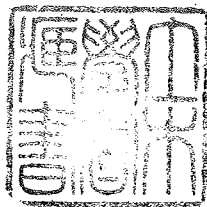


# 土 木 学 会 論 文 集

第 72 号・別冊 (3-1)

## 弾 性 針 金 の 変 形 と 応 力

正 員 工 博 島 田 静 雄



---

TRANSACTIONS  
OF  
THE JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS  
No. 72, EXTRA PAPERS (3-1)

THEORETICAL ANALYSIS FOR ELASTIC WIRES

*By Dr. Eng., Shizuo Shimada, C.E. Member*

February 1961  
TOKYO JAPAN

---

昭 和 36 年 2 月

土 木 学 会

# 弾性針金の変形と応力

正員 島田 静 雄\*

## THEORETICAL ANALYSIS FOR ELASTIC WIRES

By Dr. Eng., Shizuo Shimada, C.E. Member

**Synopsis:** Theoretical relations between the forces and deformation of wires are expressed by applying the vector-analysis, which deduces the three dimensional complicated formulae to certain more-simplified forms. Some important results are the rigidity of Spiral Ropes and Stranded Ropes.

**要旨** 細い弾性針金の立体的な変形と応力との関係をベクトル演算で展開し、スパイラル ロープ、ストランデッド ロープ等の性質を理論的に扱ったものである。

曲線針金として導いた基本の諸式は、アーチ、曲りばり等の解析にも応用を見出し得るもので、ベクトル演算による簡明な表現式は、三次元的な扱いをきわめて円滑にまとめる。

### 記号

$x, y, z$	三次元空間座標	$\varphi$	ピッチ角のパラメータ
$\xi, \eta, \zeta$	三次元の内部座標	$s$	長さを示すパラメータ
$t$	曲線の長さのパラメータ	$r$	ねじれ角
$k$	曲率	$\nu$	ポアソン比
$\rho$	ねじり率	$m, n$	素線の本数
$(R\theta), (r\theta)$	極座標	$A_1, A_2, E_1, E_2, E_3$	単位ベクトル
$EJ_\xi, EJ_\eta, EJ_B$	曲げ剛性	$V, C, N$	接線・法線・陪法線ベクトル
$GJ_T$	ねじれ剛性		で、いずれも単位ベクトル
$EA$	伸び剛性	$r$	動径ベクトル, 座標ベクトル
$\epsilon_r, \epsilon_\alpha, \epsilon_z$	ひずみ	$T, S, F, p, P$	力を示すベクトル
$a, b, c, f, m$	常数	$M, m$	曲げモーメントを示すベクトル
$\alpha, \beta$	ピッチ角 (スパイラルの)		ル

## 1. 弾性針金の曲げ・ねじれ・伸びの関係式

### (1) 記号と約束

まず一般的な定義と約束とを説明する。弾性的な細長い線状の物体を曲げたり、ねじったり、引張ったりするときの力の釣合いと変形との関係を導くに当って、数式の取り扱いと座標の概念とを結びつけるのにはベクトルの助けを借りると非常に簡明になる。針金の座標は空間曲線で与えられ、針金に作用する内力や外力は常にその方向が問題になるから、力やモーメントもベクトルの扱いをする。

針金の重心軸は滑らかな空間曲線で与えられるとし、急に折れ曲ったり、分岐したり、交わったりしないと仮定する。重心軸を与える空間曲線の位置は右手系の直交座標  $\{x, y, z\}$  で与え、これらを位置ベクトル  $r$  の成分とする。すなわち

$$r \equiv \{x, y, z\} \dots \dots \dots (1)$$

針金の重心軸に沿って計った長さを、ある基準点から  $t$  とすれば、パラメータ  $t$  を変数にして空間曲線の諸係数が定義される。すなわち曲線のある一点での接線・法線・陪法線の方向を示す単位長さのベクトル  $V, C, N$  は、空間曲線のその点での曲率  $k$ 、同じくねじり率  $\rho$  とともに Frenet-Serret の公式で要約される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &\equiv V, & \frac{dV}{dt} &\equiv k C \\ \frac{dC}{dt} &\equiv -k V + \rho N, & \frac{dN}{dt} &\equiv -\rho C \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

\* 東大工博、東京大学工学部土木工学科助手

$k$  の数値は常に正に選ぶことでベクトル  $C$  の方向は定まり、さらに  $V, C, N$  を右手系に定義して  $N$  の方向と、 $\rho$  の符号とが (2) 式との関連から定めることができる。

針金の内部座標を定義するために、重心軸に直角な断面内に  $\xi$  軸と  $\eta$  軸との  $z$  方向を定め、さらに先のパラメータ  $t$  と同方向に重心軸に沿った曲線座標  $u$  を定める。針金の断面形状は一定とし、急なねじりの変化がないものとする。一般に断面形状には直交する2つの主軸があるから、この方向に  $\xi$  軸と  $\eta$  軸とを一致させて考えると便利である。 $\xi, \eta, z$  の3つの座標軸の方向は針金の各点で異なるから、ある一点での方向を3つの単位ベクトル  $i, j, V$  で与え、これを同じく右手系に定める。

2つの単位ベクトル  $i, j$  は  $k$  軸に直交するから法線ベクトルと陪法線ベクトル  $C$  と  $N$  とのふくまれる平面内にあり、次のような座標軸間との関係があることになる。

$$\left. \begin{aligned} C &\equiv i \cos \theta + j \sin \theta \\ N &\equiv -i \sin \theta + j \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

または逆の形で

$$\left. \begin{aligned} i &\equiv C \cos \theta - N \sin \theta \\ j &\equiv C \sin \theta + N \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3')$$

$\theta$  は針金自身の断面の主軸と針金の曲率の方向との間の角度であり、平面内の変形を扱う一般の面内力学では  $\theta=0$ 、または  $\theta=n\pi/2$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$  の特殊な場合に属する。いま (3') 式を  $t$  で微分し、(2) 式を代入して整理すると

$$\left. \begin{aligned} \frac{di}{dt} &\equiv -kV \cos \theta + \left[ \rho - \frac{d\theta}{dt} \right] j \\ \frac{dj}{dt} &\equiv -kV \sin \theta - \left[ \rho - \frac{d\theta}{dt} \right] i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに  $\rho$  は空間曲線のねじり率であるが、 $d\theta/dt$  は針金自身のねじれ量である。(4) 式の持つ意味を解説する。例えば円柱に針金をスパイラルに巻きつけたとする。普通に巻きつければ、円柱を一回まわることにより針金の断面は同じく円柱を中心に戻り、針金は断面がねじられたように見える。そこで巻きつけた針金の両端を持って、円柱を取りのぞいて針金を真直にすれば針金にはねじれが入ってしまう。この場合、始めに巻きつけるときには針金をねじらないよう巻きつけたのであるから  $d\theta/dt=0$  である。しかしすでに空間曲線の持つねじり率の成分  $\rho$  だけが入っているから、円柱をはずして針金を引張って真直にすると  $\rho$  に相当するねじりが針金に加わることになる。

紙テープを円柱にスパイラルに巻きつける場合を想像するとさらによくわかる。テープの断面の座標軸は次第に回転して巻きつくが、テープをねじるという意識はなく、曲げながら巻きつける。しかし、この状態で円柱を抜けば、テープは完全にねじれて残る。

針金の両端を拘束しておいて巻きつければ、(4) 式において  $\rho - d\theta/dt=0$  の条件が必要になる。このさい円柱に針金を巻きつけると同時に針金にはねじりを加えていくことになるのである。

針金に作用する力と変形との関係を導く前に二、三の仮定を与えておく。まず、針金の局所的な微小変形は Hooke の法則を満たすとする。始めに重心軸に直角な一平面内にあった針金の各部は変形後も平面内にあるとし、かつこの平面は変形後の針金の重心軸に直角であると仮定する。すなわち通常のはりの曲げ理論における仮定である。このさい、せん断変形を考えない。はりのせん断変形からわかるように、変形後の平面はせん断変形の場合に重心軸と直交しないからである。

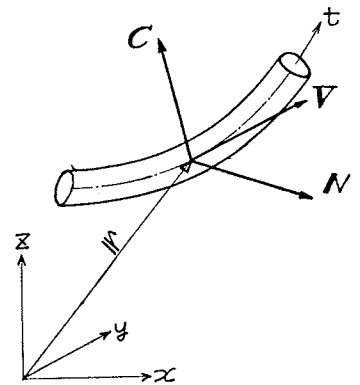
針金の断面係数は、曲げとねじれと伸びの3つの力に対する剛性として与え、断面の主軸まわりの曲げに対する曲げ剛性  $EJ_\xi, EJ_\eta$ , ねじれに対する剛性  $GJ_T$ , 伸びに対する剛性  $EA$  の4つは針金に個々の定数とする。

針金の位置を示す座標  $u$  は針金の内部座標を定めるパラメータであり、 $t$  は空間曲線としての針金の座標を与えるパラメータであるから同一の原点から取ったとしても、変形前と変形後とはあらかじめ別の値となることに注意しなければならない。

## (2) 針金の変形

細長い弾性針金の変形は、変形が大きさが非常に大きいので通常のはりの曲げを扱うようにはゆかない。変形

図-1



前と変形後との針金の同一の箇所での(くの等しい所), 局所的な微小変形がどのような力と釣合っているかで論じられる。変形前の針金の状態から力を受けて変形したとし, 変形後の状態をダッシュをつけて次のように区別する。

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow \mathbf{r}' & (\mathbf{i}, \mathbf{j}) &\rightarrow (\mathbf{i}', \mathbf{j}') \\ \mathbf{V} &\rightarrow \mathbf{V}' & \theta &\rightarrow \theta' \\ \mathbf{C} &\rightarrow \mathbf{C}' & t &\rightarrow t' \\ \mathbf{N} &\rightarrow \mathbf{N}' \end{aligned}$$

いま隣接する2点  $t_1$  と  $t_2$  の座標が始めに  $t_1, t_2$  であって, 変形後  $t'_1, t'_2$  になったとすれば, 伸びの量は

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{(t'_2 - t'_1) - (t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)} = \epsilon_t \dots \dots \dots (5)$$

$t_2 - t_1 = \Delta t$  において, 針金の隣接した2点の相対的な変形の量は次のように定まる。

$$\Delta \mathbf{V} \equiv (\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1) - (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \equiv \Delta t [(1 + \epsilon_t) \mathbf{V}' - \mathbf{V}]$$

上のベクトルを  $t$  で微分すれば, 2点間の相対的な曲げが得られる。すなわち

$$\frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{V}) \equiv \Delta t [(1 + \epsilon_t) \mathbf{k}' \mathbf{C}' - \mathbf{k} \mathbf{C}]$$

このベクトルに(3)式で示した針金の内部座標を与える関係を代入する。

$$\frac{d}{dt} (\Delta \mathbf{V}) \equiv [(1 + \epsilon_t) \mathbf{k}' (\mathbf{i}' \cos \theta' + \mathbf{j}' \sin \theta') - \mathbf{k} (\mathbf{i} \cos \theta + \mathbf{j} \sin \theta)] \Delta t$$

