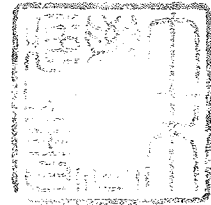


土 木 学 会 論 文 集

第 72 号・別冊 (3-2)

弾性質量基礎上にある構造物の振動解析について

正 員 工 博 後 藤 尚 男



TRANSACTIONS
OF
THE JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
No. 72, EXTRA PAPERS (3-2)

VIBRATION ANALYSIS OF STRUCTURES RESTED ON
AN ELASTIC FOUNDATION, TAKING VIBRATING
MASS OF SOIL INTO CONSIDERATION

By Dr. Eng., Hisao Goto, C.E. Member

February 1961
TOKYO JAPAN

昭和 36 年 2 月

土 木 学 会

弾性質量基礎にある構造物の振動解析について¹⁾

正 員 後 藤 尚 男*

VIBRATION ANALYSIS OF STRUCTURES RESTED ON AN ELASTIC FOUNDATION, TAKING VIBRATING MASS OF SOIL INTO CONSIDERATION

By Dr. Eng., Hisao Goto, C.E. Member

Synopsis : This paper describes vibration analysis of structures, taking the vibrating mass of their bed soil into consideration, and discusses applications these solutions to the several actual structures rested on an elastic foundation. From the practical engineering point of view, the author analyzed the vibration phenomena of structures by assuming some equivalent soil prisms under the structure-bases. Those fundamental solutions obtained were applied to pile foundation, machine foundation, and a few story buildings, and carried out the numerical computations for the compressor foundations and the school buildings.

From these investigations, the author has made clear the quantitative tendency that the natural frequencies of structures are decreased by the vibrating mass of their bed soil. Furthermore, by comparing the computed values for the compressor foundation with the measured ones, the adequacy of this paper has been confirmed in the practical engineering point of view. It is expected that this paper will be profitably used for solving the vibration problems of not a few structures in the field of civil engineering.

要 旨 本論文は地盤のいわゆる振動質量を考慮に入れた場合の構造物の振動性状を理論的に解析して、これを二、三の実構造物へ適用した結果について述べたものである。すなわち工学的な立場から、構造物の基礎に等価的な土の柱状体を仮想して振動解析を進め、これらを杭打基礎・機械基礎および低層建物へ適用して、具体的な数値計算を行なった。これより土の振動質量によって固有振動数が低下する傾向がわかり、さらに振動測定結果との比較からも、本文の理論式は工学的にかなり妥当であることが立証できた。この解析法は土木構造物の振動問題にもそのまま実用できるものと考えられる。

1. 緒 言

基礎地盤上にある構造物の振動問題では、振動にともなって生ずる地盤自身の質量、いわゆる土の振動質量をいかに取り扱うべきかについては、周知のとおり従来から数多くの研究者によって懸案とされてきた。たとえば G.P. Tschebotarioff 教授は彼の著書において 図-1 を掲げ、地盤の振動部分の重量として等価重量 \bar{W} のごときものが考えられるが、振動重量には図中に点線で示されているような明確な物理的境界面は存在しないと指摘しており²⁾、これに対しては異論のないことと思われる。しかし地盤自身の振動問題に終始するならともかく、こうした地盤上にある構造物の振動を解くにはなんらかの仮定を設けねばならない。ラトビア国立大学の B.П. Bnkche 氏は 1954年 “弾性と質量をもつ基礎の上に置かれたハリのたわみ振動” を、 図-2 に示すような等価的

図-1 G.P. Tschebotarioff による地盤の振動重量 \bar{W} の説明図

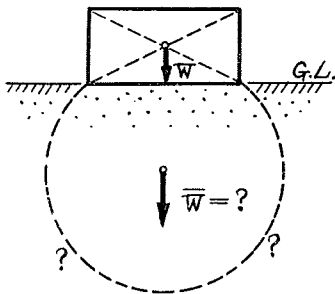
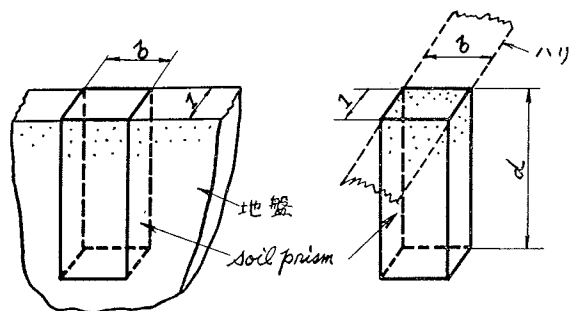


図-2 B.П. Bnkche による等価な soil prism (a) (b)



* 工学博士，京都大学教授，工学部土木工学教室

な soil prism で置き換えて解析を進めた³⁾。すなわち同氏は基礎地盤中から単位巾 1 とハリと同一の奥行 b とをもった等価深さ d の soil prism を切り取り、この d を本文の式(1.1)のように決め、しかる後この prism の縦振動から土の振動質量を考慮した動的な地盤係数を算定して、ハリの振動問題を取り扱った。

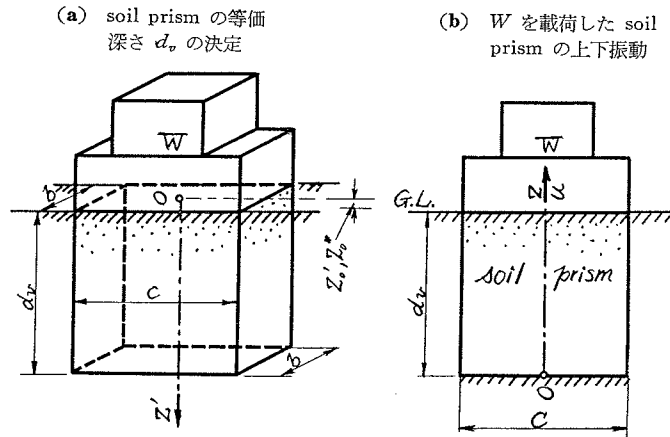
一方、鳥海氏は機械基礎の振動問題で円柱状の基礎を考へて、これと地盤とを一体の振動系とした解析を行なった⁴⁾。ところでわれわれが通常そうごうするのはほとんど例外なく矩形状の基礎であり、鳥海氏の解法はそのまま適用しにくいように思われる。そこで著者は上記の B.П. Bnkche 氏がハリの横振動、したがって地盤の上下振動のみに考へた 図-2 の soil prism を参照し、さらに水平振動および動揺振動にもこうした考へを拡張適用してゆこうとするものである。かくして標題の弾性質量基礎なる語は基礎地盤の弾性と質量とを考慮するという意味であり、ここでは基礎理論を解明したのち、具体的な実構造物への適用演算について述べることにする。本文の後半は著者が 1958 年 9 月—1959 年 9 月の間、米国の Stanford 大学に滞在中、実際問題に関連して計算したところを取りまとめたものである。

2. 剛構造物の自由振動

(1) 上下振動

上述の B.П. Bnkche 氏と同様に 図-3(a) にみるように、剛構造物 W の直下に構造物の底面積と相等しい断面積 $a=b \times c$ を有する soil prism を考へ、その未定深さを d_v とする。いま構造物と prism との接触面に

図-3 剛構造物の上下振動



において、 z_0' を静的な等分布荷重 q_s による沈下量、 z_0'' を同じく q_s によるこの prism の圧縮量とすると、

$$z_0' = q_s / K_v, z_0'' = q_s d_v / E$$

と書ける。ここに K_v, E は地盤係数と土のヤング率である。しかして z_0' と z_0'' とが相等しいような d_v の値は、

$$z_0' = z_0'' \quad \therefore d_v = E / K_v \dots\dots\dots (1.1)$$

上式の d_v が prism と構造物との接触面位置における上下変位量に関する等価的な深さを与える。 d_v が式(1.1)で決定されたので、この系の上下振動は 図-3(b) のように、頂部に剛構造物の全重量 W を載荷した soil prism の縦振動の問題として解けばよい⁵⁾。図-3(b) に対する縦振動の運動方程式とその一般解とは、 w を土の単位体積の重量、 u を縦振動変位とすると、

$$\left. \begin{aligned} Ea \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{wa}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, u = (A_1 \cos \alpha z + B_1 \sin \alpha z) \cos nt \\ \text{ここに、} \alpha = \sqrt{w^2 n^2 / (gE)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.2)$$

で与えられる。積分常数 A_1, B_1 はつぎの境界条件、

$$z=0 \text{ で } u=0, z=d_v \text{ で } -W/g \cdot \partial^2 u / \partial t^2 = Ea \cdot \partial u / \partial z$$

から決められ、 A_1, B_1 を消去すると、

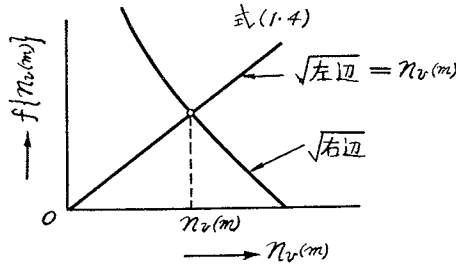
$$W/g \cdot n^2 \sin \alpha d_v = Ea \alpha \cos \alpha d_v \dots\dots\dots (1.3)$$

がえられ、これが振動数方程式である。上式に式(1.1)の d_v 、式(1.2)の α を代入し、この式を満足する振動数 n を $n_v(m)$ と書くと次式となる。

$$n_v^2(m) = \frac{g}{W} a n_v(m) \sqrt{\frac{Ew}{g}} \left/ \tan \left\{ \frac{n_v(m)}{K_v} \sqrt{\frac{Ew}{g}} \right\} \right. \dots \dots \dots (1.4)$$

これが土の振動質量を考慮した場合の固有振動数 $n_v(m)$ を与えるが、式 (1.4) はその両辺に $n_v(m)$ をふくんでいるので、試算法により 図-4 のような直線と曲線との交点として算出できる。さて式 (1.4) で $w/g \rightarrow 0$

図-4 上下固有振動数 $n_v(m)$ の算定



とすると、

$$\{n_v^2(m)\}_{w \rightarrow 0} = g/W \cdot a K_v = g/W \cdot k_v(0) = n_v^2(0) \dots \dots \dots (1.5)$$

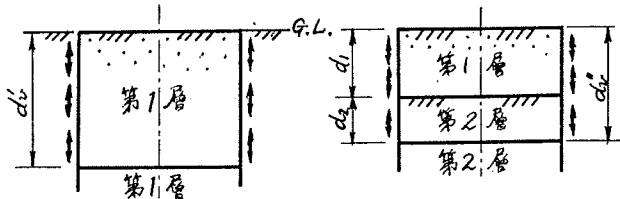
$n_v(0)$ はいうまでもなく土の振動質量を考えない通常の固有振動数であり、 $k_v(0) = a K_v$ はこのときの全バネ係数である。もし 図-1 のように等価的な土の振動全重量 \bar{W}_v として仮定すると、つぎの関係式が書ける。

$$\left. \begin{aligned} n_v^2(m) &= \frac{k_v(m)}{W/g} = \frac{k_v(0)}{W/g + \bar{W}_v/g} < \frac{k_v(0)}{W/g} = n_v^2(0) \\ \bar{W}_v/g &= k_v(0) / n_v^2(m) - W/g \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1.6)$$

ここに土の振動質量を考慮したときの $n_v(m)$ はこれを考慮しないときの $n_v(0)$ よりも当然小さくなっている。なお 図-5 に示したように、prism と周辺の地盤間に上下方向の反力を考慮するとき、または等価深さ d_v が第 1, 2 層間の値となるときの、などに対しても式 (1.1) に相当する d_v' , d_v'' などを算定することは比較的容易である。

図-5 soil prism の周辺反力をも考慮するとき

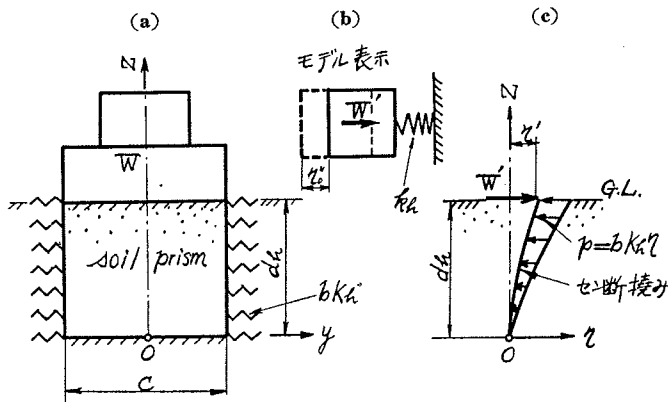
- (a) d_v が第1層内 (b) d_v が第2層内



(2) 水平振動

上下振動の場合と同様に 図-6(a) に示すように、剛構造物 W を載荷し、水平方向にバネ bK_h で支持された等価的な soil prism を考え、その未定深さを d_h とする。この prism の水平方向の振動変位 y または静変

