_T は次式で与えられる。

$$\bar{C}_T = C_T \frac{1}{1 + \frac{GJ_T}{6EJ_q} \frac{b\lambda}{R^2} \left(\frac{\pi}{\alpha} \right)^2} \quad \dots \dots \dots (21)$$

よって以後の計算で横桁の曲げの影響を考慮する場合はこの換算ねじり剛性を用い β の算出には (14) 式を用いることとする。いま 図-6 に示したような主桁断面をもったアーチ橋に対し換算ねじり剛性と横桁の曲げ剛性的関係を求めるに図-7 が得られる。ここで諸定数は次の通りである。

$$\begin{aligned} J_T &= 3.323 \times 10^6 \text{ cm}^4, & J_y &= 3.558 \times 10^6 \text{ cm}^4, \\ F &= 960 \text{ cm}^2, & R &= 80 \text{ m}, \alpha &= 1.2 \end{aligned}$$

$$b, \lambda = 7 \text{ m}$$

横桁の曲げの影響は荷重状態によってかなり異なってくるが、横荷重に対し主桁のねじり剛性の効果を十分に期待できるようにするには、 GJ_T と EJ_q の比は次式で与える値以下であることが望ましい。

$$\frac{GJ_T}{EJ_q} < 0.006 L^2 / b \lambda \quad \dots\dots(22)$$

3. アーチ軸に等分布荷重が加わったときアーチ軸に働く曲げモーメントとねじりモーメント

ここで取り扱うアーチ橋は2本の主桁で構成されているものであるが、これを前章で述べたように両主桁中心軸の中央を走るアーチ軸で代表させて考える。またねじり中心と断面中立軸は一致するものとし横荷重の合力はアーチ軸に働くものとする。

図-8に示したようにアーチ軸ABをふくむ面に垂直な荷重 q を軸上に受けているときAOと φ なる角をなす断面Cに働く曲げモーメントとねじりモーメントは軸を荷重方向にたわむるもの、 \overline{BC} を逆時計まわりにねじるものとすれば次式で与えられる。図-8に示したベクトルは時計まわりを正とする。

$$\left. \begin{aligned} M_z &= -M_A \cos \varphi + M_A T \sin \varphi + R_A R \sin \varphi \\ &\quad - \int_0^\varphi q R^2 \sin(\varphi - \psi) d\psi \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

$$MT = M_A T \cos \varphi + M_A \sin \varphi - RA(1 - \cos \varphi)$$

$$+ \int_0^\varphi q R^2 \{1 - \cos(\varphi - \psi)\} d\psi$$

q は単位長さについての等分布荷重とし上式を計算し整

$$C_1 = -\frac{B_1 \{2 \sin \alpha \cos \alpha + (1 + \mu^2) \alpha\} + B_2 \{\mu^2 \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha\} + B_3 \mu^2 (1 - \cos \alpha) + B_4 (1 - \cos \alpha)}{(1 + \mu^2) \sin \alpha} \quad \dots\dots(30\text{a})$$

$$C_2 = \frac{B_1 (2 \sin \alpha \cosh \mu \alpha) + 2 B_2 \sin \alpha - B_3 (1 - \cosh \mu \alpha) + B_4 (1 - \cosh \mu \alpha)}{(1 + \mu^2) \sinh \mu \alpha} \quad \dots\dots(30\text{b})$$

$$C_3 = \frac{2 B_1 \sin \alpha - \mu^2 B_3 - B_4}{1 + \mu^2}, \quad C_4 = \frac{-2 B_1 \sin \alpha - B_3 + B_4}{1 + \mu^2} \quad \dots\dots(30\text{c})$$

図-6

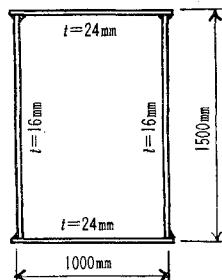
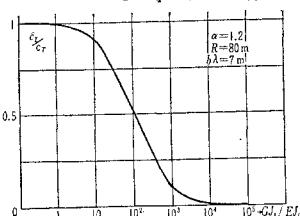
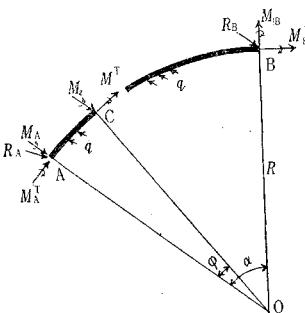
図-7 換算ねじり剛性と GJ_T/E_J の間の関係