2組の座標系  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}), (\mathbf{i}', \mathbf{j}')$  は, そもそも針金内部の座標の方向を与えるものである。変形の量がいちじく大きくくれば, 2組の座標系はそれぞれ異なった方向を向くが, 相対的な2点の曲げの量を知るにはこの2組の座標を重ねて考えればよい。そこで, 変形後の座標軸のベクトルを基準にとって次のように表わす。

$$[\mathbf{k}' (1 + \epsilon_t) \cos \theta' - \mathbf{k} \cos \theta] \mathbf{i}' + [\mathbf{k}' (1 + \epsilon_t) \sin \theta' - \mathbf{k} \sin \theta] \mathbf{j}' \dots \dots \dots (6)$$

(6)式は変形の大い弾性針金の隣接する2点で生じた相対的な曲げの量をベクトルで与えたものである。例えば  $\theta' = \theta = 0, k = 0$  のときは始めに真直であったはりを曲げる場合に相当し, はりの変位  $y$  を2度微分した形である  $d^2y/dx^2$  に方向を考えた表わし方をしたのが(6)式である。

(3) 針金に作用する内力と外力

隣接する2点  $t_1, t_2 (t_2 > t_1)$  で針金を切断し, 微小片の切断面に作用している力とモーメントとを考えることにする。

作用する力は針金の重心軸方向の張力  $T$ , 軸線に直角方向のせん断力  $S$  である。モーメントは軸線まわりのねじりモーメント  $M_T$  と, 曲げモーメント  $M_B$  とがある。これらの力とモーメントとは方向性を持つからベクトルの扱いをする。力はベクトルで表わすのは問題ないが, モーメントをベクトルで表わすには, ネジを巻く動作と関連させ, 右ネジの進む方向をベクトルの向きとする。

力の向きおよびモーメントの向きを定めるために, 切断点  $t_1$  で作用している力およびモーメントの向きを常に論ずることにする。これらの力やモーメントは内力であるから  $t_2$  点では方向が逆になった場合を意味することになる。

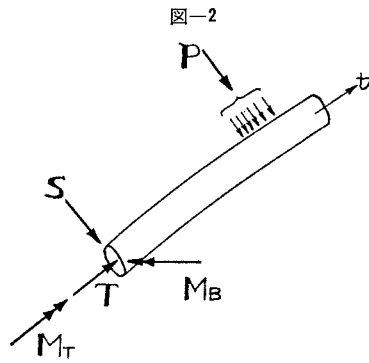
従って内力の成分を次のようにベクトルで表わす。

$$\begin{aligned} \text{力} & \quad \mathbf{F} \equiv \mathbf{T} + \mathbf{S} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{T}; \text{張力, } \mathbf{V} \text{ と同方向} \\ \mathbf{S}; \text{せん断力, } \mathbf{V} \text{ と直交} \end{array} \right\} \\ \text{モーメント} & \quad \mathbf{M} \equiv \mathbf{M}_B + \mathbf{M}_T & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{M}_B; \text{曲げモーメント, } \mathbf{V} \text{ と直交} \\ \mathbf{M}_T; \text{ねじりモーメント, } \mathbf{V} \text{ と同方向} \end{array} \right\} \end{aligned} \dots \dots \dots (7)$$

針金に作用する外力はやはり力とモーメントの2種類がある。一般に単位長さ当りの針金に作用する外力としてベクトルで与え, それぞれ  $\mathbf{p}, \mathbf{m}$  とする。

内力と外力との釣合いの条件は  $t_1$  と  $t_2$  との間の微小素片での釣合いから誘導できる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{F}_2 &\equiv \mathbf{F}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{p} dt \\ \mathbf{M}_2 &\equiv \mathbf{M}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{m} dt + \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{F} \times \mathbf{V}) dt \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$



ここに  $(\mathbf{F} \times \mathbf{V})$  はベクトル積である。(8) 式は次のように微分形で与えると便利である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{dt} &\equiv \mathbf{p} \\ \frac{d\mathbf{M}}{dt} &\equiv \mathbf{m} + (\mathbf{F} \times \mathbf{V}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

さらに外力モーメント  $\mathbf{m} \equiv 0$  と考えると、

$$\frac{d^2\mathbf{M}}{dt^2} \equiv \frac{d\mathbf{F}}{dt} \times \mathbf{V} + \mathbf{F} \times \frac{d\mathbf{V}}{dt} \equiv \mathbf{p} \times \mathbf{V} + k(\mathbf{F} \times \mathbf{C}) \dots\dots\dots (10)$$

#### (4) 針金の内力と変形との関係

針金の曲げ剛性が  $\xi$  軸と  $\eta$  軸とで異なるような一般的な場合について導くことにする。先の(6)式は針金の相対的な変形の量から導いた曲率と曲げの方向とを与えるベクトルであるから、曲げモーメントはこのベクトルと関連して釣合う。ただし曲げ剛性が2方向で異なるから主軸まわりの曲げモーメントは次のように定まる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_\eta &\equiv [k'(1+\epsilon_t)\cos\theta' - k\cos\theta](-j')EJ_\eta \\ \mathbf{M}_\xi &\equiv [k'(1+\epsilon_t)\sin\theta' - k\sin\theta](i')EJ_\xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

曲げモーメントは  $\mathbf{M}_\xi + \mathbf{M}_\eta$  であり、その方向は針金の接線方向に直交する。そして再び  $i', j'$  を  $\mathbf{C}', \mathbf{N}'$  で与えて整理すれば、次のような基本関係式を得る。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\xi + \mathbf{M}_\eta &\equiv \{-k'(1+\epsilon_t)(EJ_\xi \sin^2\theta' + EJ_\eta \cos^2\theta') + k(EJ_\xi \sin\theta \sin\theta' + EJ_\eta \cos\theta \cos\theta')\}\mathbf{N}' \\ &\quad + \{k'(1+\epsilon_t)(EJ_\xi - EJ_\eta)\cos\theta' \sin\theta' - k(EJ_\xi \sin\theta \cos\theta' - EJ_\eta \cos\theta \sin\theta')\}\mathbf{C}' \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

(12) 式は最も一般的な形で与えてあるが、条件の簡単な場合を示してみる。

(a) 始めに真直な針金であった場合—— $k=0$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\xi + \mathbf{M}_\eta &\equiv \{-k'(1+\epsilon_t)(EJ_\xi \sin^2\theta' + EJ_\eta \cos^2\theta')\}\mathbf{N}' \\ &\quad + \{k'(1+\epsilon_t)(EJ_\xi - EJ_\eta)\cos\theta' \sin\theta'\}\mathbf{C}' \dots\dots\dots (12-1) \end{aligned}$$

(b)  $EJ_\xi = EJ_\eta = EJ$  で、かつ始めに真直であった場合

$$\mathbf{M}_\xi + \mathbf{M}_\eta \equiv -k'(1+\epsilon_t)EJ_B\mathbf{N}' \dots\dots\dots (12-2)$$

(c)  $\theta = \theta'$  の場合 (例えばワイヤロープを引張った場合に素線は変形前と変形後において素線の断面はスパイラルの中心から見て常に同じ面を向けている)。

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_\xi + \mathbf{M}_\eta &\equiv -[k'(1+\epsilon_t) - k](EJ_\xi \sin^2\theta' + EJ_\eta \cos^2\theta')\mathbf{N}' \\ &\quad + [k'(1+\epsilon_t) - k](EJ_\xi - EJ_\eta)\sin\theta' \cos\theta' \mathbf{C}' \dots\dots\dots (12-3) \end{aligned}$$

(d)  $EJ_\xi = EJ_\eta = EJ_B$  の場合

$$\mathbf{M}_\xi + \mathbf{M}_\eta \equiv -[k'(1+\epsilon_t) - k\cos(\theta' - \theta)]EJ_B\mathbf{N}' + [kEJ_B \sin(\theta' - \theta)]\mathbf{C}' \dots\dots\dots (12-4)$$

(e)  $\theta = \theta'$ ,  $EJ_\xi = EJ_\eta = EJ_B$  の場合

$$\mathbf{M}_\xi + \mathbf{M}_\eta \equiv -[k'(1+\epsilon_t) - k]EJ_B\mathbf{N}' \dots\dots\dots (12-5)$$

これらの(12)式および、その類似式に解説を加える。通常の曲げは、曲げモーメント(ベクトル)の方向と陪法線  $\mathbf{N}$  の向きとが平行であり、はりの曲げは法線  $\mathbf{C}$  をふくむ面内に曲がる。ところが針金があらかじめ曲線をしていて断面の曲げ剛性が2方向で異なれば、陪法線方向とモーメントの方向とがそれる現象がでてくる。諸式中ベクトル  $\mathbf{C}$  の成分がそれである。始めに真直であった針金でも  $\xi$  軸と  $\eta$  軸とに関する曲げ剛性が異なれば、曲げモーメントの作用面内から変形はそれる(12-1)式。針金がねじられているとき( $\theta \neq \theta'$ )、曲げを受けるとやはりそりの現象があらわれる(12-4)式。

次にねじれモーメントに関する釣合い条件を導く。

ねじりモーメントは、針金の変形前と変形後の相対的なねじれの量の差から導かれるものであり、座標軸を与えるベクトル  $i, j$  の方向の相対的な角変化量で定まる。(4)式において、座標軸の回転成分は  $\rho - d\theta/dt$  であり、この量の相対的な変化量は

$$\left(\rho' - \frac{d\theta'}{dt}\right)(1+\epsilon_t) - \left(\rho - \frac{d\theta}{dt}\right)$$

ねじりモーメントは接線ベクトル  $\mathbf{V}'$  と同方向になり

$$\mathbf{M}_\zeta \equiv \mathbf{M}_T \equiv -GJ_T \left[ \left(\rho' - \frac{d\theta'}{dt}\right)(1+\epsilon_t) - \left(\rho - \frac{d\theta}{dt}\right) \right] \mathbf{V}' \dots\dots\dots (13)$$

(12)式と(13)式とを合わせて、結局針金の断面に作用している曲げモーメントがすべて定められることとなる。

針金に作用している断面力には、軸方向の力と、せん断力とがある。軸方向の力は針金の軸線に平行であり、簡単に定まる。引張応力を正とよめて

$$\mathbf{T} \equiv -EA \varepsilon_t \mathbf{V}' \dots\dots\dots (14)$$

せん断力は  $\mathbf{V}'$  に直交する。この力を求めるには先の (9) 式の関係を使って定めればよい。

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} \equiv \mathbf{m} + (\mathbf{F} \times \mathbf{V}') \equiv \mathbf{m} + (\mathbf{T} \times \mathbf{V}') + (\mathbf{S} \times \mathbf{V}') \equiv \mathbf{m} + (\mathbf{S} \times \mathbf{V}') \dots\dots\dots (15)$$

曲げモーメント  $\mathbf{M}$  は  $\mathbf{M}_\xi + \mathbf{M}_\eta + \mathbf{M}_z$  であり、これらは (12), (13) の両式で定めてあるから次のように求められる。一般式は長くなるが全部を書けば