図-6 剛構造物の水平振動



位 η はせん断的であるとみなしうる。いま 図-6(c) のようにこの prism の頂部に仮想水平荷重 W' を作用させ、これに対する地盤反力 $p=bK_h\eta$ (b : 奥行巾, K_h : 水平地盤係数) で支持された prism のせん断水平たわみを η とすると、次式を書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} k'aG \frac{d^2\eta}{dz^2} - bK_h\eta &= 0, \quad \eta = A_2 \cosh rz + B_2 \sinh rz \\ \text{ここに, } r &= \sqrt{bK_h/(k'aG)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.7)$$

G は土のせん断弾性係数, k' は断面によって決まる常数である (矩形の場合通常 $k'=2/3$)。 $z=0$ で $\eta=0$, $z=d_h$ でせん断力 $S=k'aG \cdot d\eta/dz=W'$ から、積分常数 A_2, B_2 を求めると、結局

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sinh rz \cdot W'/(k'aGr \cosh rd_h) \\ \therefore \eta'_0 &= (\eta)_{z=0} = \tanh rd_h \cdot W'/(k'aGr) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.8)$$

一方 図-6(a) を振動モデル的に表示すると、同図の (b) となる。そこで全水平バネ係数 k_h を有するこのモデルが、仮想荷重 W' によって生ずる静変位 η_0'' は

$$\eta_0'' = W'/k_h = W'/(aK_h) \dots\dots\dots (1.9)$$

式 (1.8) の η_0' と式 (1.9) の η_0'' を相等しからしめる d_h が、水平変位に関する soil prism の等価深さであるので、

$$\left. \begin{aligned} \tanh rd_h/(k'aGr) &= 1/(aK_h), \quad r: \text{式 (1.7)} \\ \therefore d_h &= \frac{1}{r} \tanh^{-1} \left(\frac{k'aGr}{K_h} \right) = \sqrt{\frac{k'aG}{bK_h}} \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{k'bG}{aK_h}} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.10)$$

d_h が決まったので、 W を載荷した 図-6(a) の prism の水平せん断振動の基礎方程式は、

$$\left. \begin{aligned} k'aG \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - bK_h y - \frac{wa}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 0, \quad y \equiv Y \cos nt \\ \therefore \frac{d^2 Y}{dz^2} - \beta^2 Y &= 0, \quad \text{ここに } \beta^2 = \frac{1}{k'aG} \left(bK_h - \frac{wa}{g} n^2 \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.11)$$

上式を解くに当って β^2 の正負が問題となる。

a) $\beta^2 > 0$: $bK_h > wan^2/g$ なるとき 式 (1.11) の解は

$$Y = A_3 \cosh \beta z + B_3 \sinh \beta z \dots\dots\dots (1.12)$$

$z=0$ で $Y=0$, $z=d_h$ でせん断力 $S(t) = k'aG \cdot \partial y / \partial z = -W/g \cdot \partial^2 y / \partial t^2$ より

$$W/g \cdot n^2 \tanh \beta d_h = k'aG \beta \dots\dots\dots (1.13)$$

なる振動数方程式がえられる。

b) $\beta^2 < 0$: $bK_h < wan^2/g$ なるとき この場合は

$$Y = A_4 \cos \beta' z + B_4 \sin \beta' z \dots\dots\dots (1.14)$$

となり、**a)** と同一の境界条件から振動数方程式は

$$W/g \cdot n^2 \tan \beta' d_h = k'aG \beta' \dots\dots\dots (1.15)$$

となる。式 (1.13) の β は式 (1.11) に与えられており、式 (1.15) の β' は $\beta'^2 = -\beta^2$ である。かくして式 (1.13), 式 (1.15) を満足する固有振動数 n を $n_h(m)$ と記すと、結局次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} bK_h > \frac{wa}{g} n_h^2(m) : n_h^2(m) &= \frac{g}{W} \sqrt{k'aG \left\{ bK_h - \frac{wa}{g} n_h^2(m) \right\}} / \tanh \left\{ \sqrt{1 - \frac{wan_h^2(m)}{gbK_h}} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{k'bG}{aK_h}} \right\} \\ bK_h < \frac{wa}{g} n_h^2(m) : n_h^2(m) &= \frac{g}{W} \sqrt{k'aG \left\{ \frac{wa}{g} n_h^2(m) - bK_h \right\}} / \tan \left\{ \sqrt{\frac{wan_h^2(m)}{gbK_h} - 1} \tanh^{-1} \sqrt{\frac{k'bG}{aK_h}} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.16)$$

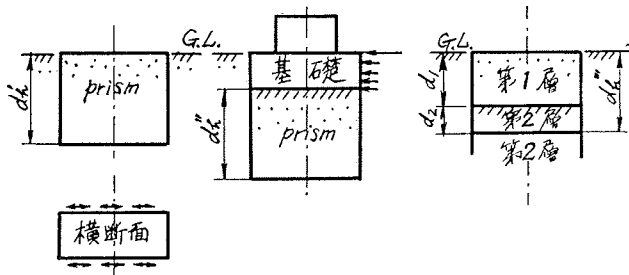
上式はそれぞれ両辺に $n_h^2(m)$ をふくんでいるので、試算法によって 図-4 に示したと同様にして算出できる。また上式で $w/g \rightarrow 0$ とおくと、当然土の振動質量を考慮しないときの固有振動数 $n_h(0)$ がえられると同時に、式 (1.6) に対応してつぎの関係が書ける。

$$\left. \begin{aligned} \{n_h^2(m)\}_{w \rightarrow 0} &= \frac{g}{W} aK_h = \frac{g}{W} k_h(0) = n_h^2(0) \\ n_h^2(m) &= \frac{k_h(m)}{W/g} = \frac{k_h(0)}{W/g + \bar{W}_h/g} < \frac{k_h(0)}{W/g} = n_h^2(0) \\ \bar{W}_h/g &= k_h(0)/n_h^2(m) - W/g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.17)$$

この場合も 図-7 に示すように、soil prism の側面にも地盤反力を考慮するとき、構造物の基礎が地盤中にあるとき、および d_h が第2層中に来るときなどに対しては、上記とそれぞれ同様の計算を進めることができる。

図-7 soil prism に種々の反力をも考慮するとき

(a) 側面反力 (b) 構造基礎に反力 (c) d_h が第2層内



(3) 動 揺 振 動

弾性地盤上にある構造物の動揺振動を考えると、構造物を支持するのは通常地盤の鉛直バネであるとみなされる。したがってこの場合の soil prism の等価深さ d_r は式 (1.1) の d_v と相等しくなるので、

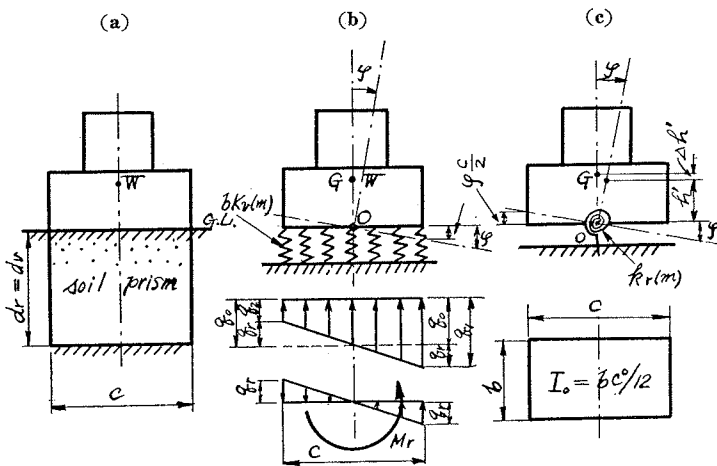
$$d_r = d_v = E/K_v \dots\dots\dots(1.18)$$

しかるに式 (1.4) と式 (1.6) の第1式初めとを比較すると容易に、

$$a n_v(m) \sqrt{\frac{Ew}{g}} \tan \left\{ \frac{n_v(m)}{K_v} \sqrt{\frac{Ew}{g}} \right\} = n_v^2(m) \cdot W/g = k_v(m) = a K_v(m) \dots\dots\dots(1.19)$$

となる。したがって 図-3(b) または 図-8(a) の振動系は、図-8(b) の上半のように荷重 W を式 (1.19) のバネ $K_v(m)$ によって、一様に支持された振動モデルと等価であるといえる。これより動揺振動を考えるに、図-8(b) の下半を参照して動的な回転全バネ係数 $k_r(m)$ を算出する。同図で地盤の偏心反力 q_r によって生ず

図-8 剛構造物の動揺振動



るモーメントを M_r とすると、

$$\left. \begin{aligned} q_1, q_2 = q_0 \pm q_r &= \frac{W}{a} \pm \frac{M_r}{I_0} \frac{c}{2}, \quad I_0 = \frac{bc^3}{12}, \\ q_r &= K_v(m) \varphi \cdot c/2 = M_r \cdot c/2 I_0 \quad \therefore M_r = K_v(m) I_0 \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.20)$$

ここに I_0 は構造物底面の断面2次モーメントである (図-8(c) 参照)。しからは 図-8(b) はさらに 図-8(c) の振動モデルで表示され、動的な回転全バネ係数は $k_r(m) = M_r/\varphi$ で定義されるので、上式から

$$k_r(m) = M_r/\varphi = K_v(m) I_0 = K_v(m) bc^3/12 = k_v(m) c^2/12 \dots\dots\dots(1.21)$$

さて 図-8(e) の自由振動を考えるに、厳密には W の重心位置 G の傾斜による影響を考えねばならない。 J を構造物の慣性モーメント、 h' を重心高、 $\Delta h'$ を振動中における G 位置の低下量とすると、位置のエネルギー V および運動のエネルギー T は次式で書ける。

$$\left. \begin{aligned} 2V &= k_r(m) \varphi^2 - 2W \cdot \Delta h' \cong \{k_r(m) - Wh'\} \varphi^2 \\ 2T &= J \dot{\varphi}^2 = (J_G + W/g \cdot h'^2) \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1.22)$$

V の第 2 項は $4h'$ によるエネルギー損失を表わし⁶⁾, J_G は重心 G のまわりの慣性モーメントである。式 (1.22) に Lagrange の運動方程式を適用して,

$$J\ddot{\varphi} + \{k_r(m) - Wh'\}\varphi = 0 \quad \therefore n_r^2(m) = \{k_r(m) - Wh'\}/J \dots\dots\dots (1.23)$$

これに式 (1.21) の $k_r(m)$ さらに式 (1.19) の $k_v(m)$ を順次代入し, 式 (1.19) の中の $n_v(m)$ を $n_r(m)$ に書き直すと, 結局土の振動質量を考慮した場合の動揺振動の固有振動数 $n_r(m)$ は次式で与えられる。

$$n_r^2(m) = \frac{1}{J} \frac{bc^3}{12} n_r(m) \sqrt{\frac{E\omega}{g}} \left/ \tan \left\{ \frac{n_r(m)}{K_v} \sqrt{\frac{E\omega}{g}} \right\} - Wh'/J \right. \dots\dots\dots (1.24)$$

上式を試算法で演算するわけであるが, 右辺の第 2 項は第 1 項に対して無視できることが多い。また土の振動質量を無視するときは, これまでと同様に上式で $\omega/g \rightarrow 0$ とおけばよいので, 式 (1.17) に対応してつぎの関係が書かれる。

$$\left. \begin{aligned} \{n_r^2(m)\}_{\omega \rightarrow 0} &= \frac{k_r(0) - Wh'}{J} = n_r^2(0), \quad k_r(0) = \frac{bc^3}{12} K_v \\ n_r^2(m) &= \frac{k_r(m) - Wh'}{J} = \frac{k_r(0) - Wh'}{J+J} < \frac{k_r(0) - Wh'}{J} = n_r^2(0) \cong \frac{k_r(0)}{J} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1.25)$$