図-8



理すれば

$$\left. \begin{aligned} M_z &= -M_A \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha} - M_B \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha} \\ &\quad + q R^2 \frac{\sin(\alpha - \varphi) + \sin \varphi - \sin \alpha}{\sin \alpha} \\ MT &= M_A T \cos \varphi + M_A \sin \varphi \\ &\quad - R_A R (1 - \cos \varphi) + q R^2 (\varphi - \sin \varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots(25)$$

が得られる。

4. アーチ軸に等分布荷重が加わったときのアーチ軸のたわみ、ねじり角、端モーメントの算出

(14) 式の荷重項を (25) 式より求めると

$$\begin{aligned} &\frac{1}{R} (-C_{m1} M_z + C_{m2} M_z'') \\ &= -\frac{(C_{m1} + C_{m2})(M_A - q R^2)}{\sin \alpha} \sin(\alpha - \varphi) \\ &\quad -\frac{(C_{m1} + C_{m2})(M_B - q R^2)}{\sin \alpha} - C_{m1} q R^2 \end{aligned}$$

ここで $C_{m1} = 1 + C_T/C_J$, $C_{m2} = C_{bd}/R^2 C_J$ である。

C_{bd}, C_T, C_J は全径間にわたり一定とすれば (14) 式の解は

$$\begin{aligned} \beta &= C_1 \sin \varphi + C_2 \sinh \mu \varphi + C_3 \cos \varphi + C_4 \cosh \mu \varphi \\ &\quad + B_1 \varphi \cos(\alpha - \varphi) + B_2 \varphi \cos \varphi + B_3 \end{aligned} \dots\dots(27)$$

ここで $C_i (i=1, 2, 3, 4)$ は端部の支持条件で定まる定数である。また

$$\begin{aligned} B_1 &= -B_2 = -\frac{(C_{m1} + C_{m2})}{2 \left(\frac{C_{bd}}{R^3} + \frac{C_T}{R} \right) \sin \alpha} (M_A - q R^2) \\ B_3 &= \frac{R^3 C_{m1}}{C_T} q, \quad \mu = \frac{R^2 C_T}{C_{bd}} \end{aligned} \dots\dots(28\text{a} \sim \text{c})$$

である。端部条件として2ヒンジアーチ橋では端部で主桁のそりの制限がないものとすれば

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 0 \text{ で } \beta = 0, \beta'' - \frac{1}{R} u'' = 0 \\ \varphi &= \alpha \text{ で } \beta = 0, \beta'' - \frac{1}{R} u'' = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(29)$$

である。ところで (9-a) 式より

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -R \beta - \frac{R^2}{C_J} M_z$$

β は端部で0であり、 $M_z = -M_A = -M_B$ であるから $R/C_J \cdot M_A = B_4$ とおき (29) 式は

$$\varphi = 0 \text{ で } \beta = 0, \beta'' = B_4, \varphi = \alpha \text{ で } \beta = 0, \beta'' = B_4 \dots\dots(29\text{a})$$

と書くことができる。すると $C_i (i=1, 2, 3, 4)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{B_1 \{2 \sin \alpha \cos \alpha + (1 + \mu^2) \alpha\} + B_2 \{\mu^2 \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \alpha + 2 \sin \alpha\} + B_3 \mu^2 (1 - \cos \alpha) + B_4 (1 - \cos \alpha)}{(1 + \mu^2) \sin \alpha} \\ C_2 &= \frac{B_1 (2 \sin \alpha \cosh \mu \alpha) + 2 B_2 \sin \alpha - B_3 (1 - \cosh \mu \alpha) + B_4 (1 - \cosh \mu \alpha)}{(1 + \mu^2) \sinh \mu \alpha} \\ C_3 &= \frac{2 B_1 \sin \alpha - \mu^2 B_3 - B_4}{1 + \mu^2}, \quad C_4 = \frac{-2 B_1 \sin \alpha - B_3 + B_4}{1 + \mu^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(30\text{a} \sim \text{d})$$