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{M}}{dt} \equiv & \left[ \frac{d}{dt} \left\{ -GJ_T \left( (1+\varepsilon_t) \left( \rho' - \frac{d\theta'}{dt} \right) - \left( \rho - \frac{d\theta}{dt} \right) \right) \right\} \right. \\ & \left. - k'^2 \left\{ (1+\varepsilon_t) (EJ_\xi - EJ_\eta) \cos \theta' \sin \theta' \right\} + kk' \left\{ EJ_\xi \sin \theta \cos \theta' - EJ_\eta \cos \theta \sin \theta' \right\} \right] \mathbf{V}' \\ & + \left[ \frac{d}{dt} \left\{ k'(1+\varepsilon_t) (EJ_\xi - EJ_\eta) \cos \theta' \sin \theta' - k(EJ_\xi \sin \theta \cos \theta' - EJ_\eta \cos \theta \sin \theta') \right\} \right. \\ & \left. - k'GJ_T \left\{ \left( \rho' - \frac{d\theta'}{dt} \right) (1+\varepsilon_t) - \left( \rho - \frac{d\theta}{dt} \right) \right\} + \rho' k' \left\{ (1+\varepsilon_t) (EJ_\xi \sin^2 \theta' + EJ_\eta \cos^2 \theta') \right\} \right. \\ & \left. - \rho' k \left\{ EJ_\xi \sin \theta \sin \theta' + EJ_\eta \cos \theta \cos \theta' \right\} \right] \mathbf{C}' \\ & + \left[ \frac{d}{dt} \left\{ k'(1+\varepsilon_t) (EJ_\xi \sin^2 \theta' + EJ_\eta \cos^2 \theta') \right\} + \frac{d}{dt} \left\{ k(EJ_\xi \sin \theta \sin \theta' + EJ_\eta \cos \theta \cos \theta') \right\} \right. \\ & \left. + \rho' k' (1+\varepsilon_t) (EJ_\xi - EJ_\eta) \cos \theta' \sin \theta' - \rho' k (EJ_\xi \sin \theta \cos \theta' - EJ_\eta \cos \theta \sin \theta') \right] \mathbf{N}' \dots (16) \end{aligned}$$

$d\mathbf{M}/dt$  の  $\mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{C}'$ ,  $\mathbf{N}'$  方向の成分について解説する。(15) 式において  $(\mathbf{S} \times \mathbf{V}')$  のベクトル積は  $\mathbf{V}'$  方向の成分がない。したがって (16) 式中の  $\mathbf{V}'$  の成分は外力モーメント  $\mathbf{m}$  の  $\mathbf{V}'$  方向の成分に等しくなければ釣合わぬ。

$$\begin{aligned} \therefore \mathbf{m} \cdot \mathbf{V}' = & \frac{d}{dt} \left\{ -GJ_T (1+\varepsilon_t) \left( \rho' - \frac{d\theta'}{dt} \right) - \left( \rho - \frac{d\theta}{dt} \right) \right\} - k'^2 \left\{ (1+\varepsilon_t) (EJ_\xi - EJ_\eta) \cos \theta' \sin \theta' \right\} \\ & + kk' \{ EJ_\xi \sin \theta \cos \theta' - EJ_\eta \cos \theta \sin \theta' \} \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

通常の取扱いをするときには、 $\mathbf{m}$  の方向は  $\mathbf{V}'$  に平行であるか、さもなくば  $\mathbf{m} \equiv 0$  の場合を考えて良い。いま  $\mathbf{m} \equiv 0$  とすれば、せん断力の大きさと方向は簡単に求められる。すなわち  $d\mathbf{M}/dt \equiv \mathbf{S} \times \mathbf{V}'$  であるから、ベクトル積で  $\mathbf{C}' \equiv \mathbf{N}' \times \mathbf{V}'$ ,  $\mathbf{N}' \equiv -\mathbf{C}' \times \mathbf{V}'$  であることを考えて、(16) 式において  $\mathbf{C}' \rightarrow \mathbf{N}'$ ,  $\mathbf{N}' \rightarrow -\mathbf{C}'$  に置き換えてやれば  $\mathbf{S}$  を与える表現式になる。(16) 式と (17) 式とを二、三の簡単な場合について求めれば次のようになる。ただし外力モーメント  $\mathbf{m} \equiv 0$  とする。

(a) 始めに真直な針金であった場合

$$k = \rho = -\frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \equiv & \left[ \frac{d}{dt} \left\{ k'(1+\varepsilon_t) (EJ_\xi - EJ_\eta) \cos \theta' \sin \theta' \right\} - k'GJ_T (1+\varepsilon_t) \left( \rho' - \frac{d\theta'}{dt} \right) \right. \\ & \left. + \rho' k' (1+\varepsilon_t) (EJ_\xi \sin^2 \theta' + EJ_\eta \cos^2 \theta') \right] \mathbf{N}' \\ & + \left[ \frac{d}{dt} \left\{ k'(1+\varepsilon_t) (EJ_\xi \sin^2 \theta' + EJ_\eta \cos^2 \theta') \right\} - \rho' k' (1+\varepsilon_t) (EJ_\xi - EJ_\eta) \cos \theta' \sin \theta' \right] \mathbf{C}' \\ & \dots\dots\dots (16-1) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ -GJ_T (1+\varepsilon_t) \left( \rho' - \frac{d\theta'}{dt} \right) \right\} = k'^2 (1+\varepsilon_t) (EJ_\xi - EJ_\eta) \cos \theta' \sin \theta' \dots\dots\dots (17-1)$$

(b)  $EJ_\xi = EJ_\eta = EJ_B$  で針金が始め真直であった場合

$$\mathbf{S} \equiv \left[ -k'GJ_T (1+\varepsilon_t) \left( \rho' - \frac{d\theta'}{dt} \right) + \rho' k' (1+\varepsilon_t) EJ_B \right] \mathbf{N}' + \left[ \frac{d}{dt} \left\{ k'(1+\varepsilon_t) EJ_B \right\} \right] \mathbf{C}' \dots\dots (16-2)$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \left( \rho' - \frac{d\theta'}{dt} \right) (1+\varepsilon_t) \right\} = 0 \dots\dots\dots (17-2)$$

(c)  $\theta = \theta'$  の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \equiv & \left[ \frac{d}{dt} \left\{ k' (EJ_\xi - EJ_\eta) [k' (1 + \varepsilon_t) - k] \sin \theta \cos \theta \right\} - k' GJ_T \left\{ (1 + \varepsilon_t) (\rho' - \rho) - \varepsilon_t \frac{d\theta}{dt} \right\} \right. \\ & + \rho' [k' (1 + \varepsilon_t) - k] (EJ_\xi \sin^2 \theta + EJ_\eta \cos^2 \theta) \left. \right] \mathbf{N}' + \left[ \frac{d}{dt} \left\{ [k' (1 + \varepsilon_t) - k] (EJ_\xi \sin^2 \theta + EJ_\eta \cos^2 \theta) \right\} \right. \\ & \left. - \rho' [k' (1 + \varepsilon_t) - k] (EJ_\xi - EJ_\eta) \cos \theta \sin \theta \right] \mathbf{C}' \dots \dots \dots (16-3) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ -GJ_T \left[ (1 + \varepsilon_t) (\rho' - \rho) - \varepsilon_t \frac{d\theta}{dt} \right] \right\} = k' (EJ_\xi - EJ_\eta) \left\{ k' (1 + \varepsilon_t) - k \right\} \sin \theta \cos \theta \dots \dots \dots (17-3)$$

(d)  $EJ_\xi = EJ_\eta = EJ_B$  の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \equiv & \left[ \frac{d}{dt} \left\{ -k' EJ_B \sin(\theta' - \theta) \right\} - k' GJ_T \left\{ (1 + \varepsilon_t) \left( \rho' - \frac{d\theta'}{dt} \right) - \left( \rho - \frac{d\theta}{dt} \right) \right\} \right. \\ & + \rho' EJ_B \left\{ k' (1 + \varepsilon_t) - k \cos(\theta' - \theta) \right\} \left. \right] \mathbf{N}' + \left[ \frac{d}{dt} \left\{ [k' (1 + \varepsilon_t) - k \cos(\theta' - \theta)] EJ_B \right\} \right. \\ & \left. - \rho' k EJ_B \sin(\theta' - \theta) \right] \mathbf{C}' \dots \dots \dots (16-4) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left[ -GJ_T \left\{ (1 + \varepsilon_t) \left( \rho' - \frac{d\theta'}{dt} \right) - \left( \rho - \frac{d\theta}{dt} \right) \right\} \right] = k' k EJ_B \sin(\theta' - \theta) \dots \dots \dots (17-4)$$

(e)  $\theta = \theta'$ ,  $EJ_\xi = EJ_\eta = EJ_B$  の場合

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \equiv & \left[ -k' GJ_T \left\{ (1 + \varepsilon_t) (\rho' - \rho) - \varepsilon_t \frac{d\theta}{dt} \right\} + \rho' EJ_B [k' (1 + \varepsilon_t) - k] \right] \mathbf{N}' \\ & + \left[ \frac{d}{dt} \left\{ EJ_B [k' (1 + \varepsilon_t) - k] \right\} \right] \mathbf{C}' \dots \dots \dots (16-5) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ GJ_T \left[ (1 + \varepsilon_t) (\rho' - \rho) - \varepsilon_t \frac{d\theta}{dt} \right] \right\} = 0 \dots \dots \dots (17-5)$$

長々と式を述べたが、要するに針金の断面力の2成分  $\mathbf{T}$  と  $\mathbf{S}$  とは (14), (17) の2つの式で定まる。そして針金に外から作用する外力は針金の単位長さ当り  $\mathbf{p}$  で与えられ、このベクトルは (9) 式の形で表現される。すなわち

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{T} + \mathbf{S}$$

$$\mathbf{p} \equiv \frac{d\mathbf{F}}{dt} \equiv \frac{d\mathbf{T}}{dt} + \frac{d\mathbf{S}}{dt}$$

$\mathbf{p}$  の方向は通常は針金に直角な方向だけを取扱う。そして、この条件から  $d\mathbf{T}/dt$  および  $d\mathbf{S}/dt$  の2つの微分において  $\mathbf{V}'$  方向の成分は0となるのが条件になる。そして、この条件が付加されれば (17) 式はさらに簡単な表現式を与えることができる。すなわち、いま  $\mathbf{T}$  および  $\mathbf{S}$  を表現するのに2つの常数  $a_1, a_2$  を使って

$$\mathbf{T} \equiv -EA \varepsilon_t \mathbf{V}', \quad \mathbf{S} \equiv a_1 \mathbf{N}' + a_2 \mathbf{C}'$$

と記せば

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{F}}{dt} \equiv \mathbf{p} \equiv & -EA \frac{d\varepsilon_t}{dt} \mathbf{V}' - a_2 k' \mathbf{V}' - EA \varepsilon_t k' \mathbf{C}' \\ & - \rho' a_1 \mathbf{C}' + a_2 \rho' \mathbf{N}' \end{aligned}$$

となる。 $\mathbf{p}$  に  $\mathbf{V}'$  方向の成分がなければ

$$EA \frac{d\varepsilon_t}{dt} + a_2 k' = 0 \dots \dots \dots (18)$$

(18) 式の意味を言葉で説明すれば、針金に作用する軸応力の変化量は、針金に作用しているせん断力の曲率中心方向の成分に、その点の曲率を乗じたものに等しい。

端的な例は、アーチに作用している軸力を想像して頂ければよい。もしも針金の軸力が一定であれば、針金に作用するせん断力に曲率方向の成分、すなわち  $\mathbf{C}'$  方向の成分はない。そして、そのときには (16) 式において  $\mathbf{C}'$  の成分はすべて0である。