ここに \bar{J} は土の振動質量による仮想慣性モーメントに相当する。

3. 剛構造物の強制振動と連成振動

(1) 強制振動

2. において取り扱った 図-3, 図-6, 図-8 などはいずれも剛構造物の質量 $M = W/g$ で, その全バネ係数は $k_v(m), k_h(m), k_r(m)$ という 1 自由度系と等価であった。したがって減衰係数も一応 $c(m)$ で表わせるものと仮定すると,

$$\left. \begin{aligned} W/g \cdot \ddot{x} + c(m)\dot{x} + k(m)x &= f(t) \\ \text{または, } \ddot{x} + 2\varepsilon(m)\dot{x} + n^2(m)x &= g/W \cdot f(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1)$$

ここに, $2\varepsilon(m) = gc(m)/W, \quad n^2(m) = gk(m)/W$

なる 1 自由度系の方程式が書ける。上式中の $n^2(m)$ はすでに式 (1.4), 式 (1.16) および式 (1.24) で求めたとおりである。したがって固有振動数 $n(m)$ さえ 2. のようにして算定できれば, 強制振動は土の振動質量を考えない普通の場合と形式上は全く同一の取り扱いをすればよいことになる。すなわち式 (2.1) の一般解はすでに初等振動学で与えられており, 特に攪乱力が $f(t) = P_m \cos(\omega t + \Psi)$ なるときの定常振巾 $A(m)$ は容易に,

$$\left. \begin{aligned} A(m) &= \frac{g}{W} \frac{P_m}{n^2(m)} / B(m), \quad \text{ここに } B(m) = \sqrt{\left[1 - \left\{ \frac{\omega}{n(m)} \right\}^2 \right]^2 + 4\nu^2(m) \left\{ \frac{\omega}{n(m)} \right\}^2} \dots\dots (2.2) \\ \nu(m) &= \varepsilon(m)/n(m) \cong \delta(m)/2\pi, \quad \delta(m) : \text{対数減衰率} \end{aligned} \right\}$$

で与えられる。これより上下, 水平, 動揺の各振動に対しては,

$$\left. \begin{aligned} A_v(m) &= \frac{g}{W} \frac{P_{mv}}{n_v^2(m)} / B_v(m), \quad A_h(m) = \frac{g}{W} \frac{P_{mh}}{n_h^2(m)} / B_h(m) \\ \phi(m) &= \frac{1}{J} \frac{M_m}{n_r^2(m)} / B_r(m), \quad \text{ここに } n_v^2(m), n_h^2(m), n_r^2(m) : \text{式 (1.4, 16, 24)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2.3)$$

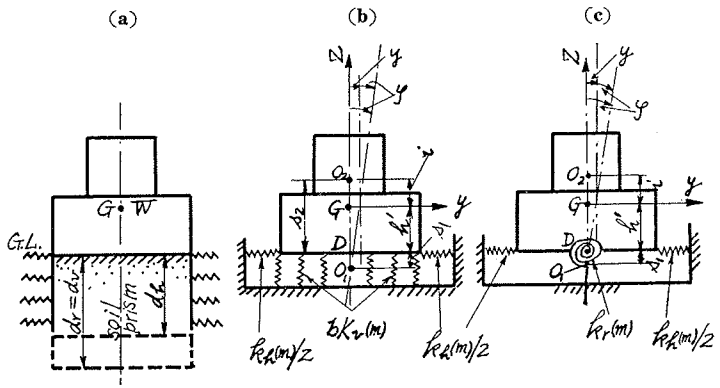
上式で $B_v(m), B_h(m), B_r(m)$ は式 (2.2) における $B(m)$ 中の $n(m)$ と $\nu(m)$ とに順次添字 v, h, r を付したものである。土の振動質量を考えないときは式 (2.3) において $n(m) \rightarrow n(0), \nu(m) \rightarrow \nu(0)$ とおけばよいことはいうまでもない。

(2) 連成自由振動

弾性地盤上の構造物は水平と動揺による連成振動のことが多い。そこで 図-6 の水平振動と 図-8 の動揺振動とを連成させると, 図-9 がえられる。すなわち 図-9(b), (c) の $k_h(m)$ は 図-6 (a) の系の全水平バネ係数を表わし, 図-9(c) の $k_r(m)$ は 図-8(c) の全回転バネ係数 $k_r(m)$ を表わす。水平振動を y , 回転振動を φ, O_1, O_2 を 2 個の回転中心, G を重心, $O_1D = s_1, O_2D = s_2, DG = h', O_2G = i$ とすると, 図-9(c) に対する位置のエネルギー V と運動のエネルギー T とは,

$$\left. \begin{aligned} 2V &= k_h(m)(y - h' \sin \varphi)^2 + k_r(m)\varphi^2 - 2Wh'(1 - \cos \varphi) \\ &= \{k_h(m)s^2 + k_r(m) - Wh'\}\varphi^2, \\ 2T &= W/g \cdot \dot{y}^2 + J_G \dot{\varphi}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.4)$$

図-9 剛構造物の連成振動



と書ける。これに Lagrange の運動方程式を適用すると、

$$\left. \begin{aligned} J_G \ddot{\varphi} + \{k_h(m)h^{2'} + k_r(m) - Wh'\}\varphi - k_h(m)h'y = 0 \\ W/g \cdot \ddot{y} + k_h(m)y - k_h(m)h'\varphi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.5)$$

ここで、 $\varphi = \Phi \cos nt$, $y = Y \cos nt$

とおいて上式に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} -n^2 J_G \Phi + \{k_h(m)h^{2'} + k_r(m) - Wh'\}\Phi - k_h(m)h'Y = 0 \\ -n^2 W/g \cdot Y + k_h(m)Y - k_h(m)h'\Phi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.6)$$

これより Φ と Y を消去してつぎの振動数方程式 $\Delta(n)$ をうる。

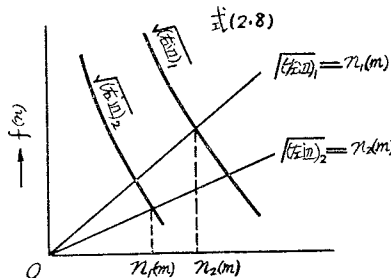
$$\begin{aligned} \Delta(n) &= J_G W/g \{n^2 - n_1^2(m)\} \{n^2 - n_2^2(m)\} \\ &= \{-n^2 J_G + k_h(m)h^{2'} + k_r(m) - Wh'\} \{k_h(m) - W/g \cdot n^2\} - k_h^2(m)h^{2'} = 0 \dots\dots\dots (2.7) \end{aligned}$$

したがって、この系の土の振動質量を考慮した場合の連成固有振動数 $n_1(m)$ と $n_2(m)$ は結局次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} n_1^2(m) \\ n_2^2(m) \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2 J_G} \left[\{k_h(m)(h^{2'} + r^2) + k_r(m) - Wh'\} \right. \\ \left. \mp \sqrt{\{k_h(m)(h^{2'} + r^2) + k_r(m) - Wh'\}^2 - 4 k_h(m)r^2 \{k_r(m) - Wh'\}} \right] \dots\dots\dots (2.8)$$

上式において $r^2 = g J_G / W$ であり $k_h(m)$ と $k_r(m)$ とはそれぞれ式 (1.16), 式 (1.24) の右辺において、 g/W と $1/J$ を取り除いた残余の項に $n \rightarrow n_1(m)$, $n \rightarrow n_2(m)$ を代入した値である。こうしたことから $k_r(m)$ と $k_h(m)$ は未知数 $n_1(m)$ と $n_2(m)$ の関数となっているので、結局 $n_1(m)$, $n_2(m)$ は 図-10 のように試算法によって

図-10 連成固有振動数の算定



直線と曲線の交点として算定できる。つぎに $n_1(m)$, $n_2(m)$ のおのおのに対応する回転中心 O_1 , O_2 の位置は、

$$\varphi = Y/(h' + s), \text{ かつ } \varphi = \{k_h(m) - Wn^2/g\}Y / \{k_h(m)h'\} : \text{式 (2.6)}$$

$$\therefore s_1 = \frac{k_h(m)h'}{k_h(m) - Wn_1^2(m)/g} - h', \quad s_2 = \frac{k_h(m)h'}{k_h(m) - Wn_2^2(m)/g} - h' \dots\dots\dots (2.9)$$

(3) 連成強制振動

図-9(c) に外力 $M_m \cos \omega t$ と $P_h \cos \omega t$ とが作用するときは、

$$\left. \begin{aligned} J_G \ddot{\varphi} + \{k_h(m)h^2 + k_r(m) - Wh'\}\varphi - k_h(m)h'y = M_m \cos \omega t \\ W/g \cdot \ddot{y} + k_h(m)y - k_h(m)h'\varphi = P_h \cos \omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.10)$$

これより

$$\varphi_p = \Phi_m \cos \omega t, \quad y_p = Y_m \cos \omega t$$

とおくと、定常振巾は一般の場合と同様の演算を進めて結局次式が算出される。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m = [\{n_h^2(m) - \omega^2\} M_m + n_h^2(m)h'P_h] / J_G \cdot \Delta(\omega) \\ Y_m = g \left[\left\{ \frac{Wh'}{gJ_G} n_h^2(m) + \frac{J}{J_G} n_r^2(m) - \omega^2 \right\} P_h + \frac{Wh'}{gJ_G} n_h^2(m) M_m \right] / W \cdot \Delta(\omega) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.11)$$

ここに、

$$\Delta(\omega) = \{\omega^2 - n_1^2(m)\}\{\omega^2 - n_2^2(m)\}$$

もしも以上において土の振動質量を考慮しないときは、これまでと全く同様にして、 $k_h(m)$ 、 $k_r(m)$ の代わりに単に $k_h(0)$ 、 $k_r(0)$ を用いればよい。

4. 弾性一様構造物の振動

土の振動質量を考慮するときは、結局 soil prism を弾性振動体の 1 区間とみなせばよいことがわかった。そこで同様な考えのもとに一様な構造物の弾性振動に関する解析を進める。

(1) 上下縦振動

図-11 にみるように soil prism と構造物との 2 区間の上下振動となるので、便宜上構造区間のみを添字 1 をつける。prism の等価深さ d_v は式 (1.1) で与えられたので、これら両区間に対する縦振動の運動方程式は周知のとおり、

$$Ea \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{wa}{g} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad E_1 a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z_1^2} - \frac{w_1 a_1}{g} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots(3.1)$$

これより 図-11 の $z=0$ で固定、 $z=d_v$ かつ $z_1=0$ で縦の直応力 $E \cdot \partial u / \partial z$ が連続、 $z_1=h$ で自由という境界条件を用いると、振動数方程式は結局、

$$\left. \begin{aligned} E\alpha - E_1 \alpha_1 \tan \alpha d_v \cdot \tan \alpha_1 h = 0 \\ \text{ここに、} \quad \alpha = \sqrt{wn^2/(gE)}, \quad \alpha_1 = \sqrt{w_1 n^2/(gE_1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.2)$$

となり、これに応じて正規関数 U_1 、 U が次式として求められる。

$$\left. \begin{aligned} U_1 = B(e \cos \alpha d_v \cdot \sin \alpha_1 z_1 + \sin \alpha d_v \cdot \cos \alpha_1 z_1) \\ U = B \sin \alpha z, \quad \text{ここに } e = E\alpha/E_1 \alpha_1, B: \text{ 常数} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.3)$$

(2) 水平せん断振動

構造物が太短いときは周知のとおりせん断振動が支配的で、このとき各質点は回転をともなわず直線運動とみなされる。したがって soil prism の等価深さ d_h は式 (1.10) となり、図-12 の両区間に対してつぎの運動方程式が書ける。

$$k' a G \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - b K_h y - \frac{wa}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad k_1' a_1 G_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial z_1^2} - \frac{w_1 a_1}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots(3.4)$$