側方へのたわみはいま得られた β を用いて (9-a) 式より
得られる。すなわち

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} &= -\frac{R^2}{C_J} M_z - \beta R \quad \text{より} \\ u &= RC_1 \sin \varphi - \frac{RC_2}{\mu^2} \sinh \mu \varphi + RC_3 \cos \varphi \\ &\quad - \frac{RC_4}{\mu^2} \cosh \mu \varphi + RB_1 \{2 \sin(\alpha - \varphi) + \varphi \cos(\alpha - \varphi)\} \\ &\quad + RB_2 (\varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi) - \frac{B_3 R}{2} \varphi^2 + M_1 \sin(\alpha - \varphi) \\ &\quad + M_2 \sin \varphi - \frac{M_3}{2} \varphi^2 + D_1 \varphi + D_2 \quad \dots \dots \dots (31) \end{aligned}$$

ここで D_1, D_2 は $\varphi = 0, \varphi = \alpha$ で $u = 0$ なる端部条件より定まる定数であり次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{\alpha R}{2} B_3 + \frac{M_3}{2} \alpha \\ D_2 &= -2RB_1 - \frac{1+\mu^2}{\mu^2} \sin \alpha - RB_3 \frac{1-\mu^2}{\mu^2} \\ &\quad - M_1 \sin \alpha + \frac{B_4}{\mu^2} \\ \text{また } M_1 &= \frac{R^2}{C_J} \left(\frac{-M_A + qR^2}{\sin \alpha} \right) \\ M_2 &= \frac{R^2}{C_J} \left(\frac{-M_B + qR^2}{\sin \alpha} \right), \quad M_3 = -\frac{R^2}{C_J} qR^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (32 \cdot a \sim e)$$

である。端モーメント M_A は端部のたわみ角が 0 であることより定められる。すなわち $\varphi = 0$ で $\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0$

より M_A を求めるとき式で与えられる。

$$M_A = M_B = mqR^2 \quad \dots \dots \dots (33)$$

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{K_1 + K_2 + 2(1+\mu^2)k \left\{ \frac{\alpha}{2} \sin \alpha - (1-\cos \alpha) \right\}}{K_1 + 2(1+\mu^2)k \{K_3 \sin \alpha - (1-\cos \alpha)\}} \\ K_1 &= (1-\cos \alpha) \left(1 - \frac{\alpha}{\sin \alpha} + \frac{2}{1+\mu^2} \right) \\ &\quad - \frac{2 \sin \alpha (\cosh \mu \alpha - 1)}{\mu (1+\mu^2) \sinh \mu \alpha} \\ K_2 &= \frac{C_{m1}}{C_{m1} + C_{m2}} \left\{ 2(1-\cos \alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(\cosh \mu \alpha - 1) \sin \alpha}{\mu^3 \sinh \mu \alpha} - \frac{\alpha(1+\mu^2)}{\mu^2} \sin \alpha \right\} \\ K_3 &= -\frac{1-\cos \alpha}{(1+\mu^2) \sin \alpha} + \frac{\cosh \mu \alpha - 1}{\mu (1+\mu^2) \sinh \mu \alpha} \\ k &= \frac{C_{bd}}{(C_{m1} + C_{m2}) R^2 C_J}, \quad \mu = \frac{R^2 C_T}{C_{bd}} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (34 \cdot a \sim f)$$

(33) 式の計算では一般に有効数字が限小するので、有効数字は必要とするものより 3 術程度は多くとって計算を始める必要がある。側方への曲げによる項はねじりの項に比較して一般に非常に小さい。ねじり剛性が 0 の

場合は (34) 式は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= (1-\cos \alpha) \left(3 - \frac{\alpha}{\sin \alpha} \right) - \alpha \sin \alpha \\ K_2 &= \frac{1}{1+C_{m1}} \left\{ 2(1-\cos \alpha) - \left(\alpha + \frac{\alpha^3}{12} \right) \sin \alpha \right\} \\ K_3 &= 0, \quad k = \frac{C_{bd}}{C_J (1+C_{m2}) R^2}, \quad \mu = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (35 \cdot a \sim e)$$

通常のアーチ橋で、主桁に I 形断面を使ったものでは (33) 式の m の値はほとんどねじり剛性がないものの値と等しくなり次式で与えられる。

$$m = 0.1012 \alpha^2 \quad \dots \dots \dots (36)$$

またこの値はねじり剛性がかなり大きいものにも近似的に適用できる。

M_A が求められると端部に働くねじりモーメントの値も (25) 式を用いて算出される。すなわち

$$M_A T = -M_A \frac{1-\cos \alpha}{\sin \alpha} + qR^2 \frac{1-\cos \alpha - \alpha/2 \sin \alpha}{\sin \alpha} \quad \dots \dots \dots (37)$$