以上で弾性針金の曲げ・ねじれ・伸びとそれらにともなう力の釣合いの関係の一般論を終わり、次節にそれらの諸式の応用例を述べる。

2. スパイラルの伸びとねじれと細り

図-3

(1) 変形の幾何学的条件

すでにスパイラルロープの弾性常数として簡単に結果を解説したが[文献 1), p. 10~14], 後の説明に必要な考え方を補足する。

一本の素線が半径  $r$  の円柱のまわりを一定ピッチで巻きつけたとし、座標の取り方を 図-3 のように定める\*。針金の一点を  $x, y$  面に投影した曲座標の助けを借りて素線の座標を現わせば

$$\mathbf{r} \equiv r \cos z\varphi \mathbf{E}_1 + r \sin z\varphi \mathbf{E}_2 + z \mathbf{E}_3$$

スパイラルのピッチ  $l$  およびピッチ角  $\alpha$  は

$$l = \left| \frac{2\pi}{\varphi} \right|, \quad \tan \alpha = r\varphi$$

$\varphi$  および  $\alpha$  の符号はよりの方向で区別し、いわゆる  $Z$  よりの時を正とする。 $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3$  は  $x, y, z$  軸のそれぞれ方向を与える単位ベクトルである。 $z=0$  の位置を曲線の始端とし、素線の長さ  $t$  は

$$t \cos \alpha = z, \quad \frac{dt}{dz} = s = \frac{1}{\cos \alpha}$$

曲線座標を簡便化するために新たに単位ベクトルとして次の動径ベクトルを助変数に使う。

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{E}_1 \cos z\varphi + \mathbf{E}_2 \sin z\varphi \\ \mathbf{A}_2 \equiv -\mathbf{E}_1 \sin z\varphi + \mathbf{E}_2 \cos z\varphi \end{cases}$$

$\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{E}_3$  は互いに直交する右手系の単位ベクトルである。これからスパイラルの素線の諸式は簡明に与えられる。すなわち

$$\mathbf{r} \equiv r \mathbf{A}_1 + z \mathbf{E}_3$$

$$\mathbf{V} \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{r} \equiv \frac{dz}{dt} \left( \frac{d\mathbf{r}}{dz} \right)$$

$$\equiv \frac{1}{s} (r\varphi \mathbf{A}_2 + \mathbf{E}_3) \equiv \mathbf{A}_2 \sin \alpha + \mathbf{E}_3 \cos \alpha$$

$$k\mathbf{C} \equiv \frac{d}{dt} \mathbf{V} \equiv \frac{dz}{dt} \left( \frac{d\mathbf{V}}{dz} \right) \equiv \frac{r\varphi^2}{s^2} (-\mathbf{A}_1) \equiv -\frac{\sin^2 \alpha}{r} \mathbf{A}_1$$

$$\therefore k = \frac{\sin^2 \alpha}{r}, \quad \mathbf{C} \equiv -\mathbf{A}_1$$

陪法線ベクトルは  $\mathbf{V}, \mathbf{C}, \mathbf{N}$  が右手系であることから

$$\mathbf{N} \equiv \mathbf{V} \times \mathbf{C} \equiv -\mathbf{A}_2 \times \mathbf{A}_1 \sin \alpha - \mathbf{E}_3 \times \mathbf{A}_1 \cos \alpha \equiv \mathbf{E}_3 \sin \alpha - \mathbf{A}_2 \cos \alpha$$

$\rho$  の値は (2) 式を用いて

$$\rho \mathbf{N} \equiv \frac{d\mathbf{C}}{dt} + k\mathbf{V} \equiv \frac{\varphi}{s^2} \left( -\frac{1}{s} \mathbf{A}_2 + \frac{r\varphi}{s} \mathbf{E}_3 \right) \equiv \frac{\varphi}{s^2} (-\mathbf{A}_2 \cos \alpha + \mathbf{E}_3 \sin \alpha)$$

$$\therefore \rho = \frac{\varphi}{s^2} = \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r}$$

スパイラルの最終的な力と変形の関係式に副変数としての  $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \varphi, s$  等は消去されるが、このような変数はさらにスパイラルの曲げ等を取扱うときに重要である。

(2) 素線の変形と応力

スパイラルの伸びとねじれに関する結果の式はすでに述べてある[文献 1), 式 (21), (22)]。ただしこの結果の式は素線が円断面であるとしてだした。素線断面は必ずしも円断面とは限らず、ロックドコイルのように異形もあり得るから  $EJ_t \equiv EJ_n$  の断面を持つ素線について簡単に述べておく。

\* ピッチ角の取り方が文献 1) と逆にとっているため注意の事

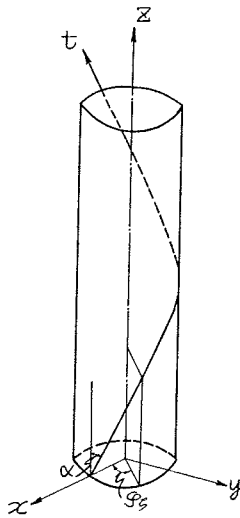


図-4

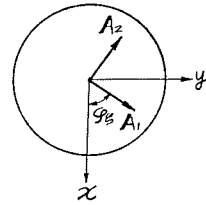
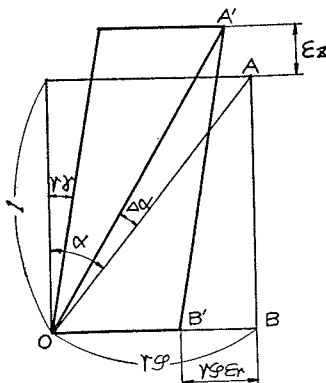
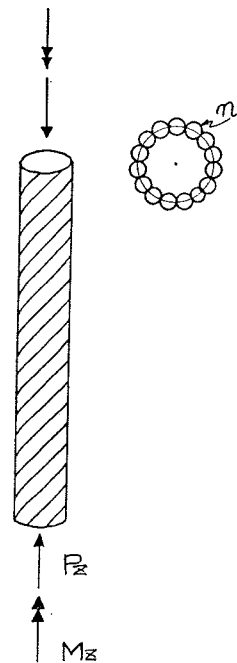


図-5





素線は変形後も相互の位置が拘束されているとし、断面の主軸  $\xi, \eta$  とスパイラルの法線、陪法線の方向との角度  $\theta$  が (3) 式で定義されているとする。スパイラルの変形前と変形後において、 $\theta = \theta'$  とおけば (12-3) 式より

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_B \equiv & -[k'(1+\epsilon_t) - k](EJ_\xi \sin^2 \theta' + EJ_\eta \cos^2 \theta') \mathbf{N}' \\ & + [k'(1+\epsilon_t) - k](EJ_\xi - EJ_\eta) \sin \theta' \cos \theta' \mathbf{C}' \end{aligned}$$

いま  $\Delta k = [k'(1+\epsilon_t) - k]$ ,  $EJ_B = (EJ_\xi \sin^2 \theta' + EJ_\eta \cos^2 \theta')$ ,  $\overline{EJ}_B = (EJ_\xi - EJ_\eta) \sin \theta' \cos \theta'$  とおけば

$$\mathbf{M}_B \equiv -EJ_B \Delta k \mathbf{N}' + \overline{EJ}_B \Delta k \mathbf{C}'$$

ここに  $\overline{EJ}_B$  の項は断面が異形であるために生じたものである。次にねじりモーメントは (13) 式で  $d\theta/dt = 0$  とおいて、

$$\mathbf{M}_T \equiv \mathbf{M}_T \equiv -GJ_T [\rho'(1+\epsilon_t) - \rho] \mathbf{V}'$$

$\Delta \rho \equiv [\rho'(1+\epsilon_t) - \rho]$  とおいて

$$\mathbf{M}_T \equiv -GJ_T \Delta \rho \mathbf{V}'$$

$\Delta k$  および  $\Delta \rho$  の算出は [文献 1]) と同じである。なお注意すべきことであるが、曲率およびねじり率の変化が微小であるから  $\Delta k = k' - k$ ,  $\Delta \rho = \rho' - \rho$  とおきやすいが、これは式の上では間違いである。著者は最初伸びの項  $\epsilon_t$  を無視したが、数値的には微小であっても数式の厳密性から見れば大きな誤りであった。

結局、素線に作用する曲げモーメントは、

$$\mathbf{M} \equiv \mathbf{M}_B + \mathbf{M}_T \equiv -EJ_B \Delta k \mathbf{N}' + \overline{EJ}_B \Delta k \mathbf{C}' - GJ_T \Delta \rho \mathbf{V}' \dots \dots \dots (19)$$

次いで素線に作用する断面力について考える。モーメントの微分の形から

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} \equiv \mathbf{m} + (\mathbf{S} \times \mathbf{V}) \equiv [EJ_B \rho' \Delta k - GJ_T k' \Delta \rho] \mathbf{C}' + \overline{EJ}_B \Delta k (\rho' \mathbf{N}' - k' \mathbf{V}')$$

ここで外的に作用するモーメント  $\mathbf{m}$  は未知である。そこで2つの未知数  $a_1, a_2$  とを仮定して、符号を考えながらせん断力と外力モーメントを仮定する。

$$\mathbf{S} \equiv EJ_B \rho' \Delta k - GJ_T k' \Delta \rho \mathbf{N}' + a_1 \mathbf{C}' + a_2 \mathbf{N}'$$

$$\mathbf{m} \equiv \overline{EJ}_B \Delta k (\rho' \mathbf{N}' - k' \mathbf{V}') - a_1 \mathbf{N}' + a_2 \mathbf{C}'$$

断面力は軸力とせん断力との和であるから

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{T} + \mathbf{S} \equiv -EA \epsilon_t \mathbf{V}' + [EJ_B \rho' \Delta k - GJ_T k' \Delta \rho] \mathbf{N}' + a_1 \mathbf{C}' + a_2 \mathbf{N}'$$

素線に作用する外力  $\mathbf{p}$  は

$$\mathbf{p} \equiv \frac{d\mathbf{F}}{dt} \equiv -[EA \epsilon_t k' + EJ_B \rho'^2 \Delta k - GJ_T k' \rho' \Delta \rho] \mathbf{C}' - k' a_1 \mathbf{V}' + \rho' a_1 \mathbf{N}' - \rho' a_2 \mathbf{C}'$$

さて  $\mathbf{p}$  なる外力の成分を考えてみる。この力は素線に直角に作用し、素線の接線方向の成分は持たない。あれば素線の軸力が変化する。またスパイラルの軸線方向の成分も持たない。あれば素線を任意の位置で切断して考えれば、スパイラルの軸線方向の  $\mathbf{p}$  の成分が積分された値だけ断面力に変化する。従って  $\mathbf{p}$  は  $\mathbf{C}'$  の方向のベクトル(このベクトルはスパイラルの軸線に直交する)成分だけが有効であり、結局  $a_1$  と  $a_2$  の数値は0であることが要求される。よって、

$$\mathbf{F} \equiv -EA \epsilon_t \mathbf{V}' + [EJ_B \rho' \Delta k - GJ_T k' \Delta \rho] \mathbf{N}' \dots \dots \dots (20)$$