図-11 弾性構造物の上下縦振動

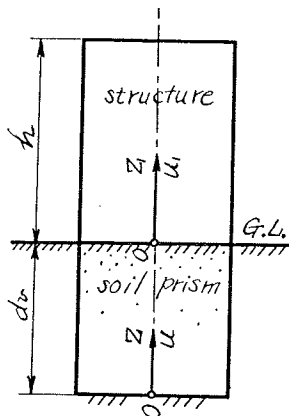
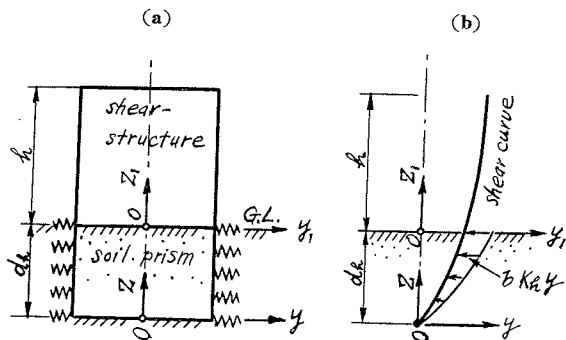


図-12 弾性構造物の水平せん断振動



前式の解は 2.(2) のときと同様になるので、図-12 を参照して $z=0$ で固定、 $z=d_h$ かつ $z_1=0$ でせん断力 $k'aG \cdot \partial y / \partial z$ が連続、 $z_1=h$ で自由という境界条件を用いる。しからば式 (1.11)~式 (1.15) における同様に β^2 の正負に応じて、つぎの振動数方程式が算出される。

$$\left. \begin{aligned} \beta^2 > 0 : k'aG\beta + k_1'a_1G_1\beta_1 \tanh \beta d_h \cdot \tanh \beta_1 h = 0 \\ \beta^2 = -\beta'^2 < 0 : k'aG\beta' - k_1'a_1G_1\beta_1 \tan \beta' d_h \cdot \tan \beta_1 h = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.5)$$

ここに、

$$\beta^2 = -\beta'^2 = (bK_h - \omega a n^2 |g|) / (k'aG), \quad \beta_1 = \sqrt{\omega_1 n^2 / (k_1'G_1g)}$$

これに応じて正規関数は次式のように求まる。

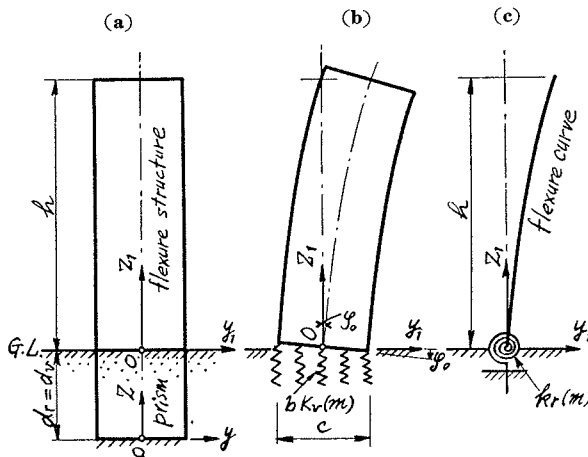
$$\left. \begin{aligned} \beta^2 > 0 : Y_1 = C \{ \sinh \beta d_h \cdot \cosh \beta_1 z_1 + G(\beta) \cosh \beta d_h \cdot \sinh \beta_1 z_1 \}, \\ Y = C \sinh \beta z \\ \beta^2 < 0 : Y_1 = C' \{ \sin \beta' d_h \cdot \cos \beta_1 z_1 + G(\beta) \cos \beta' d_h \cdot \sin \beta_1 z_1 \}, \\ Y = C' \sin \beta' z \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6)$$

ここに、 $G(\beta) = k'aG\beta / (k_1'a_1G_1\beta_1)$, C, C' : 常数

(3) 曲げ動揺振動

構造物が細長いと当然曲げ振動が支配的となり、弾性地盤上では構造物の底面は図-13(b) にみるように回転角 φ_0 を生ずる。地盤と構造物底面間の摩擦抵抗を一応考えないことにすると、地盤の鉛直バネが構造物の曲げ

図-13 弾性構造物の曲げ動揺振動



動揺に対抗することになる。したがってこの場合の soil prism を表わす図-13 中の $d_r = d_v, bK_v(m), k_r(m)$ はそれぞれ純動揺を表わした図-8 におけるものと相等しいことになる。かくして地盤の振動質量を考慮した場合の曲げ動揺振動はこれを考慮しない場合における $k_r(0)$ の代りに $k_r(m)$ を用いればよいことになり、 $k_r(m)$ はすでに式 (1.19) で与えられた。しかして図-13(b) または (c) は熟知のハリの曲げ振動の式と同一となり、

$$\left. \begin{aligned} E_1 I_1 \frac{\partial^4 y_1}{\partial z_1^4} + \frac{\omega_1 a_1}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = 0, \quad y_1 = Y_1 \cos nt \text{ より} \\ Y_1 = D_1 \cosh r z_1 + D_2 \sinh r z_1 + D_3 \cos r z_1 + D_4 \sin r z_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.7)$$

ここに、 $r = \sqrt[4]{\omega_1 a_1 n^2 / (g E_1 I_1)}$

$z_1=0$ でせん断力 $S_1=0$, $z_1=h$ で $M_1=0, S_1=0$ という条件のほか、式 (1.20) を参照して、

$$\left. \begin{aligned} z_1=0 : M_1 = M_r = -K_v(m) I_0 \varphi_0 = -K_v(m) I_0 \varphi_1 \\ \therefore E_1 I_1 (d^2 Y_1 / dz_1^2)_{z_1=0} = -K_v(m) I_0 (dY_1 / dz_1)_{z_1=0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.8)$$

なる 1 条件を加えて式 (3.7) の各係数を消去すると、つぎの振動数方程式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \{ \cosh r h - \delta (\sinh r h - \sin r h) \} \{ \sin r h + \delta (\cos r h - \cosh r h) \} \\ + \{ \cos r h + \delta (\sinh r h - \sin r h) \} \{ \sinh r h - \delta (\cosh r h - \cos r h) \} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.9)$$

ここに、 $\delta = EI r / \{ 2 k_r(m) \}$, r : 式(3.7), $k_r(m)$: 式(1.19)

上式では結局 r, δ がともに n の関数となっているので、これを数値計算することはそれほど容易ではない。また正規関数 Y_1 は境界条件から式 (3.7) の常数 $D_1 \sim D_4$ 間の比を求め、かつ任意常数を D とすると次式の

ように与えられる。

$$Y_1 = D \{ [\cos r h + \delta(\sinh r h - \sin r h)] \{ \cosh r z_1 - \delta(\sinh r z_1 + \sin r z_1) \} + [\cosh r h - \delta(\sinh r h - \sin r h)] \{ \cos r z_1 + \delta(\sinh r z_1 + \sin r z_1) \} \} \dots \dots \dots (3.10)$$

以上を要するに弾性質量基礎にある弾性構造物の振動は、本文のような工学的な解析によれば、地盤を等価な soil prism に置き換えて、この prism を弾性振動の 1 区間とみなして、これを土の振動質量を考慮しない通常の場合に対する構造物の振動と連成させて、解けばよいということがわかった。以下に具体的な構造物への適用について述べる。

5. 杭打基礎を有する構造物への適用

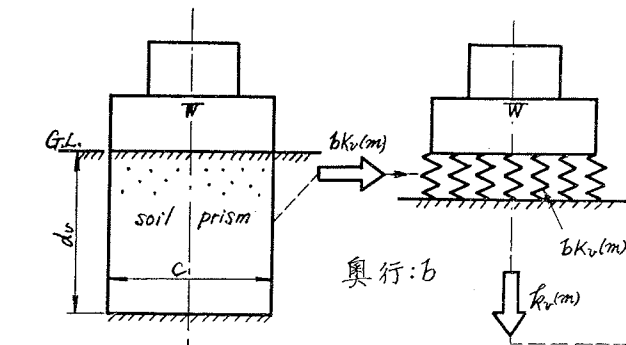
杭打基礎の場合に土の振動質量を直接考慮してゆくことは簡単ではないので、ここでは既述の結果に杭のみによる構造バネ $k(p)$ を組み合わせることとする。基礎杭としては直・斜両者による簡単な組杭を代表的に選ぶ。

(1) 上下振動

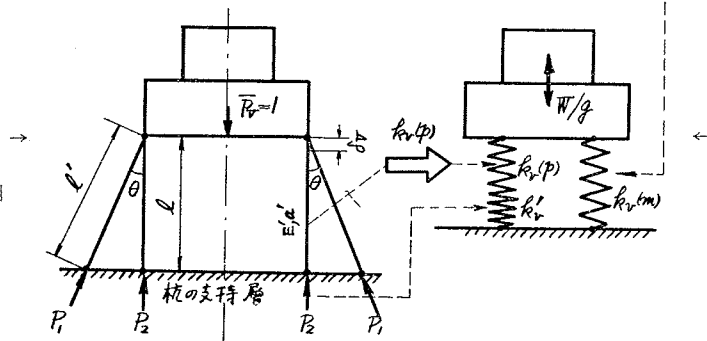
2.(1) の 図-3 より 図-8(b) で表わされた振動質量を考慮した場合の土のバネ係数 $K_v(m)$ と全バネ係数 $k_v(m)$ は結局式 (1.19) で与えられている。これより 図-14(a) の上下振動は同図 (c) の振動モデルにおける W/g と $k_v(m) = aK_v(m)$ で表示できる。一方 図-14(b) の杭構造のみによる全バネ係数 $k_v(p)$ は仮想荷重 $\bar{P}_V = 1$ とこれによる杭頭の鉛直変位 δ_V との比で与えられる。いま杭のヤング率 E' と断面積 a' が杭全体に共通で、杭端はヒンジ結合と仮定すると、図-14(b) から

図-14 杭打基礎を有する構造物上下振動のモデル表示

(a) soil prism とその振動モデル



(b) 杭打基礎の一例



(c) 振動モデル

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_V = 1 &= 2(P_2 + P_1 \cos \theta), \quad P_2 = a' E' \epsilon_2' = a' E' \delta_V / l, \\ P_1 &= a' E' \epsilon_1' = a' E' \cos \theta \cdot \delta_V / l' = a' E' \cos^2 \theta \cdot \delta_V / l \\ \therefore \bar{P}_V / \delta_V &= 1 / \delta_V = 2 E' a' (1 + \cos^2 \theta) / l \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.1)$$

このような杭の骨組が奥行 b 方向に i 組あれば、

$$k(p) = i / \delta_V = 2 i E' a' (1 + \cos^2 \theta) / l \dots \dots \dots (4.2)$$

また杭の支持層の弾性反力をも考慮するときは、この全バネ係数 k_v' は単に支持層内における地盤係数 K_v' と、杭・土間の接触全面積 F' との積であると考えて、

$$k_v' = i \sum_j K_v' F' \quad (j: 1 \text{ 骨組の杭数}) \dots\dots\dots (4.3)$$

と書ける。かくして 図-14(c) にみるように、 $k_v(p)$ と k_v' とは直列、これらと $k_v(m)$ とは並列という振動モデルがえられる。しからば土の振動質量と杭とを考慮した上下振動数 $n_v(m, p)$ は、

$$n_v^2(m, p) = \frac{g}{W} [k_v(m) + k_v(p) \cdot k_v' / \{k_v(p) + k_v'\}] \dots\dots\dots (4.4)$$

杭の支持層が剛であれば [] 内は $k_v(m) + k_v(p)$ となる。いずれにしても $k_v(m)$ は式 (1.19) で $n_v(m) \rightarrow n_v(m, p)$ としたものになるので、式 (4.4) は試算法によらねばならない。なお $k_v(p)$ を一般的に求めるには、各杭の分担軸方向力 P_j を計算した後、仕事の理を用いて次式から算定すればよい。

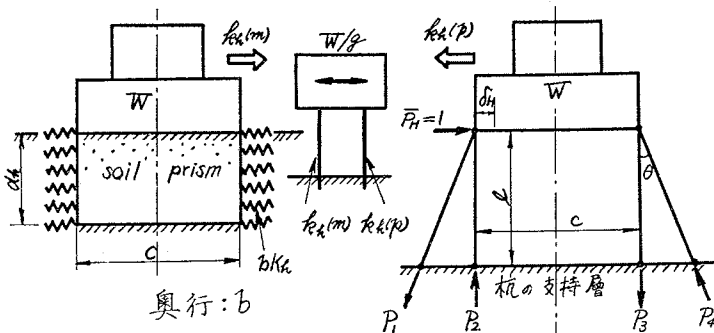
$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_V \cdot \delta_V = 1 \cdot \delta_V = \sum_j P_{vj} \delta l_j = \sum_j l_j P_{vj}^2 / a' E' \\ \therefore k_v(p) = i / \delta_V = i E' a' / \sum_j l_j P_{vj}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.5)$$