で与えられる。アーチ主桁に働く直応力度は z 軸まわりの曲げによるもの σ^m とねじり変形によるもの σ^T とにわければそれぞれ次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma^m &= \pm E \frac{b}{2} \left(\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\beta}{R} \right) \\ \sigma^T &= \pm E \frac{b}{2} \left(\frac{d^2 \beta}{ds^2} - \frac{1}{R} \frac{d^2 u}{ds^2} \right) z \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (38)$$

上式を整理すれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma^m &= \pm \frac{b}{2 J_z} M_z \\ \sigma^T &= \pm \left\{ \frac{bz}{2 J_z R} M_z + q \frac{Ebz}{2} BT \cdot q \right\} \\ BT &= \frac{R^3}{C_{bd}} \left[\frac{\sinh \mu(\alpha - \varphi) + \sin \mu \varphi}{\sinh \mu \alpha} - \frac{\sin(\alpha - \varphi) + \sin \varphi}{\sin \alpha} \right] \\ &\quad \times \frac{(1-m)(C_{m1} + C_{m2})}{1+\mu^2} \\ &\quad + \left\{ 1 - \frac{\sin \mu(\alpha - \varphi) + \sin \mu \varphi}{\sinh \mu \alpha} \right\} \frac{C_{m1}}{\mu^2} \\ &\quad + \left\{ \frac{\sinh \mu(\alpha - \varphi) + \sinh \mu \varphi}{\sinh \mu \alpha} \right\} \frac{R}{C_J} M_A \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (40 \cdot a)$$

となる。 z は中立軸より突縁までの距離である。いま主桁に I 形断面等を用いねじり剛性が非常に小さい場合は $G J_T \neq 0, \mu \neq 0$ とみなして次式となる。

$$\left. \begin{aligned} BT &= \frac{R^3}{C_{bd}} \left\{ \frac{\alpha \varphi - \varphi^2}{2} - \frac{(1-m)(1+C_{m1})}{\sin \alpha} \right. \\ &\quad \left. \times \{ \sin(\alpha - \varphi) + \sin \varphi - \sin \alpha \} \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (40 \cdot b)$$

ねじり剛性がないとした場合各種の α についてアーチクラウンでの BT の値を求めるとき図-9 が得られる。一般に高いアーチほどねじりによる応力度は大きくなる。

また $\alpha=1.2$ の場合
アーチ軸にそって
 B^T の変化の様子を
画くと 図-10 のよ
うになる。ねじれに
よる応力の最も大き
くなるのはアーチクラ
ウンより支点付近
であることがわかる。

5. 計算例

次のような断面定
数および寸法をもつ
たアーチ橋主桁が横荷重を受けた場合について計算して
見よう。

$$\begin{aligned} R &= 8.0 \times 10^3 \text{cm}, \quad \alpha = 1.2, \quad b = 5 \times 10^2 \text{cm}, \\ E &= 2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2 \quad F = 7.136 \times 10^2 \text{cm}^2, \\ J_y &= 3.1150 \times 10^6 \text{cm}^4, \quad J_z = 8.920 \times 10^7 \text{cm}^4 \\ J_T &= 2.7593 \times 10^3 \text{cm}^4, \quad J_y b^2/2 = 3.8937 \times 10^{11} \text{cm}^6 \end{aligned}$$

主桁は十分剛に横桁で連結されているものとすれば
 $C_T = 4.4574 \times 10^9 \text{kg} \cdot \text{cm}^3$ $C_{bd} = 8.1768 \times 10^{17} \text{kg} \cdot \text{cm}^4$
 $C_J = 1.8732 \times 10^{14} \text{kg} \cdot \text{cm}^2$ $\mu = 0.5906632$
 $C_{m1} = 1.0000237$ $C_{m2} = 0.0000682$

以上の定数を(34)式に入れて m の値を求めるとき、
 $K_1 = -3.3995 \times 10^{-2}$, $K_2 = 2.90393 \times 10^{-2}$ となり側方への曲げ剛性に関する項は、分母分子の項ともそれぞれ
 1.310×10^{-4} , 1.443×10^{-5} と K_1, K_2 に比較してかなり小さくなり、結局 $m = 0.14564$

を得る。 q は単位長当たりの風荷重強度であるが、道路橋示方書に従い $q = 0.75 \text{t/m}$

とすれば端モーメント M_A の値は

$$M_A = 0.75 \text{t/m} \times 80^2 \text{m}^2 \times 0.14564 = 699 \text{t} \cdot \text{m}$$