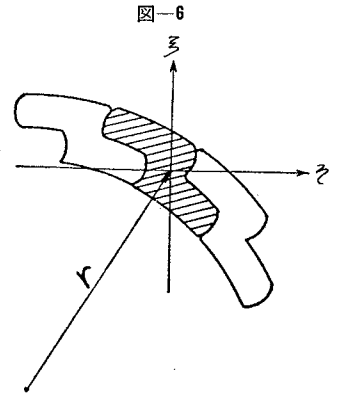
$$\mathbf{p} \equiv -[EA \epsilon_t k' + EJ_B \rho'^2 \Delta k - GJ_T k' \rho' \Delta \rho] \mathbf{C}' \dots \dots \dots (21)$$

$$\mathbf{m} \equiv \overline{EJ}_B \Delta k (\rho' \mathbf{N}' - k' \mathbf{V}') \equiv \overline{EJ}_B \Delta k \frac{d\mathbf{C}'}{dt} \dots \dots \dots (22)$$

(22) 式の外的モーメントの項は素線の断面に  $EJ_\xi \equiv EJ_\eta$  の関係があるときに生ずる。このベクトルの方向はスパイラルの軸線 ( $\approx$  軸) 方向の成分が0になることが容易に確認できる。もし素線の断面がスパイラルの全体の変形のさいに拘束されなければ、素線の断面はそれ自身回転しようとするから、 $\theta \equiv \theta'$  に変化すれば付加的なモーメントの項  $\mathbf{m}$  は消える。素線の断面が拘束を受ければ、(22) 式の付加的なモーメントが、素線同志の内力として存在することになる。

## (2) スパイラル ロープ としての弾性常数補足

文献 1), 式 (21), (22) に  $n$  本の素線から成る一つのスパイラル ロープの層の合力を求めて、ロープ全体の力と変形との関係を導いた。このさいに素線は円断面であるとしたが、断面が異形であっても結果の式は変わ



らないことを確認することができる。断面剛性はスパイラルの半径に直交する方向の軸線について計算すれば良い。内力相互の釣合いで素線に作用する外的なモーメントの影響は スパイラル ロープとしては外的に影響を持たない。

スパイラル ロープの力と変形とに関してさらに補足的な性質を記そう。  $n$ 本の素線から成る一層のスパイラルの伸びとねじれに関して3種の変形が考えられた。すなわちスパイラル全体の伸び、ねじれ、そして細りである。ところで、力は軸方向の力と、ねじれモーメントの2種だけしか考えなかった。3種の変形に3種の力を対応させるため素線に作用する力  $p$  について調べてみる。

$n$ 本の素線から成るスパイラル ロープの一層を取り出す。ちょうど籠のような形の構造に外から水圧状の力を加えたときに、どのように変形するかを調べる。これは (21) 式において  $k', \rho', \Delta k, \Delta \rho, \epsilon_t$  にスパイラルの常数と変形の関係式を用いて表わす<sup>1)</sup>。すると

$$\left. \begin{aligned} p^* = & \left[ -\frac{EA}{r} \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \frac{EJ_B}{r^3} \cos^4 \alpha \sin^4 \alpha + \frac{GJ_T}{r^3} \cos^6 \alpha \sin^2 \alpha \right] \epsilon_z \\ & - \left[ \frac{EA}{r} \cos^4 \alpha + \frac{EJ_B}{r^3} \cos^4 \alpha \sin^4 \alpha + \frac{GJ_T}{r^3} \cos^6 \alpha \sin^2 \alpha \right] \epsilon_r \\ & + \left[ -EA \cos^3 \alpha \sin \alpha - \frac{EJ_B}{r^2} \cos^3 \alpha \sin^3 \alpha (2 - \cos^2 \alpha) + \frac{GJ_T}{r^2} \cos^3 \alpha \sin^5 \alpha \right] r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

針金の単位長さに作用する力はスパイラルの中心に向かう。一層のスパイラルが  $n$ 本できていると考え、この力が同じ半径の円柱の側面に作用する水圧状の力  $p_w$  に換算すれば

$$2 \pi r p_w = \frac{n}{\sin \alpha} p \dots\dots\dots (24)$$

さて、 $n$ 本の素線からできた スパイラル ロープの一層について、3つの方向の変位——軸方向の伸び、径の変化、ねじれ——に対して3種の力——軸方向の合力、ねじりモーメント、水圧状の外力——が対応する。[文献 1)、式 (21)、(22)]とともに3つの弾性方程式を比較すれば、

$$\left. \begin{aligned} P_z &= A_{11} \epsilon_z + A_{12} r \epsilon_r + A_{13} r \\ 2 \pi r p_w &= A_{21} \epsilon_z + A_{22} r \epsilon_r + A_{23} r \\ M_z &= A_{31} \epsilon_z + A_{32} r \epsilon_r + A_{33} r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

係数  $A_{ij}$  は  $A_{ij} = A_{ji}$  の相互の関連を確認することができる。すなわち、スパイラル ロープの籠状の構造は全体に見て Hooke の法則の成立する完全弾性体であり、エネルギーの保存則が適用できる。(25)式から逆に変位を力で与える関係式を導くのは容易であり、それからロープの弾性常数を定義することになる。このさい水圧状の力  $p_w$  はスパイラルの一層について求めたものであり、ロープのように、何層かが組み合わさった構造では、各層間の相互の内力となり外的には意味を持たない。

ロープの使用目的からいって、引張りのさいの伸びが少なく(ヤング率が大きい)、引張ってよりが戻ることが少ないのが好ましい。この性質は (25) 式において  $A_{13} = A_{31} = 0$ 、 $A_{11}$  が大きいほど良いという結論が出る。

スパイラルの径の細り  $\epsilon_r$  の項は経験的・実験的に定める以外に方法がない。  $-\epsilon_r/\epsilon_z$  の値はロープの見掛けのポアソン比に相当する。この値は素線自身のポアソン比以下になることは考えられない。実際にはロープの荷重歴によってロープの締めり工合が変わってくるからさらに複雑になる。プリテンション加工が意味を持つのは不必要な素線間の間げきをなくすのに重要であるが、それとても限界がある。スパイラル ロープに限らず、ロープの総断面積と素線の純断面積(ロープ切断面)との比と、ロープの見掛けのポアソン比とを関連させて実験値を論ずるのは興味がある。

3. ロープのより戻り

(1) Planetary Motion Wire

始めに真直であった丸い断面の弾性針金をスパイラルに巻いてより合わすとき、この素線のスパイラルの中心に対する相対的な位置関係は、太陽のまわりを巡る惑星の運動にたとえられる。月の地球に対する相対的な位置関係は、月が地球に対して常に同じ面だけを向けているから1公転に対して1自転が対応している。これに相当する スパイラル ロープは1巻きのみより回転に1回転のねじりがあることを意味している。これに対して、もし月が太陽に対して常に同じ面を向くとすると、スパイラルの1巻きにねじりを生じないで素線を巻きつけることになる。このように作ったスパイラルの素線を planetary motion wire と呼ぶ。

\* 文献 1) と比較のために  $\alpha$  の取り方は 文献 1) の (21)、(22) 式と同じに取ってある。

ロープに素線をより合わせるとき、素線をロープのより方向と逆にねじって作らなければよりがほどけることは周知の現象である。ロープの製作過程で、ロープ自体のよりと素線自身のねじれとの関連で、でき上ったロープによりの変化が生ずる。この現象の数式的な取扱いを述べてみる。

## (2) 残留モーメント

始めに真直であった丸い断面の細い針金を半径  $r$ 、ピッチ角  $\alpha$  でより合わせたとする。素線に生ずるモーメントは (12-1) 式および (13) 式で  $EJ_{\xi}=EJ_{\eta}$  とおきさらに素線断面の座標軸が回転しないという条件に (4) 式から  $\rho=d\theta/dt$  を考えて

$$M_B \equiv -kEJ_B N \quad M_T \equiv 0$$

法線  $N$  のスパイラル軸方向の成分は  $\sin \alpha$  であるから、素線 1 本当り

$$M_z = -kEJ_B \sin \alpha = -EJ_B \sin^3 \alpha / r$$

のトルクが、ロープの残留トルクとして残る。 $\sin \alpha$  の符号はよりの方向によって異なる。 $Z$  よりのときを正に選ぶ。とも角、この残留トルクは素線の曲げによって生ずるものであることに注目しなければならぬ。planetary motion で素線をよれば、素線のねじれは打消されるが曲げは残ることになる。

何本かの素線を何層かにわたって作ったロープ全体の残留トルクはこれらの素線の個々のトルクの和で与えられる。計算の一例として、吊橋用のスパイラルロープについて残留トルクを求めて見る [文献 1)、表-1 参照ただしピッチ角は  $\cos \alpha$  で表現してある]。

$$\begin{aligned} M_z &= \sum [-EJ_B n_i \sin^3 \alpha_i / r_i] = -EJ_B |\sin^3 \alpha| \sum [\pm n_i / r_i] \\ &= 1.88 \times 10^6 \times 1.908 \times 10^{-3} \times 0.27462^3 \times 26.3086 = 1.95 \times 10^3 \text{ kg-cm} \end{aligned}$$

数値計算からわかることは、残留トルクを打消すように層のピッチ角を交互に変えて、いい換えればよりの方向を交互に変えて、 $Z$  よりの層の数と  $S$  よりの層の数とがほぼ同数になるように全体のスパイラルについてバランスが取れると残留トルクが最小になる。これは 文献 1)、表-1 の数値を比較して確認することができる。

## (3) より戻りの角度

製作された直後のスパイラルロープを外的になんらの拘束のない状態にしたときのより戻りの角度は、先に求めたロープの弾性常数から簡単に計算できる。実験に使用したロープでは

$$M_z = -(1.3589 \epsilon_z + 0.1098 \epsilon_r + 6.1137 r) E$$

$$P_z = -(17.5210 \epsilon_z + 1.4140 \epsilon_r + 1.3589 r) E$$

$P_z=0$ ,  $\epsilon_r=0$  とし、 $M_z$  に残留トルクを代入すれば  $r$  として下の数値が得られる。

$$\begin{aligned} r &= -1.726 \times 10^{-4} \text{ radian/cm} \\ &= -0.989 \text{ 度/m} \end{aligned}$$

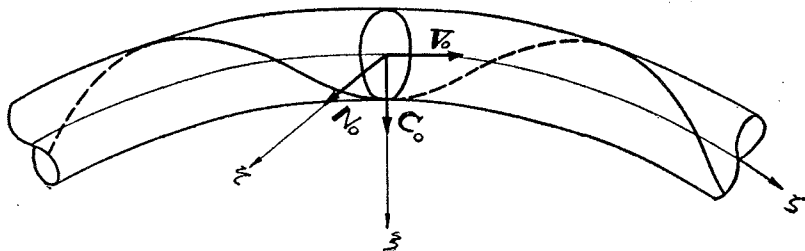
$M_z$  が外力モーメントであれば  $r = -1^\circ/\text{m}$  のねじりが加わることになるから、内力成分としての残留トルクによって  $-r$  だけよりがほどける。 $r$  の符号は、 $Z$  よりの方向にねじれを付加する方向を正に選んであるから、最外層のよりの方向  $Z$  に対して、よりが加わる方向により戻りが生ずるという結論が出る。