(2) 水平振動

図-6 の固有振動数 $n_h^2(m)$ は式 (1.16) で与えられ、しかも $n_h^2(m) = k_h(m) \cdot g / W = k_h(m) / M$ であることから、図-15(a) の $k_h(m)$ は式 (1.16) の右辺で g / W を取りのぞいた値に相等しい。一方 図-15(c) の杭構

図-15 杭打基礎を有する構造物水平振動のモデル表示

(a) soil prism (b) 振動モデル (c) 杭打基礎の一例



造のみによる全水平バネ係数 $k_h(p)$ は同図を参照し、かつ 5.(1) と同様にして、

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_H \cdot \delta_H = 1 \cdot \delta_H = \sum_j P_{hj} \delta l_j = \sum_j l_j P_{hj}^2 / a' E' \text{ より} \\ P_1 = P_4 = 1/2 \cdot \cos \theta, \quad P_2 = P_3 = 1/2 \cdot \cot \theta \\ \text{しかも } l_1 = l_4 = l / \cos \theta, \quad l_2 = l_3 = l \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.6)$$

奥行 b にわたってこれが i 組あれば、

$$k_h(p) = i / \delta_H = i E' a' / \sum_j l_j P_{hj}^2 \quad \dots\dots\dots (4.7)$$

となる。かくして上記の $k_h(m)$ と $k_h(p)$ とから 図-15(b) の振動モデルがえられるので、その固有振動数 $n_h(m, p)$ は、

$$\left. \begin{aligned} n_h^2(m, p) = g \{k_h(m) + k_h(p)\} / W \\ \therefore n_h^2(n, p) = n_h^2(m) + g k_h(p) / W \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.8)$$

右辺の $n_h^2(m)$ は上式中においては、式 (1.16) の右辺で $n_h(m) \rightarrow n_h(m, p)$ とおいた値全体を表わすので、結局これまで同様試算法によって $n_h(m, p)$ を算定することになる。

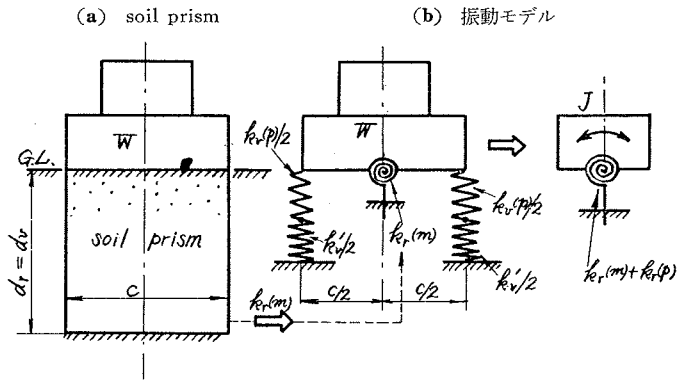
(3) 動揺振動

図-8(a) は同図の (b) を経て (c) の振動モデルで表わされ、このときの全回転バネ係数 $k_r(m)$ は式 (1.21) で与えられた。したがって 図-16(a) の soil prism は 図-16(b) 中央の $k_r(m)$ で表示できる。つぎに杭構造のみによる回転バネは上下振動を表わす 図-14(c) における振動モデルの $k_v(p)$ と k_v' とを採ればよいが、動揺振動では杭バネは杭頭部の位置、したがってこの場合は構造物基礎の両下端に実在している。これより杭構造によるバネ $k_v(p)$ と k_v' とを 図-16(b) のように折半して記入できるので、その全回転バネ係数 $k_r(p)$ は、

$$k_r(p) = (c/2)^2 k_v(p) k_v' / \{k_v(p) + k_v'\} \dots\dots\dots (4.9)$$

となる。しかして $k_r(m)$ と上式の $k_r(p)$ は並列であるので、図-16(b) の右半にみるように回転慣性が J で

図-16 杭打基礎を有する構造物動揺振動のモデル表示



全回転バネ係数が $k_r(m) + k_r(p)$ という振動モデルがえられる。しからば杭構造がある場合の固有振動数 $n_r(m, p)$ は、

$$n_r^2(m, p) = \{k_r(m) + k_r(p)\} / J, \quad k_r(p) : \text{式 (4.9)} \dots \dots \dots (4.10)$$

で表わされる。式中右辺の $k_r(m)$ は式 (1.21) したがって式 (1.19) で $n_v(m) \rightarrow n_r(m, p)$ であるので、式 (4.10) は再び試算法によることになる。

なお以上の各振動において土の振動質量を考慮しないときは、これまでと同様に各式で $w/g \rightarrow 0$ とおいて、 $n_v(o, p)$, $n_h(o, p)$, $n_r(o, p)$ として求めればよい。

6. 機械基礎への適用

(1) 機械基礎一般

機械基礎の振動問題はすでに取り扱われてきたが⁷⁾、土の振動質量を理論的に導入するに至っていないので、本文の各式を適用する。機械の自重 W_m と基礎ブロックの重量 W_b との和を $W_m + W_b = W$ として、これに土の振動質量をも考慮することにすれば、本文のこれまでの図および式をほとんどそのまま適用できる。すなわち固有振動数は

$$\left. \begin{array}{l} \text{上下振動 (図-3)} \quad n_v(m) : \text{式 (1.4)}, \quad \text{水平振動 (図-6)} \quad n_h(m) : \text{式 (1.16)} \\ \text{動揺振動 (図-8)} \quad n_r(m) : \text{式 (1.24)}, \quad \text{連成振動 (図-9)} \quad n_1(m), n_2(m) : \text{式 (2.8)} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5.1)$$

基礎に杭が併用されるときは、

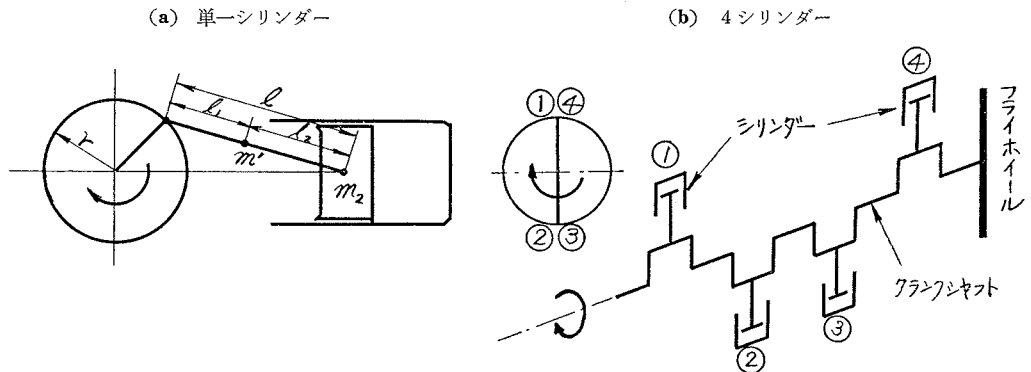
$$\text{上下振動 : 式 (4.4), 水平振動 : 式 (4.8), 動揺振動 : 式 (4.10) \dots \dots \dots (5.2)}$$

つぎに強制振動は機械の強制力さえわかれば、式 (2.3), 式 (2.11) などから定常振巾を算出できる。しかし機械における振動源とその強制力の一部については、すでに数理的に一括明示されている⁸⁾。

(2) Compressor 基礎の一例

4 サイクル直列シリンダー機関をもった Compressor を代表的に選ぶ。図-17(a) に示したクランク機構単一ピストンの往復運動による慣性力 $F_1(t)$ は Fourier 級数から次式で表わされている⁹⁾。

図-17 クランク機構によるピストン作用



$$F_1(t) = m_1 r \omega^2 (\cos \omega t + B_2 \cos 2 \omega t + B_4 \cos 4 \omega t + \dots) \quad \left. \vphantom{F_1(t)} \right\} \dots \dots \dots (5.3)$$

$$\text{ここに, } m_1 = m_2 + m' \frac{L_1}{L}, \quad B_2 = \frac{r}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{L} \right)^3 + \dots, \quad B_4 = \frac{1}{4} \left(\frac{r}{L} \right)^4 + \dots$$

一例としてこのようなシリンダー4個の配置が 図-17(b) のように 180° 方向であるときの慣性不釣りあい力 $F_4(t)$ では, 式 (5.3) の第1項が相殺される。しかも通常第3項以上は無視できる量とされているので,

$$F_4(t) \cong 4 m_1 r \omega^2 B_2 \cos 2 \omega t \dots \dots \dots (5.4)$$

したがって強制力としては, つぎのいわゆる第2次慣性力のみをとればよい。

$$\left. \begin{aligned} \text{上下: } F_{4v}(t) &= 4 m_1 r \omega^2 B_{2v} \cos 2 \omega t \equiv P_{2v} \cos 2 \omega t \\ \text{水平: } F_{4h}(t) &= 4 m_1 r \omega^2 B_{2h} \cos 2 \omega t \equiv P_{2h} \cos 2 \omega t \\ \text{回転: } F_{4r}(t) &= 4 m_1 r \omega^2 B_{2r} \cos 2 \omega t \equiv M_2 \cos 2 \omega t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.5)$$

これより compressor の運転速度 ω における定常振巾は式 (2.2) を参照して,

$$\left. \begin{aligned} A_v(m) &= \frac{g}{W} \frac{P_{2v}}{n_v^2(m)} / B_v(2\omega), \quad A_h(m) = \frac{g}{W} \frac{P_{2h}}{n_h^2(m)} / B_h(2\omega) \\ \phi(m) &= \frac{1}{J} \frac{M_2}{n_r^2(m)} / B_r(2\omega), \quad B(2\omega) : \text{式 (2.2) の } B(m) \text{ で } \omega \rightarrow 2\omega \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.6)$$

基礎杭が並用されているときは, 当然上式中における $n(m)$ の代りに $n(m, p)$ を用いばよい。

つぎに水平と回転の連成定常振巾も同様に, 式 (2.11) で $\omega \rightarrow 2\omega$ とおけばよいので,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_m &= [\{n_h^2(m) - 4\omega^2\} M_{2h} + n_h^2(m) h' P_{2h}] / J_G A(2\omega) \\ Y_m &= g \left[\frac{W h'}{g J_G} n_h^2(m) + \frac{J}{J_G} n_r^2(m) - 4\omega^2 \right] P_{2h} + \frac{W h'}{g J_G} n_h^2(m) M_2 \Big/ W A(2\omega) \\ \text{ここに, } A(2\omega) &= \{4\omega^2 - n_1^2(m)\} \{4\omega^2 - n_2^2(m)\}, \\ M_{2h} &= i P_{2h} \pm M_2, \quad i : \text{図-18(b) 参照} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.7)$$

(3) 数値計算適用例

米国の Tidewater Oil Company が Avon, California に 1959 年末に数基の Compressor を新設するに当って, それらの基礎の設計と同時に同所に既設の Air compressor 基礎の振動調査とが Dames & Moore (Soil Mechanics Engineers at San Francisco) に依頼された。著者は 1958.9.—1959.9. の滞米中における数箇月間この事務所の Consultant Engineer として, これらの機械基礎に本文に掲げてきた理論式を適用して, 具体的な数値計算を行なったので, その要点をここに掲げる。

(1) 計算資料* a) Compressor : Avon の Poly Plant (Gas Plant No. 3) に既設されている 300 HP, 8XVG 4-cylinder 型の Air compressor, 製作者の Ingersoll Rand Company による提供資料により, $W_m = 22.6 \text{ ton}$, $P_{2v} = 1.36 \text{ ton}$, $P_{2h} = 3.53 \text{ ton}$, $M_2 = 0.387 \text{ ton} \cdot \text{m}$, $\omega = 36.6 \text{ rad/sec}$ ($= 350 \text{ r.p.m.}$)。 b) Concrete base : 図-18 を参照して, $c = 396 \text{ cm}$, $b = 427 \text{ cm}$, $a = b \times c = 16.9 \times 10^4 \text{ cm}^2$, $W_b = 48.3 \text{ ton}$ 。 c) Compressor と Concrete base : $W = W_m + W_b = 70.9 \text{ ton}$, $J = 160.8 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^2$, $J_G = 67.5 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{cm} \cdot \text{sec}^2$, $h' = 113 \text{ cm}$, $i = 72 \text{ cm}$, $j = 185 \text{ cm}$ (図-18 参照)。 d) 基礎の土 : 湿潤密度 $w = 1.97 \text{ ton/m}^3$ (実測), 縦波伝播速度 $v_l = 396 \text{ m/sec}$ (実測), ポアソン比 $\mu = 0.4$ と推定して, $E = v_l^2 w (1-2\mu) (1+\mu) / g (1-\mu) = 1460 \text{ kg/cm}^2$, $G = E / 2(1+\mu) = 540 \text{ kg/cm}^2$, $K_v = 3\pi w (1-2\mu) v_l^2 / \{16 r g (1-\mu)^2\}^{10} = 4.5 \text{ kg/cm}^3$, ただし $\pi r^2 = a = 16.9 \times 10^4 \text{ cm}^2$ より $r = 232 \text{ cm}$, $K_h = 4 K_v / 5^{11} = 3.6 \text{ kg/cm}^3$, 等価粘性減衰比 $\nu_v \cong \nu_h \cong \nu_r = 0.1$ と推定¹²⁾。