となる。主桁間隔は 5 m であるからアーチ シュートに働く垂直反力は

$$V_A = \pm \frac{M_A}{b} = \pm 139.8 \text{t}$$

となり普通死荷重による水平反力はこの程度のアーチでは 100 t 程度であるから床版または補剛桁の助けを得られないときは支点に引張り力が生じる危険がある。次に(37)式に従い起拱点に働くねじりモーメントの値を求めるとき $M_A^T = 74.6 \text{t} \cdot \text{m}$

が得られる。よってこのねじりモーメントによってアーチ シュートに生じるせん断力 S_A^T は

$$S_A^T = M_A^T / b = 14.9 \text{t}$$

水平横荷重によるもの S_A は

図-9 ねじり剛性を無視した場合
の各種 α に対するアーチ
クラウン B^T の値

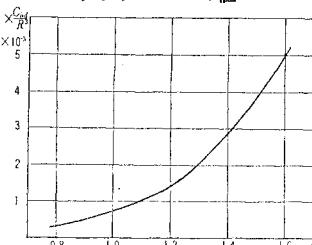
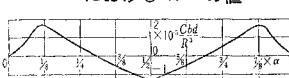


図-10 $GJ_T = 0$ のときの各断面
における B^T の値



$$S_A = \frac{R_A}{2} = \frac{1}{2} \frac{qR\alpha}{2} = 24 \text{t}$$

となり、この S_A^T と S_A の合力がアーチ シュートに働くせん断力として、垂直荷重によるものに加わることになる。いまほかの断面諸定数を変えず、ねじり剛性のみを 170 倍し $\mu = 10$ と大きくすると m の値は次のようになる。 $m = 0.1440$

次にアーチクラウンにおいてアーチ主桁に働いている直応力度の値を求めよう。ねじりによる応力度は(40)(39-b)式で $\varphi = \alpha/2$ とおき $\sigma^T = \pm 151.7 \text{kg/cm}^2$ となる。また曲げモーメントによるものは(39-a)式より $\sigma^m = \pm 47.3 \text{kg/cm}^2$ が得られる。結局風下側の主桁下突縁での応力度は $\sigma = 199 \text{kg/cm}^2$ となる。いま端モーメントが働くかない状態にあるとしねじりによる応力度を計算すると $\sigma^T = \pm 5631 \text{kg/cm}^2$ となり、風荷重による応力には端モーメント M_A が大きな働きをなしていることがわかる。よってアーチ シュートに引張り力が働き支点が浮くようなことがあれば主桁に働く応力度は急激に増加し風荷重に耐えられなくなることも考えられる。主桁に閉じた断面のものを使用し $\mu = 10$ となつたとすると $\sigma^T = \pm 54.9 \text{kg/cm}^2$ と応力度は減少し端モーメントが 0 の場合でも $\sigma^T = \pm 37.3 \text{kg/cm}^2$ と端モーメントの助けをかりずに風荷重に耐えることができる。このように主桁に閉じた断面を使用し横桁で剛に結合したものは横荷重に対しては有利な構造といいうことができる。また一般に端モーメントの値はかなり大きいが上路式の場合床版床組程度の曲げ剛性でも、支点が側方への変形に対し抵抗できるような構造のものでは、アーチ主桁の側方への変形はねじりによる側方への変形も加わり、比較的大きいのでアーチ主桁の側方への変形を防止し端モーメントの値を減少させることもできる。しかし床組の構造が弱いとかえって端モーメントそのほかの応力を増大させ、その値は 2 倍以上となることもあり、(31)式に従いアーチの側方への変形量を一応検討する必要があると思われる。その点上路式補剛アーチ橋の場合は確実にアーチ部の諸応力を軽減させることができ横荷重に対しては補剛アーチ橋は非常に有利な構造と思われる。

参考文献

- 岡本舜三：“輪線を含む面に垂直なる荷重を受ける円形曲り梁の研究”，土木学会誌，29巻，3号（1943）。
- Timoshenko, S.: "Theory of Elastic Stability" (1936).
- 倉西正嗣：“応用弹性学”，共立（1953）。
- Ostlund, L.: "Lateral Stability of Bridge Arches Braced with Traverse Bars", Göteborg (1954).
- Welsh, J.G.: "Lateral Load on High Arches", J.I.C.E., No.10 (1951).
- 平井・倉西：“曲線構理論について”，土木技術，13巻，7号（1958）。

（原稿受付：1960.9.28）