## 4. スパイラルの曲げ

### (1) 幾何学的座標と諸数値

スパイラルの軸線が真直であった場合を今まで取扱ったが、軸線が半径  $R$  の円を描くときのスパイラルに引張り応力や曲げ応力が作用する場合を考える。スパイラルの軸線を  $r_0$  で与え、これが曲率  $k_0=1/R$  の円を描くとしよう。素線の座標は、スパイラルの軸線からの動径ベクトル  $r_1$  で与えることにし、全体の座標は  $r_0+r_1$  で示される。

図-7



まずスパイラルの軸線を、ある基準から軸線に沿っての長さで位置を決め、曲線の諸数値を定める。

$$\mathbf{r}_0, \quad \frac{d\mathbf{r}_0}{d\zeta} \equiv \mathbf{V}_0, \quad \frac{d\mathbf{V}_0}{d\zeta} \equiv k_0 \mathbf{C}_0, \quad \rho_0 = 0 \dots\dots\dots (26)$$

動径ベクトル  $\mathbf{r}_1$  はスパイラルの軸線自体の法線と陪法線とで

$$\mathbf{r}_1 \equiv (r \cos \varphi \zeta) \mathbf{C}_0 + (r \sin \varphi \zeta) \mathbf{N}_0 \equiv r \mathbf{A}_1 \dots\dots\dots (27)$$

と示す。ここで動径ベクトルを次のように選ぶ。

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1 \equiv \mathbf{C}_0 \cos \varphi \zeta + \mathbf{N}_0 \sin \varphi \zeta \\ \mathbf{A}_2 \equiv -\mathbf{C}_0 \sin \varphi \zeta + \mathbf{N}_0 \cos \varphi \zeta \end{cases}$$

$\mathbf{V}_0, \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$  は右手系の互いに直交する単位ベクトルである。素線の諸元は、素線のある基準点から計った長さのパラメータ  $t$  で微分することで得られる。

(2) 接線

$$\mathbf{V} \equiv \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}) \equiv \left(\frac{d\zeta}{dt}\right) \times \left[\mathbf{V}_0 + \frac{d\mathbf{r}}{d\zeta}\right] \equiv \left(\frac{d\zeta}{dt}\right) \times [r\varphi \mathbf{A}_2 + (1 - k_0 r \cos \varphi \zeta) \mathbf{V}_0] \dots\dots\dots (28)$$

曲率半径  $R$  の円弧の、単位長さ  $\zeta = 1$  をはさむ角度の間にある素線の長さを  $s$  で与えることにしよう。

$$s^2 = \left(\frac{dt}{d\zeta}\right)^2 = r^2 \varphi^2 + (1 - k_0 r \cos \varphi \zeta)^2 \dots\dots\dots (29)$$

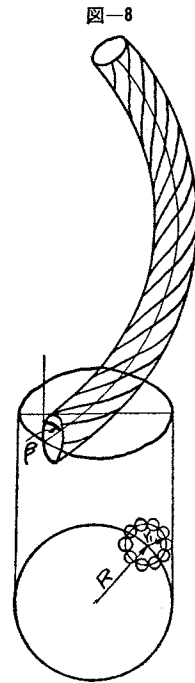
素線はスパイラルを描きながら、なおかつ半径  $R$  の円弧に沿うので素線の長さをパラメータに選ぶさいに  $s$  の補正項を持つのである。ある基準点から計った素線の全長は

$$t = \int_0^{\zeta} \left(\frac{dt}{d\zeta}\right) d\zeta = \int_0^{\zeta} s d\zeta$$

であり、1ピッチ間  $\zeta = l$  の間での素線の長さ  $L$  は

$$L = \int_0^{2\pi/\varphi} s d\zeta = \int_0^{2\pi/\varphi} \sqrt{r^2 \varphi^2 + (1 - k_0 r \cos \varphi \zeta)^2} d\zeta \dots\dots\dots (30)$$

この積分は一種の楕円積分であり、いろいろと検討してみたが厳密な定積分値を求めるとは至らなかった。しかし重要なことは、(30) 式の定積分の値は  $R = \infty$ 、すなわち  $k_0 = 0$  の場合の値である素線1ピッチの長さにくらべて常に長い。ここで不思議なことに思いついた。もしスパイラルロープの長さを測って、円弧  $R$  に巻きつけたら、測定した長さに等しいだけの長さよりも短かくなりはしないか、また逆に、 $R$  の円弧に巻きつけたスパイラルロープを真直に伸ばしたら、長さが幾分長くなりはしないか、という疑問ができる。実験的に、経験的に、このような事の実偽に気がつかれた方は知らして頂きたいものである。とも角、(30) 式は  $R$  が  $r$  よりも相当に大きければ、実際上は誤差も小さい値で真直な軸を持つスパイラルの素線の1ピッチの長さに等しいであろう。



(3) 法線および曲率

接線  $\mathbf{V}$  の  $t$  に関する微分で与えられる法線は曲率  $k$  とともに

$$\begin{aligned} k\mathbf{C} &\equiv \frac{d\mathbf{V}}{dt} \equiv \frac{d}{dt} \left\{ \frac{r\varphi}{s} \mathbf{A}_2 + \frac{(1 - k_0 r \cos \varphi \zeta)}{s} \mathbf{V}_0 \right\} \\ &\equiv \frac{1}{s^2} \left[ -r\varphi^2 + k_0 \cos \varphi \zeta (1 - k_0 r \cos \varphi \zeta) \right] \mathbf{A}_1 + \frac{k_0}{s^4} (s^2 + r^2 \varphi^2) \\ &\quad \left[ r\varphi \mathbf{V}_0 - (1 - k_0 r \cos \varphi \zeta) \mathbf{A}_2 \right] \sin \varphi \zeta \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

$$k^2 = \frac{1}{s^4} \left[ -r\varphi^2 + k_0 \cos \varphi \zeta (1 - k_0 r \cos \varphi \zeta) \right]^2 + \frac{k_0^2}{s^6} (s^2 + r^2 \varphi^2)^2 \sin^2 \varphi \zeta \dots\dots\dots (32)$$

(4) 陪法線

(28), (31) の両式より  $\mathbf{V}$  と  $\mathbf{C}$  とは直交することを容易に確認することができる。 $\mathbf{N} \equiv \mathbf{V} \times \mathbf{C}$  のベクトル積の関係を用いて

$$\begin{aligned} s^3 k \mathbf{N} &\equiv k_0 (s^2 + r^2 \varphi^2) \sin \varphi \zeta \mathbf{A}_1 - [-r\varphi^2 + k_0 \cos \varphi \zeta (1 - k_0 r \cos \varphi \zeta)] \\ &\quad \times [r\varphi \mathbf{V}_0 - (1 - k_0 r \cos \varphi \zeta) \mathbf{A}_2] \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

(5) ねじり率

$\rho$  を求めるには、 $d\mathbf{C}/dt \equiv \rho \mathbf{N} - k \mathbf{V}$  であるから

$$\rho = N \cdot \frac{dC}{dt}$$

(31) 式を  $t$  で微分し (33) 式との積を作るが、 $k$ ,  $s$ , ……等が  $t$  の関係式であるので  $\rho$  の表現式が複雑になるが、結果の式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{\varphi}{s^2} - \frac{\varphi k_0}{s^6 k^2 r} \cos \varphi \zeta (s^2 + r^2 \varphi^2) (1 - s^2 - k_0 r \cos \varphi \zeta) \\ & + \frac{\varphi k_0^2}{s^8 k^2} \sin^2 \varphi \zeta \left\{ 2s^4 (-1 + 2k_0 r \cos \varphi \zeta) + (1 - k_0 r \cos \varphi \zeta)^2 (s^2 + r^2 \varphi^2 - 3s^2 k_0 r \cos \varphi \zeta) \right\} \dots\dots\dots (34) \end{aligned}$$

### (6) 素線に作用する曲げによる応力

始めのスパイラルの状態が軸線が真直であったとし、これが  $k_0$  の曲率で曲がったとして、応力を計算してみる。最初からある彎曲を持っている場合の取扱いも可能であるが、数式で扱うよりも数値計算で試みるのが実際的である。その理由は種々のパラメータの表現で得られている  $k$ ,  $\rho$  等の値を微分によって微小項を求める操作そのものがはなはだ複雑すぎるからである。始めに  $k_0 = 0$  でありそれから曲げを受けたとし、 $k_0$  に対して  $k_0^2$  以上の高次項が微小と考えられるとみなして素線の応力を求めてみる。

### (7) 素線に作用する曲げモーメント

素線の伸び  $\epsilon_\alpha$  は (29) 式より  $k_0$  を微小とみて

$$\epsilon_\alpha = \frac{ds}{s} = -\frac{r \cos \varphi \zeta}{1 + r^2 \varphi^2} k_0 \dots\dots\dots (35)$$

付加的に生ずる曲率の変化量とその方向とは (31) 式より最初の曲率

$$kC \equiv -\frac{r \varphi^2}{s^2} A_1 \equiv -\frac{r \varphi^2}{1 + r^2 \varphi^2} A_1$$

と変形後の曲率

$$(k + \Delta k)C \equiv (1 + \epsilon_t) \left\{ \frac{1}{s^2} [-r \varphi^2 + k_0 \cos \varphi \zeta] A_1 + \frac{k_0}{s^4} (s^2 + r^2 \varphi^2) \sin \varphi \zeta [r \zeta V_0 - A_2] \right\}$$

との差で得られ、

$$\begin{aligned} \Delta kC & \equiv \left( \frac{k_0}{s^2} \cos \varphi \zeta + \frac{r^2 \varphi^2}{s^4} k_0 \cos \varphi \zeta \right) A_1 + \frac{k_0}{s^4} (s^2 + r^2 \varphi^2) \sin \varphi \zeta [r \varphi V_0 - A_2] \\ & \equiv \frac{(s^2 + r^2 \varphi^2)}{s^4} k_0 \left[ A_1 \cos \varphi \zeta + (r \varphi V_0 - A_2) \sin \varphi \zeta \right] \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

素線に生じた曲げモーメントは  $M_B \equiv -\Delta kNEJ_B$  より方向を考えて (35) 式より

$$M_B \equiv k_0 EJ_B \left[ \frac{\cos \varphi \zeta}{s} (r \varphi V_0 - A_2) - s \sin \varphi \zeta A_1 \right] \frac{(s^2 + r^2 \varphi^2)}{s^4} \dots\dots\dots (36)$$

### (8) 素線に作用するねじりモーメント

素線のねじり率の変化量は (34) 式より

$$\Delta \rho = \frac{k_0 \cos \varphi \zeta}{s^4 r \varphi} (1 + 4r^2 \varphi^2 + 2r^4 \varphi^4) \dots\dots\dots (37)$$

ねじりモーメントは

$$M_T \equiv -GJ_T \Delta \rho V \equiv -GJ_T \frac{k_0 \cos \varphi \zeta}{s^5 r \varphi} (1 + 4r^2 \varphi^2 + 2r^4 \varphi^4) (V_0 + r \varphi A_2) \dots\dots\dots (38)$$