(2) 基礎杭のない場合 図-18 に示した既設の Compressor に対して (1) の資料を用いて計算した結果を表-1 と表-2 に一括した。表-1 より \bar{W}/W , $\bar{J}/J \cong 25 \sim 40\%$, $n(m)/n(0) \cong 85 \sim 90\%$ となっているが連成振動では $n(m)/n(0)$ の範囲がこれより広まっていることがわかる。

(3) 基礎杭のある場合 新設が計画されたのは 図-18 の近くである。図-19 に示したような組杭数組を使用する場合を計算して表-3 の結果をえた。同表上欄の記号は ① : 基礎杭なし, ② : H形鋼製組杭 12 in—53 lb/ft を 3 組, ③ : 同上同寸法を 4 組, ④ : 同上 14 in—73 lb/ft を 3 組, ⑤ : 同上 14 in—89 lb/ft を 3 組, ⑥ : 8 角形断面 PC 組杭 (14 in) を 3 組, などをそれぞれ使用した場合を表わしている (図-19(a) は 3 組)。表-3 からバネ係数 k は当然杭の大きさに応じて増大し, 振動数 n は式 (4.4), (4.8), (4.10) から \sqrt{k} に比例する傾向にあることを明示している。また 図-19 のような組杭の振動性状におよぼす影響は動揺振動で最大, 続いて上下振動で大きく, 水平振動ではこれよりは少ないということが確認できる。

* 単位はすべて kg, cm, sec 系に換算した。

図-18 計算した Compressor 基礎

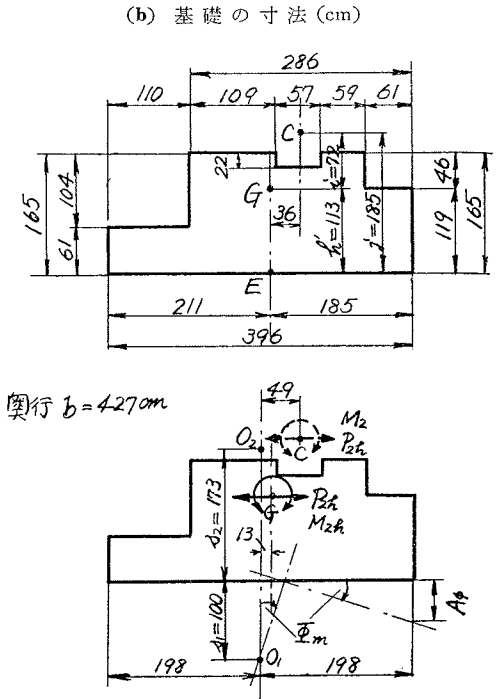
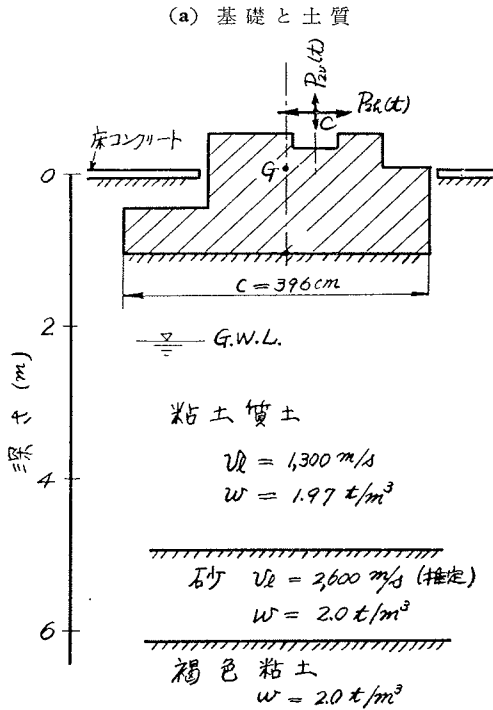


表-1 Compressor 基礎各振動の計算値と測定値

	水平 (h)	上下 (v)	動揺 (r)
d (m)	1.52	3.26	3.26
$n(m)$ (rpm)	766	828	652
$A(m), \phi(m)$	0.304(mm)	0.076(mm)	3.11×10^{-4}
$n(0)$ (rpm)	868	980	750
$A(0), \phi(0)$	0.153(mm)	0.035(mm)	3.14×10^{-4}
$n(m)/n(0)$ (%)	88.3	84.5	86.9
$\bar{W} g $ (%)	27.7	40.0	32.8
振動巾	0.127 0.152	0.063	
測定値	$\lambda^* \quad \lambda^{**}$	λ^*	—
A' (mm)	0.254 0.305	0.076	

* 振動計 ※ ダイアルゲージ

表-2 Compressor 基礎連成振動の計算値

(a)

		1 次 (1)	2 次 (2)
土の振動質量 考慮: $\bar{W} g \neq 0$	$n(m)$ (rpm)	555	1108
	s (cm)	100	-173
同上考慮せず $\bar{W} g = 0$	$n(0)$ (rpm)	605	1660
	s (cm)	107	-156
振動数比	$n(m)/n(0)$ (%)	91.7	66.8

(b)

iP_{2h}, M_2 間の位相	0	$\pi/2$	π	
M_{2h} (ton m)	3.06	2.68	2.29	
$\bar{W} g \neq 0$	$ Y_m $ (mm)	0.642	0.618	0.592
	$ \phi_m $ (10^{-4})	2.67	2.62	2.59
	$ A_\phi $ (mm)	0.529	0.519	0.514
$\bar{W} g = 0$	$ Y_m $ (mm)	0.424	0.409	0.392
	$ \phi_m $ (10^{-4})	1.84	1.79	1.74
	$ A_\phi $ (mm)	0.364	0.354	0.344

s, ϕ_m, A_ϕ は 図-18(b) 下側図参照

図-19 計算した Compressor 基礎 (杭を有する場合)

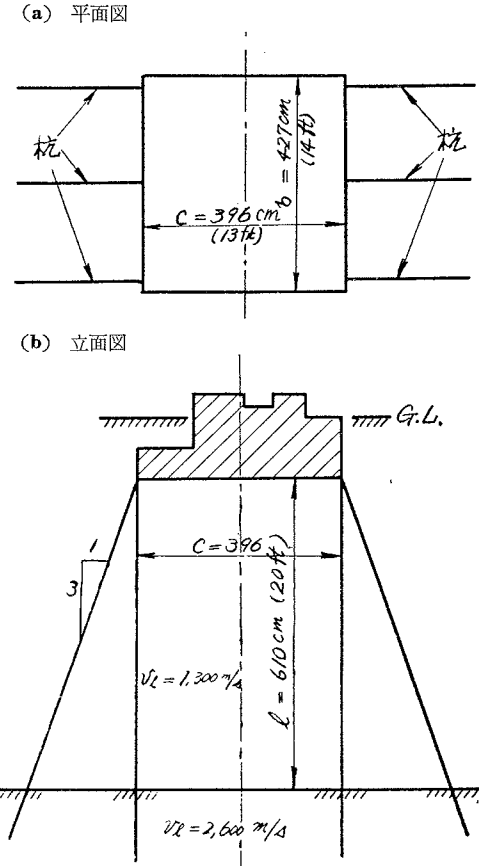


表-3 Compressor 基礎各振動の計算値
(杭打基礎を有する場合)

基礎杭		なし	鋼製 H 形杭				PC杭
記号		①	②	③	④	⑤	
水平振動 (h)	$k(o, p)$ (10^5 kg/m)	695	788	852	860	919	898
	$n(m)$ (cpm)	766	883	917	921	954	942
	$A(m)$ (10^{-2} mm)	30.40	13.47	11.79	11.57	10.17	10.39
	$n(0)$ (cpm)	868	997	1037	1041	1078	1064
	$A(0)$ (10^{-2} mm)	15.27	8.49	7.42	7.29	6.54	6.71
	上下振動 (v)	$k(o, p)$ (10^5 kg/m)	760	2617	3228	3020	3341
$n(m)$ (cpm)		828	1539	1706	1650	1735	1441
$A(m)$ (10^{-2} mm)		7.57	0.92	0.71	0.77	0.68	1.08
$n(0)$ (cpm)		980	1820	2020	1952	2057	1707
$A(0)$ (10^{-2} mm)		3.53	0.61	0.48	0.52	0.46	0.71
動揺振動 (r)		$k(o, p)$ (10^5 kg/m)	994	8310	10730	9910	11170
	$n(m)$ (cpm)	651	1885	2142	2060	2190	1738
	$\phi(m)$ (10^{-5})	33.92	1.40	1.05	1.15	1.00	1.70
	$n(0)$ (cpm)	750	2170	2464	2370	2520	2003
	$\phi(0)$ (10^{-5})	34.20	1.02	0.77	0.84	0.73	1.22

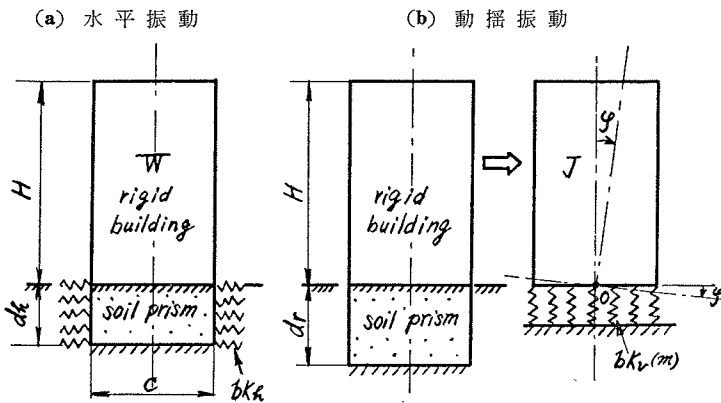
(4) 振動測定値との比較 上の(2)で計算した Compressor の振動調査が 1959 年 6 月下旬に行なわれ、常用運転速度 350 r.p.m. において表-1 の最下欄に記入した振巾 A' が測定された¹³⁾。すなわち水平振動では測定値 A_h' が丁度計算値 $A_h(m)$ と $A_h(0)$ の間に分布しており、上下振動では測定値 A_v' が計算値 $A_v(m)$ とかなりよく一致している。しかも 2 次慣性力振動数 $350 \times 2 = 700$ r.p.m. までの間には共振点がなかったので、700 r.p.m. 以上である表-1 の固有振動数計算値 $n_h(m)$ 、 $n_v(m)$ の値もおおむね実状とかけ離れていないことと推察される。しかし連成振動として計算した表-2 の Y_m は減衰を計算に入れていないので、上記の測定値 A_h' よりも大となった。一般に定常振巾は固有振動数以上に多くの要素に支配されるので、上に述べたように計算・測定の間振巾がかなりよく対応していることは、理論式の妥当性を一応立証しているものとして注目される。

7. 建築物への適用

(1) 剛な建物と均等な弾性建物

建物を弾性地盤上にある剛体と仮定できる場合は、本文の 2., 3. における各式がそのまま適用され、図-20(a)

図-20 剛建物の振動



の水平振動は 図-6 に、図-20 (b) の動揺振動は 図-8 にそのまま対応し、しかも等価であるので、
 水平振動 $n_h(m)$: 式 (1.16), 動揺振動 $n_r(m)$: 式 (1.24), } (6.1)
 定常振巾 $A_h(m)$, $\phi(m)$: 式 (2.3)

水平と動揺の連成振動は 図-9 に相当するので、
 固有振動数 $n_1(m)$, $n_2(m)$: 式 (2.8), } (6.2)
 定常振巾 Y_m , ϕ_m : 式 (2.11)

つぎに建物を均等な一様体と仮定できるときは、4. の各式がそのまま適用でき、建物が低層で偏平なときは 図-12 のせん断振動、建物が高層で細長いときは 図-13 の曲げ動揺振動とみなせる。したがってこの場合の振動数方程式と正規関数は次式となる。

水平せん断振動 (図-12) : 式 (3.5), 式 (3.6) } (6.3)
 曲げ動揺振動 (図-13) : 式 (3.9), 式 (3.10)

(2) 低層の弾性建物

(1) 1 階建物のせん断振動 鉄筋・鉄骨コンクリートの低層建物では床荷重 W_f と壁荷重 W_w とに分け

て考えるのが実状に近い。したがって1階建物の場合には 図-21 のように、 W_f を載荷した構造体が soil prism に支持されているという2区間のせん断振動となる。これは 図-12 に W_f を加えることになるので、

図-21 1階建物のせん断振動

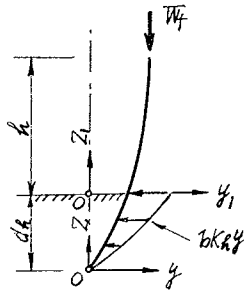
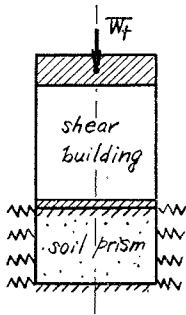
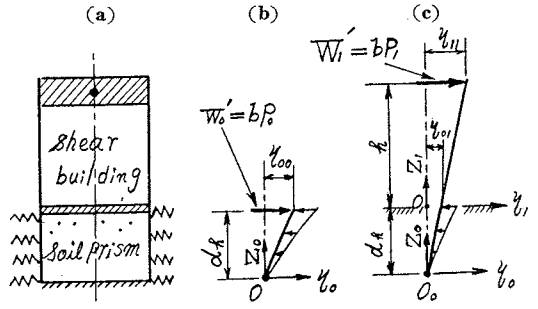


図-22 1階建物のせん断振動の近似計算



W_f による境界条件として、

$$\left(S_1 = -\frac{W_f}{g} \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} \right)_{z_1=h} \therefore k_1' a_1 G_1 \frac{dY_1}{dZ_1} = \frac{W_f}{g} n^2 Y_1$$

を用いればよい。これより式 (3.5) に対応してつぎの振動数方程式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} bK_h > \omega n^2 / g : D_1(n) \{ D_1(n) \sinh \beta_1 h + W_f / g \cdot n^2 \cosh \beta_1 h \} \\ \quad - D(n) \coth \beta d_h \{ D_1(n) \cosh \beta_1 h - W_f / g \cdot n^2 \sinh \beta_1 h \} = 0 \\ bK_h < \omega n^2 / g : D_1(n) \{ D_1(n) \sin \beta_1 h + W_f / g \cdot n^2 \cos \beta_1 h \} \\ \quad - D'(n) \cot \beta' d_h \{ D_1(n) \cos \beta_1 h - W_f / g \cdot n^2 \sin \beta_1 h \} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.4)$$

ここに、 $D_1(n) = k_1' a_1 G_1 \beta_1$, $D(n) = k' a G \beta$, $D'(n) = k' a G \beta'$, $\beta_1, \beta, \beta' : (3.5)$

(2) 低層建物せん断振動の近似計算 土の振動質量を考慮すると、上述のように1階の場合でも比較的複雑な式 (6.4) を計算しなければならないので、Rayleigh 法による近似計算を考える。図-22(b) で仮想水平荷重 $W_0' = bP_0$ を頂部にうける soil prism のせん断変位 η_0 と荷重作用点における η_0 の値 η_{00} とは、図-6(c) に対する式 (1.8) で $x \rightarrow z_0$, $W' \rightarrow bP_0$ とおけばよい。

また 図-22(c) のように建物頂部に $W_1' = bP_1$ をうける場合、地盤面の η_{01} と建物頂部の η_{11} とは、せん断変位に関する境界条件と接続条件とを用い、かつ建物区間では η_1 が直線であることから、

$$\left. \begin{aligned} \eta_{01} &= \tanh r d_h \cdot bP_1 / (k' a G r) \\ \eta_{11} &= \{ \tanh r d_h / (k' a G r) + h / (k_1' a_1 G_1) \} bP_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.5)$$

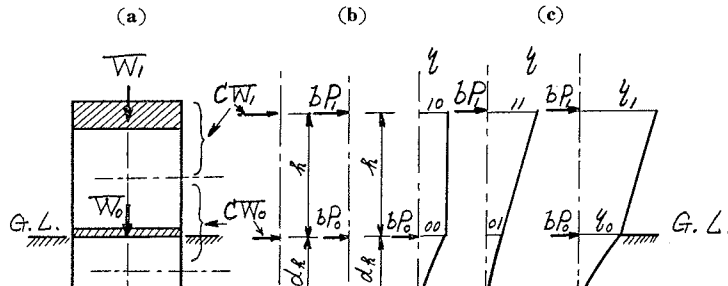
ここに、 r : 式 (1.7), d_h : 式 (1.10)

つぎに 図-23(a) で W_1 は屋床荷重と壁荷重の上半を加えたもの、 W_0 は壁荷重の下半と地上床荷重および soil prism 荷重の上半を加えたもの、をそれぞれ表す。いま $bP_0 / bP_1 = CW_0 / CW_1$ なる2個の水平荷重 bP_0 , bP_1 によるせん断変位 η_0 と η_1 を式 (6.5) を参照しながら、図-23(c) のように計算すると、

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= \eta_{00} + \eta_{01} = \tanh r d_h \cdot (f_0 + 1) bP_1 / (k' a G r) \equiv \eta_0' \cdot bP_1 \\ \eta_1 &= \eta_{10} + \eta_{11} = \{ \tanh r d_h \cdot (f_0 + 2) / (k' a G r) + h / (k_1' a_1 G_1) \} bP_1 \equiv \eta_1' \cdot bP_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6.6)$$

ここに、 $f_0 = bP_0 / bP_1 = CW_0 / CW_1 = W_0 / W_1$

図-23 2階建物せん断振動の近似計算

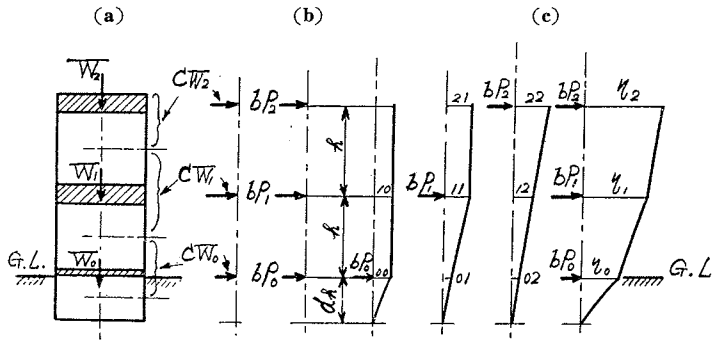


これより運動・位置の両エネルギーが求まるので、この1階建物せん断振動の固有周期 $T_{1s}(m)$ は次式で与えられる。

$$T_{1s}(m) = 2\pi \sqrt{(W_0 \eta_0'^2 + W_1 \eta_1'^2) / g (f_0 \eta_0' + \eta_1')} \dots\dots\dots (6.7)$$

また2階建物の場合は 図-24 を参照して、全く同様の計算を進めて、

図-24 3階建物せん断振動の近似計算



$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= \eta_{00} + \eta_{01} + \eta_{02} = \tanh r d_h \cdot (f_0 + 1 + f_1) b P_1 / (k' a G r) \equiv \eta_0' \cdot b P_1 \\ \eta_1 &= \eta_{10} + \eta_{11} + \eta_{12} = \{ \eta_0' + f_1 h / (k_1' a_1 G_1) \} b P_1 \equiv \eta_1' \cdot b P_1 \\ \eta_2 &= \eta_{20} + \eta_{21} + \eta_{22} = \{ \eta_0' + (1 + 2 f_1) h / (k_1' a_1 G_1) \} b P_1 \equiv \eta_2' \cdot b P_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6.8)$$

ここに、 $f_0 = W_0 / W_1$, $f_1 = W_2 / W_1$

これより

$$T_{2s}(m) = 2\pi \sqrt{(W_0 \eta_0'^2 + W_1 \eta_1'^2 + W_2 \eta_2'^2) / g (f_0 \eta_0' + \eta_1' + f_1 \eta_2')} \dots\dots\dots (6.9)$$

3階以上の建物に対しても同様の計算を進めればよく、また土の振動質量を考慮しないときは式(6.7)、式(6.9)などで $W_0 \rightarrow 0$ または $\eta_0' \rightarrow 0$ とおけばよい。

(3) 固有周期の近似的合成 一般に建物の水平変位 η は剛体としての水平変位 η_h と回転変位 η_r および弾性体としてのたわみ変位 η_f などからなるが、低層建物では $\eta_f \equiv \eta_s$: せん断変位とみなせるので、 $\eta = \eta_h + \eta_r + \eta_s$ より Rayleigh 法によって固有周期 T を算出すればよい。また一方 Southwell-Dunkerley の近似法¹⁴⁾ を用いれば、 $T^2 \equiv \sum T_i^2$ から直接 T を合成することができる。すなわちこの場合には 図-20 に対する式(6.1)などより、

$$T_1(m) \equiv \sqrt{T_{1h}^2(m) + T_{1r}^2(m) + T_{1s}^2(m)}, \quad T_2(m) \equiv \sqrt{T_{2h}^2(m) + T_{2r}^2(m) + T_{2s}^2(m)} \dots\dots\dots (6.10)$$

と書ける。ただし $T_s(m)$ は式(6.7)、式(6.9)のように与えられ、 $T_h(m)$ 、 $T_r(m)$ はそれぞれ式(1.16)、式(1.24)を満足する n から $T = 2\pi/n$ として求めればよいことはいうまでもない。

(3) 数値計算適用例

6.(3) の数値計算と相前後して、著者が John A. Blume & Associates (Engineers at San Francisco) において、本節の各式を新設中の School building に適用して計算した結果の要点はつぎのとおりである。米国においても School building はほとんど例外なく 図-25、図-26 に示すように、1階もしくは2階建であるので、本文の理論式を適用することはかなり有意義である。

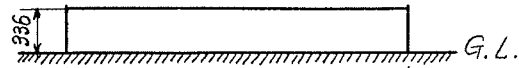
(1) 1階建の School building 図-25 に略図を示した Kindergarten Building in Blackford School (at Campbell, California) を対象にとり、せん断振動では便宜上 工型の横断面に換算した。

a) 横方向 : $h = 3.36$ m, $b = 26.8$ m, $c = 13.6$ m, $W_1 = 78.0$ ton, $J = 8.91 \times 10^4$ kg·m·sec², $a_1 = 12.8$ m², $G_1 = 0.4 \times E_1 = 3.37 \times 10^4$ kg/cm² (concrete block), $k_1' = 0.545$. b) 縦方向 : $b = 13.6$ m, $c = 26.8$ m, $k_1' = 0.380$, 他は a) と共通. c) 基礎の土 : $w = 1.60$ ton/m³, $v_s = 610$ m/sec かつ $\mu = 0.4$ より $E = 2830$ kg/cm², $G = 1010$ kg/cm², $K_v \equiv K_h = 10.7$ kg/cm², したがって $d_h = 0.64$ m .•. $W_0 = 208$ ton.