### (9) 素線に作用する軸力

$$T \equiv -EA \epsilon_\alpha V \equiv \frac{EA r}{s^3} k_0 \cos \varphi \zeta [V_0 + r \varphi A_2] \dots\dots\dots (39)$$

### (10) 素線のせん断力

せん断力は曲げモーメントの微分で与えられる。(36), (38) の両式を微分することより

$$\begin{aligned} S & \equiv \frac{k_0 \varphi EJ_B (s^2 + r^2 \varphi^2)}{s^7} \left[ (s^2 - s) \sin \varphi \zeta A_1 + (1 + s^2) \cos \varphi \zeta (r \varphi V_0 - A_2) \right] \\ & + \frac{k_0 \varphi GJ_T \cos \varphi \zeta}{s^7} (1 + 4r^2 \varphi^2 + 2r^4 \varphi^4) (r \varphi V_0 - A_2) \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

### (11) ロープ全体の合成応力

素線 1 本の応力が (35)~(40) 式で定まったから、 $n$  本の素線で一層を形作るスパイラルロープの合成力を求めよう。合力を定めるためには変形後の素線の幾何学的な形で定めなければならないが、この計算は相当に複

雑になるので、簡単に考えて  $k_0$  による微小項を無視し、スパイラルの軸線が直の状態で合力を求めよう。(35)~(40)の諸式は微分演算の操作の関係で種々のパラメータを使って書かれているから、これを既知のスパイラルの常数になおして計算しよう。 $\alpha$  をピッチ角、 $r\varphi = \tan \alpha$ 、 $\cos \varphi \zeta = \cos \theta$  とおき、 $n$ 本の素線を加え合わせる操作を

$$\int_0^{2\pi} \frac{n}{2\pi} d\theta$$

の積分に置き換える。 $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ 、のベクトルの成分をスパイラル軸線の法線方向の成分と陪法線方向の成分とにわけて合力を求めてやる。

(12) 素線の軸力の合力

$$\sum^n \mathbf{T} \equiv \frac{nk_0}{2} \left[ EA r \sin \alpha \cos^2 \alpha \right] \mathbf{N}_0 \dots\dots\dots(41)$$

(13) 素線のせん断力の合力

$$\begin{aligned} \sum^n \mathbf{S} \equiv \frac{nk_0}{2} \left[ -EJ_B \frac{1}{r} \sin \alpha \cos^3 \alpha (\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha) (1 + \cos \alpha) \right. \\ \left. - GJ_T \frac{1}{r} \sin \alpha \cos^2 \alpha (1 + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \right] \mathbf{N}_0 \dots\dots\dots(42) \end{aligned}$$

(14) 素線の曲げモーメントの合力

$$\sum^n \mathbf{M}_B \equiv \frac{nk_0}{2} \left[ -EJ_B \cos \alpha (1 + \sin^2 \alpha) (1 + \cos^2 \alpha) \right] \mathbf{N}_0 \dots\dots\dots(43)$$

(15) 素線のねじりモーメントの合力

$$\sum^n \mathbf{M}_T \equiv \frac{nk_0}{2} \left[ -GJ_T \cos \alpha (1 + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \right] \mathbf{N}_0 \dots\dots\dots(44)$$

(16) 断面力の能率

モーメントの合力は、素線モーメントの合力のほかに、素線断面力のスパイラル軸に関する能率とともに考えなければならない。 $\mathbf{T}$  および  $\mathbf{S}$  の、スパイラル軸に関する能率は

$$r\mathbf{C} \times (\mathbf{T} + \mathbf{S}) \equiv r\mathbf{A}_1 \times (\mathbf{T} + \mathbf{S})$$

よって 
$$\sum^n r\mathbf{A}_1 \times \mathbf{S} \equiv \frac{nk_0}{2} \left[ -EJ_B \sin^2 \alpha \cos^3 \alpha (1 + \cos^2 \alpha) (\cos^4 \alpha + \sin^2 \alpha) \right. \\ \left. - GJ_T \sin^2 \alpha \cos \alpha (1 + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) \right] \mathbf{N}_0 \dots\dots\dots(45)$$

$$\sum^n r\mathbf{A}_1 \times \mathbf{T} \equiv \frac{nk_0}{2} \left[ -EA r^2 \cos^3 \alpha \right] \mathbf{N}_0 \dots\dots\dots(46)$$

(41)~(46) の諸式の和でロープ全体の合応力が定まる。曲げモーメントは陪法線  $\mathbf{N}$  と平行の成分であり常識的になぜける。ところで断面力の合力は陪法線方向に向かうせん断力成分が残る。

陪法線方向に残留するせん断力の力学的な意味を考えてみる。陪法線方向に残るせん断力は、ロープにねじりモーメントの成分があることを意味している。素線のモーメントの和はスパイラル軸方向の成分について0になるから、陪法線方向のせん断力はねじりモーメントの変分を与えることになる。いい換えれば、スパイラルロープの曲げには、必ずねじれる力の成分が現われ、結局スパイラルロープの純粋な曲げ変形が得られないで、ねじれ変形をも生ずることを意味している。

(17) スパイルロープの安定問題

ロープの曲げにともなって生じた不可解なせん断力(41),(42)は、ロープの特殊な弾性的性質に帰因するものである。ロープがどのような状態になっているときにロープの応力はどうなるか、または逆にロープに力を加えたときにどのような変形が生じやすいかという問題がでる。真直なロープにねじりを加えると、ロープがループ状に変形するのは良く知られている。キंकはこの特殊な状態に属し、一まとめにロープの安定問題として取扱ってみる。

スパイラルロープの軸線がさらに大きなスパイラルに変形していると仮定してみる。素線に相当する針金の弾性的な性質は(25)式および(43)~(46)式をもとにして

$$\begin{pmatrix} T \\ M_T \\ M_B \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varepsilon_\alpha \\ r \\ k \end{pmatrix} \dots\dots\dots(47)$$

の形で与える。\$T, M\_T, M\_B\$ はそれぞれ引張力，ねじりモーメント，曲げモーメントである。(47) 式の逆の形で，変位を力で与える形になおせば

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_\alpha \\ \tau \\ k \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T \\ M_T \\ M_B \end{pmatrix} \dots\dots\dots (48)$$

素線の描くスパイラルの層半径を \$R\$，ピッチ角を \$\beta\$ に取れば，素線の曲率 \$k\_0\$，ねじり率 \$\rho\_0\$ は

$$k_0 = \frac{\sin^2 \beta}{R} \qquad \rho_0 = \frac{\sin \beta \cos \beta}{R}$$

素線に作用している断面力とモーメントとをスパイラル素線の接線，法線，陪法線の方向のベクトル \$\mathbf{V}\_0, \mathbf{C}\_0, \mathbf{N}\_0\$ で与えることにして次のように置く。

$$\mathbf{F} \equiv f_1 \mathbf{V}_0 + f_2 \mathbf{C}_0 + f_3 \mathbf{N}_0 \qquad \mathbf{M} \equiv m_1 \mathbf{V}_0 + m_2 \mathbf{C}_0 + m_3 \mathbf{N}_0$$

素線が変形してはいるが，素線には外力が何も作用していないとしよう。(9) 式より

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} \equiv k_0 f_1 \mathbf{C}_0 - k_0 f_2 \mathbf{V}_0 + \rho_0 f_2 \mathbf{N}_0 - \rho_0 f_3 \mathbf{C}_0 \equiv 0$$

$$\therefore f_2 = 0, \qquad k_0 f_1 = \rho_0 f_3 \dots\dots\dots (49)$$

外的にモーメントが作用しないという条件より

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} - (\mathbf{F} \times \mathbf{V}) \equiv k_0 m_1 \mathbf{C}_0 - k_0 m_2 \mathbf{V}_0 + \rho_0 m_2 \mathbf{N}_0 - \rho_0 m_3 \mathbf{C}_0 + f_2 \mathbf{N}_0 - f_3 \mathbf{C}_0 \equiv 0$$

$$\therefore m_2 = 0 \qquad m_1 k_0 - \rho_0 m_3 - f_3 = 0 \dots\dots\dots (50)$$

方向と力とを考えると \$f\_1 = -T, m\_1 = -M\_T, m\_3 = -M\_B\$ である。\$f\_3\$ は (41), (42) 式で示されるように曲げによって付加的に生じたせん断力成分に等しく次のようにおける

$$f_3 = -a M_B \dots\dots\dots (51)$$

(49), (50) の2つの関係を満たすための条件で

$$T = \frac{\rho_0}{k_0} a M_B \qquad M_T = \frac{k_0}{\rho_0 + a} M_B$$

(48) 式に代入して素線の変形を求めれば

$$\varepsilon_\alpha = \left( \frac{\rho_0}{k_0} a C_{11} + \frac{k_0}{\rho_0 + a} C_{12} \right) M_B \qquad \tau = \left( \frac{\rho_0}{k_0} a C_{21} + \frac{k_0}{\rho_0 + a} C_{22} \right) M_B \qquad k = C_{33} M_B$$

これよりひずみエネルギーを求めると

$$2W = (T \varepsilon_\alpha + M_T \tau + M_B k)$$

$$= \left[ \frac{\rho_0}{k_0} a \left( \frac{\rho_0}{k_0} a C_{11} + \frac{k_0}{\rho_0 + a} C_{12} \right) + \frac{k_0}{\rho_0 + a} \left( \frac{\rho_0}{k_0} a C_{21} + \frac{k_0}{\rho_0 + a} C_{22} \right) + C_{33} \right] M_B^2$$

$$= \frac{1}{C_{33}^2} \left[ \rho_0^2 a^2 C_{11} + \frac{a \rho_0}{\rho_0 + a} k_0^2 (C_{12} + C_{21}) + \left( \frac{\rho_0}{\rho_0 + a} \right)^2 k_0^4 C_{22} + C_{33} k_0^2 \right] \dots\dots\dots (52)$$

変形はエネルギーが最小になるように進むから，例えば \$\rho\_0\$ =一定としたとき，\$\partial W / \partial (k^2) \to 0\$ にする \$k^2\$ の値が求められる。すなわち

$$-\frac{1}{C_{33}^2} \left[ \frac{a \rho_0}{\rho_0 + a} (C_{12} + C_{21}) + C_{33} + 2 \left( \frac{\rho_0}{\rho_0 + a} \right)^2 C_{22} k_0^2 \right] \to 0 \dots\dots\dots (53)$$

(53) 式の意味を説明する。\$C\_{22}, C\_{33}\$ はそれぞれ素線に作用する単位のねじりモーメント，曲げモーメントによって生ずる変形であり，\$1/GJ\_T, 1/EJ\_B\$ にほぼ等しい。\$C\_{12}, C\_{21}\$ の量は (43) 式で示されるように，素線の異方弾性の性質で，伸びとねじれとが相関する性質を与える。\$a\$ は，素線を曲げれば，付加的にせん断力が生ずる性質を示すもので (41), (42) 式で示されるものである。\$\rho\_0\$ はねじれの方向に関連して正負の値を取り得るし，\$a\$ も素線の性質から必ずしも正の常数とは限らない。\$C\_{12}, C\_{21}\$ も必ずしも正の数値とは限らない。従って (53) 式を満たす条件は，\$\rho\_0\$ と \$a\$ との数値の関連で，ある確定した \$k\_0^2\$ の値が存在することがあり得る。すなわちスパイラル ロープ自身がさらに大きくスパイラルを作って安定状態になるのである。