これらの資料を本節の各式に代入して、固有周期その他を算出した結果を 表-4(a) に示し、また合成周期と

図-25 計算した1階建物の略図 (単位: cm)

(a) 立面図



(b) 平面図

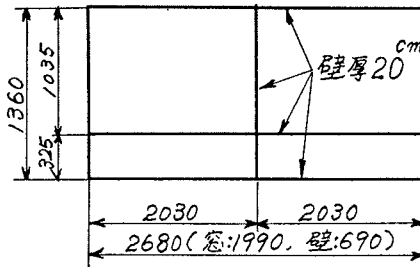
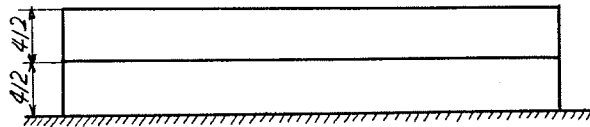


図-26 計算した2階建物の略図 (単位: cm)

(a) 立面図



(b) 平面図

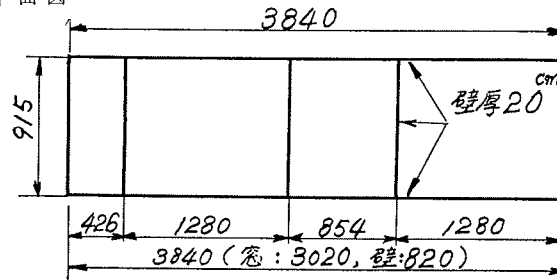


表-4 建物各振動の計算値

(a) 1階建物

	横 方 向			縦 方 向		
	水 平 (h)	動 揺 (r)	せん断 (s)	水 平 (h)	動 揺 (r)	せん断 (s)
d (m)	0.64	2.64	0.64	0.64	2.64	0.64
$T_1(m)$ (10^{-2} sec)	1.49	0.87	2.38	1.49	0.51	2.64
$T_1(0)$ (10^{-2} sec)	0.89	0.77	2.14	0.89	0.39	2.54
$T_1(m)/T_1(0)$ (%)	167.4	113.0	111.1	167.4	130.8	103.9
$n_1(m)/n_1(0)$ (%)	59.8	88.5	90.0	59.8	76.5	96.3
$\bar{W}/\bar{W}, \bar{J}/\bar{J}$ (%)	178.8	31.9	23.5	178.8	175.4	8.1

(b) 2階建物

	横 方 向			縦 方 向		
	水 平 (h)	動 揺 (r)	せん断 (s)	水 平 (h)	動 揺 (r)	せん断 (s)
d (m)	0.75	3.05	0.75	0.75	3.05	0.75
$T_2(m)$ (10^{-2} sec)	2.68	6.25	7.88	2.68	2.67	11.57
$T_2(0)$ (10^{-2} sec)	2.45	5.85	6.65	2.45	1.39	10.72
$T_2(m)/T_2(0)$ (%)	109.3	106.9	118.4	109.3	192.0	107.8
$n_2(m)/n_2(0)$ (%)	91.5	93.6	84.5	91.5	52.1	92.8
$\bar{W}/\bar{W}, \bar{J}/\bar{J}$ (%)	19.6	14.1	40.3	18.5	268.0	15.7

(2) 2階建の School building 図-26 に略図を示した Science Building for Modesto Junior College (at Modesto, California) を対象とした。

a) 横方向: $2h=2 \times 4.12 \text{ m}$, $b=38.4 \text{ m}$, $c=9.15 \text{ m}$, $W_1=469 \text{ ton}$, $W_2=375 \text{ ton}$, $J=340 \times 10^4 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{sec}^2$, $a_1=13.7 \text{ m}^2$, $G_1=0.4 E_1=4.74 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ (concrete と brick との合成壁), $k_1'=0.601$. b) 縦方向: $b=9.15 \text{ m}$, $c=38.4 \text{ m}$, $k_1'=0.290$, 他は a) と共通。c) 基礎の土: $w=1.76 \text{ ton/m}^3$, $v_l=760 \text{ m/sec}$, $\mu=0.4$ より $E=4880 \text{ kg/cm}^2$, $G=1740 \text{ kg/cm}^2$, $K_v \cong K_h=16.0 \text{ kg/cm}^3$, したがって $d_h=0.75 \text{ m}$. $W_0=324 \text{ ton}$.

これらの資料を用いて土の振動質量を考慮した場合の各固有周期 $T(m)$, これを考慮しない場合の $T(0)$, その他を計算した結果を表-4(b) と表-5(b) に一括した。

表-5 建物各振動周期と合成周期との比較

(a) 1階建物

	横 方 向				縦 方 向			
	合 成	水 平 (h)	動 揺 (r)	せん断 (s)	合 成	水 平 (h)	動 揺 (r)	せん断 (s)
$T_1(m)$ (10^{-2} sec)	2.94	1.49	0.87	2.38	3.06	1.49	0.51	2.64
比 (%)	100	50.7	29.6	81.0	100	48.7	16.7	86.3
$T_1(0)$ (10^{-2} sec)	2.44	0.89	0.77	2.14	2.72	0.89	0.39	2.54
比 (%)	100	36.5	31.6	87.8	100	32.8	14.4	93.5
$T_1(m)/T_1(0)$ (%)	120.4	167.4	113.0	111.1	112.4	167.4	130.8	103.9
$n_1(m)/n_1(0)$ (%)	83.1	59.8	88.5	90.0	89.0	59.8	76.5	96.3

(b) 2階建物

	横 方 向				縦 方 向			
	合 成	水 平 (h)	動 揺 (r)	せん断 (s)	合 成	水 平 (h)	動 揺 (r)	せん断 (s)
$T_2(m)$ (10^{-2} sec)	10.36	2.68	6.25	7.88	12.18	2.68	2.67	11.57
比 (%)	100	25.9	60.4	76.1	100	22.0	21.9	94.9
$T_2(0)$ (10^{-2} sec)	9.19	2.45	5.85	6.65	11.09	2.45	1.39	10.72
比 (%)	100	26.7	63.6	72.4	100	22.1	12.6	96.9
$T_2(m)/T_2(0)$ (%)	112.8	109.3	106.9	118.4	109.8	109.3	192.0	107.8
$n_2(m)/n_2(0)$ (%)	88.8	91.5	93.6	84.5	91.5	91.2	52.1	92.8

(3) 計算結果 表-4 で水平およびせん断振動のための soil prism の等価深さ d_h は, building のような場合にはその巾 b と c に比較して, かなり小さい値となっていることが目立つ。また振動数の低下割合は $n(m)/n(0) \cong 55 \sim 95\%$ の広範囲におよび, かつ \bar{W}/W または \bar{J}/J が 100% を越えることも少なくない。つぎに表-5 では結局 図-25, 図-26 のように偏平な低層建物ではせん断振動の影響が大きいたことが明示されている。しかし合成振動数においては $n(m)/n(0)$ の値が 83~91% と, その範囲が上記の 55~95% より大巾に縮小されていることが注目される。これらの建物は新設中のため, その固有周期測定値はえられなかったが, 他の類似の既設建物の測定値を参照すると, 表-5 の合成周期 $T_1(m)$, $T_2(m)$ がほぼ測定値に対応するようである。

8. 本理論の考察と結言

(1) 本文における結論

本文では結局静的な地表面の変位が等価的であるような soil prism を考えて, これに支持された建造物の振動を解析して, いわゆる土の振動質量を工学的に理論式に導入することができた。すなわちこのような prism を弾性振動の1区間とみなして, 上下振動ではその縦振動, 水平振動ではそのせん断横振動を建造物と連成させて演算すればよいことがわかり, これより土の振動質量がおよぼす影響を数量的に明らかにした。定性的な傾向まで数値計算するには至らなかったが, いずれにしても線型の範囲を対象としたので,

$$\frac{n(m)}{n(0)} = \sqrt{\frac{kg}{W + \bar{W}} \frac{\bar{W}}{kg}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \bar{W}/W}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \bar{M}/M}} < 1.0$$

より仮想振動質量 $\bar{M} = \bar{W}/g$ を概算できる。しかし $n(m)/n(0)$ の値はもちろん計算資料に支配されるが, 50~90% 程度で 80% 前後のことが多からうと思われる。また基礎杭が並用される場合にも理論式を近似的に

拡張できたこと、および 6.(3) の計算結果が測定値とかなりよく相接近したこと、などの意義は實際上少なくともいことと考えられる。

(2) 本理論の検討と今後の研究

構造物と地盤との動的な関連性は複雑であるので、本文の理論が十分合理的であるとは限らない。しかしたとえば 図-5, 図-7 にみたように soil prism の周辺に拘束力を考慮すると, prism 自身は強まり振動的にはそれだけ剛になるが、一方必然的に等価深さ d が増大するので、土の振動質量 \bar{W}/g は本文の場合と大差ない結果になるかと推察される。また構造物の基礎面を代表的に矩形としたが、円形その他の場合にもただちに修正適用できる¹⁵⁾。さらにここでは基本振動数のみに注目したが、それぞれの振動数方程式を計算することによって、高次振動数も求まるはずである。

今後上下方向の soil prism については、半無限弾性体上の分布荷重による沈下を採用し、prism の深さ方向の形状を改良し、また非線型の問題としての研究も進めたいと考えている。本文の理論は各種の土木構造物にもほとんどそのまま適用できるが、著者はこれを橋脚の振動と軌道の動力学的な問題に具体的に進展させると同時に、室内実験的な研究をも進めつつある。

本文は 1958 年 8 月末渡米前にもっていた基礎的な概念を、1 年間の滞米中に具体化する機会に恵まれたのでそれらの成果をここに取りまとめたことを重ねて付記する。

参考文献その他

- 1) 第 15 回土木学会年次講演会でその概要を発表, 昭.35.5.28.
- 2) G.P. Tschebotarioff 原著, 石井靖丸訳: 土質工学, 下巻, p. 274, 昭.33.
- 3) B.П. Bnkche (原著露文): 弾性と質量をもつ基礎におかれたハリの振動について, ラトビヤソビエツト社会共和国科学院出版所: 動力学および動力学耐久性の諸問題, 論文集, 第 2 冊, pp. 143-159, 1954.
- 4) Isao Toriumi: Vibrations in Foundations of Machines, Technology Reports of the Osaka University, Japan, Vol. 5, Nos. 135-162, pp. 103-126, March, 1955. Isao Toriumi, Yasuo Sato, and Rinzo Yamaguchi: Vibrations in Its Vicinity on the Elastic Ground, The 2nd World Conference on Earthquake Engineering, No. 98, Part I, July, 1960.
- 5) B.П. Bnkche 氏はこれより動的なバネ係数 $k(m)$ に注目しているが、著者は直接振動数 $n(m)$ を求める。
- 6) たとえば, 松平 精: 基礎振動学, p. 132, 昭.32.
- 7) 松平 精: 機械の基礎と防振支持, 日本機械学会編, 機械振動とその対策, pp. 121-142, 昭.29.5., その他。
- 8) 上掲 7), pp. 134-136.
- 9) W.K. Newcomb: Principles of Foundation Design for Engines and Compressors, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Vol. 73, pp. 307-318, April, 1951. および上掲 3), pp. 134-136.
- 10) 小西一郎・後藤尚男: 橋梁橋脚の震害に関する動力学的考察, 土木学会論文集, 第 6 号, pp. 58-70, 式 (35), 昭.26.8.
- 11) 上掲 7), p. 124 欄外より。
- 12) 基礎地盤の対数減衰率の測定値は $\delta=0.3\sim 1.3$ が多いことから $\nu\cong\delta/2$ $\pi\cong 0.1$ と推定。
- 13) Dames & Moore: Foundation Design for Vibratory Machinery Employing Measured Soil Properties, Report of Research, D.W.O. # 140, August, 1959.
- 14) Lydik S. Jacobsen and Robert S. Ayre: Engineering Vibrations, pp. 115-120, 1958.
- 15) 矩形基礎の有効接触楕円体については上記 14) の pp. 111-112 に言及されており、円形基礎の場合は上掲 4) および下記に詳論されている, Yasuo Sato and Rinzo Yamaguchi: Vibration of a Building upon the Elastic Foundation, Bulletin of the Earthquake Research Institute, University of Tokyo, Japan, Vol. 35, pp. 545-565, 1957.

付記 6.(3) および 7.(3) の数値計算適用例全般にわたって数値に端数が多いのは, lb, ft 系をすべて kg, cm 系に換算したためである。

(原稿受付: 1960.4.7)

昭和 36 年 2 月 20 日 印刷

昭和 36 年 2 月 25 日 発行

土木学会論文集第72号・別冊(3-2)

定価 120 円 (〒10 円)

著者 京都市左京区吉田 京都大学工学部 後藤尚男
 発行者 東京都新宿区四谷一丁目 社団法人土木学会 末森猛雄
 印刷者 東京都港区赤坂溜池 5 番地 株式会社技報堂 大沼正吉

発行所 社団法人土木学会 振替東京 16828 番

東京都新宿区四谷一丁目 電話 (351) 5138・5139・5130