\$a=0\$ とした場合は通常の針金のように等方性の素線であり，このときの安定は \$k\_0 \to 0\$ である。\$k\_0 = \sin^2 \beta / R\$ であるから \$\beta=0\$，もしくは \$R \to \infty\$ であり，いずれも真直な状態が安定である。

\$k\_0\$ が大きくなってもおかつ安定であるとキック現象を生ずる。(53)式において，\$a=0\$ として考えれば，曲げ剛性が小さく，ねじれ剛性の小さい素線ほど，大きい曲率のときにも安定であることがいえる。次の数値

$$\frac{C_{22}}{C_{33}^2} = \left( \frac{(EJ_B)^2}{GJ_T} \right) \dots \dots \dots (54)$$

が大きいほど、キンクを生ずる率が少ないことが理論的にいえることになる。

5. Stranded Rope の引張り剛性

(1) 素線の弾性的性質の約束

Stranded Rope はすでに求めたスパイラル ロープをさらに大きなスパイラルに巻き込んで作る。このさい、素線自身がすでにより細い針金でよったスパイラルであるから、素線の弾性的な性質が単純ではない。すなわち素線の伸びと曲げとねじれと、さらに素線の直径の細りとで次のように与えられる。

$$\begin{pmatrix} T \\ M_T \\ M_B \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \end{pmatrix} \times (\epsilon_\alpha, \epsilon_r, r, k) \dots \dots \dots (55)$$

$a_{ij}$  の数値はスパイラルの伸び剛性、およびスパイラルの曲げを扱った各項から定まる。ここに  $\epsilon_r$  は素線の直径の細りに関係し、一概に定められないから適当なポアソン比を仮定して  $\epsilon_\alpha$  の項にふくませる。そうすれば素線としての変形と応力とに関しては次のようにおける。

$$\begin{pmatrix} \epsilon_\alpha \\ r \\ k \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} T \\ M_T \\ M_B \end{pmatrix} \dots \dots \dots (56)$$

Stranded Rope の引張り剛性を扱うときには、(55) 式で示されるような素線がスパイラルに巻き込んだとみで変形と応力とを定める。素線のピッチ角と層半径をそれぞれ  $R, \beta$  で与え、ロープ全体の伸び  $\epsilon_z$ 、ロープの径の細り  $\epsilon_R$ 、ロープのねじれ変形  $r_R$  によって素線に生ずる変形量は、文献 1) の (8), (11), (12) 式と同じに、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \epsilon_z \cos^2 \beta + \epsilon_R \sin^2 \beta + R r_R \cos \beta \sin \beta \\ \Delta k &= -\frac{\epsilon_z}{R} \sin^2 \beta \cos^2 \beta + \frac{\epsilon_R}{R} \sin^2 \beta \cos^2 \beta + r_R \sin \beta \cos \beta (2 - \sin^2 \beta) \\ \Delta \rho &= \frac{\epsilon_z}{R} \sin^3 \beta \cos \beta - \frac{\epsilon_R}{R} \sin^3 \beta \cos \beta + r_R \cos^4 \beta \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (57)$$

(2) 素線に作用する応力

素線の応力は、(57)式で示される素線の変形量に対応して生ずる力を (55) 式で求め、方向を考えればよい。素線となるスパイラル (子繩) のポアソン比を  $\nu$  とすれば

(3) 引張力

$$-T \equiv [(a_{11} - \nu a_{12}) \epsilon_\alpha + a_{13} \Delta \rho] V \dots \dots \dots (58)$$

(4) 曲げモーメント + ねじりモーメント

$$-M \equiv [(a_{21} - \nu a_{22}) \epsilon_\alpha + a_{23} \Delta \rho] V + a_{34} \Delta k N \dots \dots \dots (59)$$

(5) せん断力

$$-S \equiv \left\{ (a_{21} - \nu a_{22}) \epsilon_\alpha + a_{23} \Delta \rho \right\} \times \frac{\sin^2 \beta}{R} - a_{34} \Delta k \frac{\sin \beta \cos \beta}{R} \Big] N \dots \dots \dots (60)$$

(6) Stranded Rope としての合力

$m$  本の素線がより合わさったとして合力を求めれば、

(7) 軸方向の合力

$$\begin{aligned} P_z &= m \left\{ \left[ (a_{11} - \nu a_{12}) \cos \beta + (a_{21} - \nu a_{22}) \frac{\sin^3 \beta}{R} \right] \epsilon_\alpha - \left[ a_{34} \frac{\sin^2 \beta \cos \beta}{R} \right] \Delta k + \left[ a_{13} \cos \beta + a_{23} \frac{\sin^3 \beta}{R} \Delta \rho \right] \right\} \\ &= \left[ (a_{11} - \nu a_{12}) \cos^3 \beta + (a_{21} - \nu a_{22}) \frac{\sin^3 \beta \cos^2 \beta}{R} + a_{34} \frac{\sin^4 \beta \cos^3 \beta}{R^2} + a_{13} \frac{\sin^3 \beta \cos^2 \beta}{R} \right. \\ &\quad \left. + a_{23} \frac{\sin^6 \beta \cos \beta}{R^2} \right] m \epsilon_z \\ &+ \left[ (a_{11} - \nu a_{12}) \sin^2 \beta \cos \beta + (a_{21} - \nu a_{22}) \frac{\sin^5 \beta}{R} - a_{34} \frac{\sin^4 \beta \cos^3 \beta}{R^2} - a_{13} \frac{\sin^3 \beta \cos^2 \beta}{R} \right] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -a_{23} \frac{\sin^6 \beta \cos \beta}{R^2} \Big] m \varepsilon_R \\
& + \left[ (a_{11} - \nu a_{12}) R \cos^2 \beta \sin \beta + (a_{21} - \nu a_{22}) \sin^4 \beta \cos \beta - a_{34} \frac{\sin^3 \beta \cos^2 \beta}{R} (2 - \sin^2 \beta) \right. \\
& \quad \left. + a_{13} \cos^5 \beta + a_{23} \frac{\sin^3 \beta \cos^4 \beta}{R} \right] m r_R \dots\dots\dots (61)
\end{aligned}$$

## (8) 曲げモーメントと断面力の能率との合モーメント

$$\begin{aligned}
M_z = & \left[ (a_{11} - \nu a_{12}) R \sin \beta \cos^2 \beta + (a_{21} - \nu a_{22}) \cos^5 \beta - a_{14} \frac{\sin^3 \beta \cos^2 \beta}{R} (2 - \sin^2 \beta) \right. \\
& \quad \left. + a_{13} \sin^4 \beta \cos \beta + a_{23} \frac{\sin^3 \beta \cos^4 \beta}{R} \right] m \varepsilon_z \\
& + \left[ (a_{11} - \nu a_{12}) R \sin^3 \beta + (a_{21} - \nu a_{22}) \cos^3 \beta \sin^2 \beta + a_{34} \frac{\sin^3 \beta \cos^2 \beta}{R} (2 - \sin^2 \beta) \right. \\
& \quad \left. - a_{13} \sin^4 \beta \cos \beta - a_{23} \frac{\sin^3 \beta \cos^4 \beta}{R} \right] m \varepsilon_R \\
& + \left[ (a_{11} - \nu a_{12}) R^2 \sin^2 \beta \cos \beta + (a_{21} - \nu a_{22}) \sin \beta \cos^4 \beta + a_{34} \sin^2 \beta \cos \beta (2 - \sin^2 \beta)^2 \right. \\
& \quad \left. + a_{13} R \cos^4 \beta \sin \beta + a_{23} \cos^5 \beta \right] m r_R \dots\dots\dots (62)
\end{aligned}$$

(61), (62)の2つの式が, Stranded Ropeの引張りの性質を与える結果の式である。しかしこの式は数値計算の手段がかかるから近似式が必要になる。数値計算の結果から見て,ほとんど $a_{11}$ ,  $a_{12}$ の2つの常数だけについて求めてよく, (61), (62)式は実際問題として次の形として取扱うのが便利である。

$$\left. \begin{aligned} P_z & \doteq m(a_{11} - \nu a_{12}) [\cos^3 \beta \varepsilon_z + \sin^2 \beta \cos \beta \varepsilon_R + R r_R \cos^2 \beta \sin \beta] \\ M_z & \doteq m(a_{11} - \nu a_{12}) [\sin \beta \cos^2 \beta R \varepsilon_z + \sin^3 \beta R \varepsilon_R + R^2 r_R \sin^2 \beta \cos \beta] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

Stranded Ropeの素線が $n$ 本のより細い針金でできたスパイラルロープであれば,  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ の常数は

$$a_{11} = EAn \cos^3 \alpha, \quad a_{12} = EAn \sin^2 \alpha \cos \alpha$$

さらに素線自身のポアソン比 $\nu$ と, ロープ全体のポアソン比 $-(\varepsilon_R/\varepsilon_z)$ とが等しいものと仮定し, さらにロープのねじり変形 $r_R=0$ とすれば,  $m \times n$ 本の針金でできたストランドの弾性的な性質は次のように要約される。

$$\left. \begin{aligned} P_z & = m \cdot n \cdot EA (\cos^3 \alpha - \nu \sin^2 \alpha \cos \alpha) (\cos^3 \beta - \nu \sin^2 \beta \cos \beta) \varepsilon_z \\ M_z & = m \cdot n \cdot EA (\cos^3 \alpha - \nu \sin^2 \alpha \cos \alpha) (\sin \beta \cos^2 \beta - \nu \sin^3 \beta) \varepsilon_z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (64)$$

結局 Stranded Ropeの見掛けのヤング率は,

$$E_w = E (\cos^3 \alpha - \nu \sin^2 \alpha \cos \alpha) (\cos^3 \beta - \nu \sin^2 \beta \cos \beta) \dots\dots\dots (65)$$

$\alpha$ は子繩を形造るより細い素線の取るピッチ角,  $\beta$ は子繩の取るピッチ角である。(65)式からわかる通り, 一度よった線をもう一回より合わせれば, 見掛けのヤング率が減少する性質がわかる。このさいに, ポアソン比が大きく影響することが認められる。

## 6. 結 言

曲線針金の応力と変形との関係についてのこの報告は, 筆者の工学部電気科の友人である齊脇俊之介君(日本海底電線KK)が, ロープを引張ればねじれるが, この扱いが理論的に不明だがどうなるのかと, 話のはずみに出たのが, 始まりである。

弾性針金の立体的な扱いは, アーチや曲線桁の解析にも応用され得るし, ベクトル演算の妙味があるので, その後より一般的な基本式を立てるべく, 実際問題と密接な意義のあるものという観点から, ロープの曲げ, ストランドロープの引張り剛性等を, この報文で扱ってみた。ロープにはこのほかに, キンク現象, 破断のときの籠状のふくらみ, しごいたときの破壊等の重要な課題が残されているが, これらに対する検討は, また考えて見たいと思っている。

最後に, この論文を書くに当たって種々の助言を頂き, 資料を提供して下さいました日本海底電線KKの方に感謝する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) 田中・西脇・島田: 吊橋用スパイラル・ロープの弾性的性質, 土木学会論文集第59号・別冊3-3