

# 三径間対称連続桁の最小重量設計について

正員 倉田 宗 章\*

## DESIGN OF MINIMUM WEIGHT, 3-SPAN, CONTINUOUS BEAM HAVING SYMMETRICAL SPACING OF SPANS

By Dr. Eng Muneaki Kurata, C.E. Member

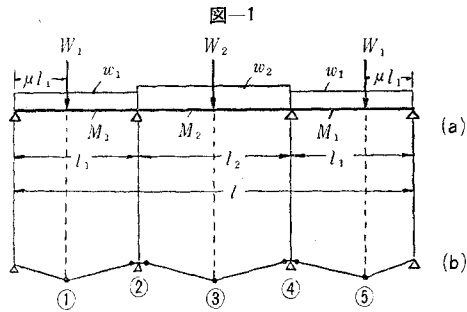
**Synopsis:** The study of plastic design has recently become popular and especially in England and America many studies are published. However, generally speaking, most of those studies deal with the building construction under a static load.

The present paper, discusses the design of minimum weight 3-span continuous beam, having a symmetrical spacing of spans, which is most frequently used, and it also examines the case when the bridge is acted upon simultaneously by a uniformly distributed load and a concentrated load as in practice of design.

**要旨** 最近塑性設計の研究がさかんとり特に英米においては数多くの発表がなされている。しかし概して静荷重を受ける建築構造のごときものを対象としている場合が多いようである。本文では最も用いられる機会の多い対称スパン割をもつ三径間連続ばりにつき最小重量設計を論じ、さらに橋梁荷重のごとく等分布荷重と一つの動き得る集中荷重を受ける場合についての検討を行ったものである。

### 1. 与えられたスパン割に対する最小重量設計

考える連続ばりはスパンごとに一定断面とし下記のごとく記号を定める (図-1 (a))。

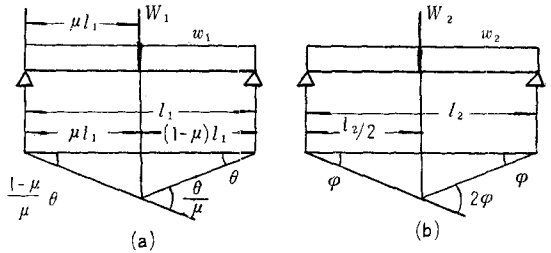


$W_1, W_2$ ; 側径間および中央径間における集中荷重  
 $w_1, w_2$ ; 同じく分布荷重  
 $M_1, M_2$ ; 同じくはりの全塑性モーメント

さて構造の対称性により中央径間では明らかに集中荷重が中央にのる場合が真の崩壊形式に対応するか側径間では異なるから  $W_1$  の位置を図示のごとくはり端より  $\mu l_1$  の距離にあるものとする。連続ばりの独立な崩壊形式は各はりごとこのいわゆる Beam type の崩壊形式以外にあり得ないから連続ばり全体として最も自由度の多い Over complete な崩壊形式は 図-1 (b) に示すごとき

ものとなる。すなわち中間支点において両側に塑性ヒンジのできる場合である。かかる崩壊形式について仮想仕事式を作ろう。荷重のなす仕事は 図-2 を参照して

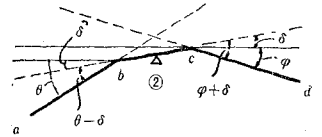
図-2



側径間においては  $W_1$  の仕事 =  $(1-\mu)l_1 W_1 \theta$   
 $w_1$  の仕事 =  $(1/2)(1-\mu)l_1^2 w_1 \theta$   
 中央径間においては  $W_2$  の仕事 =  $(1/2)l_2 W_2 \phi$   
 $w_2$  の仕事 =  $(1/4)l_2^2 w_2 \phi$

次に塑性ヒンジにおける全塑性モーメントによる内部仕事を計算するため中間支点両側のヒンジによる部材回転角に 図-3 のごとく記号をつける。すると側径間

図-3



における  $M_1$  の仕事はスパンモーメントによるヒンジの回転角が  $\frac{\theta}{\mu}$  (図-2 (a) 参照), 支点モーメントによるヒンジの回転角が  $\theta-\delta$  (図-3 参照) であるから

$$M_1 \left\{ \frac{\theta}{\mu} + (\theta-\delta) \right\}$$

中央径間では同様に 図-2 (b) および 図-3 を参照して  $M_2 \{ 2\phi + 2(\phi+\delta) \}$

と書ける。さて左右両側径間は全く同じ崩壊形式とならずだから片方のみについて考え 2 倍すればよい。図-

\* 工学博士 大阪市立大学教授

1 (b) に示すとき崩壊機構につき内働外働を等置すると

$$2(1-\mu)l_1\left(W_1+\frac{l_1w_1}{2}\right)\theta+\frac{l_2}{2}\left(W_2+\frac{l_2w_2}{2}\right)\varphi = 2\left\{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\theta-\delta\right\}M_1+2\left\{2\varphi+\delta\right\}M_2 \dots\dots(1)$$

なる仕事式を得る。ところで Foulkes, J. の与えた定理によれば  $n$  種類の全塑性モーメントをもつとき構造物は  $n$  個の自由度の崩壊機構をもつ最小重量設計が少なくとも一つ存在する。今の場合全塑性モーメントは  $M_1$  と  $M_2$  の二種類であるから自由度 2 の機構を考えよう。

1. (1) 式において  $\varphi=0$  とおけば

$$2(1-\mu)l_1\left(W_1+\frac{l_1w_1}{2}\right)\theta = 2\left\{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\theta-\delta\right\}M_1+2\delta M_2 \dots\dots(2)$$

これは側径間みの崩壊に対するもので中間支点においてヒンジ回転角  $\delta$  および  $\theta-\delta$  の 2 つの自由度をもつ機構に対するものである。ゆえに (2) 式が  $\theta, \delta$  のいかんにかかわらず成立するためには (2) 式において

$\delta=0$  とおけば

$$M_1 = \frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu}l_1\left(W_1+\frac{l_1w_1}{2}\right)$$

$\theta-\delta=0$  とおけば

$$(1-\mu)l_1\left(W_1+\frac{l_1w_1}{2}\right) = \frac{1}{\mu}M_1+M_2$$

これより  $M_2=M_1$ , すなわち (3) により 1 組の全塑性モーメントが定まった。さらに Foulkes によれば (2) 式が対応する機構がいわゆる weight compatible mechanism であり、かつ静的許容でどこでも全塑性モーメントを超えない安全な曲げモーメント分布の存在が確かめられれば、(3) は最小重量設計である。ところでこの連続ばりの線形化した重量関数を  $X$  とすれば、

$$X=2l_1M_1+l_2M_2 \dots\dots(4)$$

と書ける、ゆえにこの場合の weight compatibility の条件は (2), (4) の係数を比較して

$$\frac{\left(1+\frac{1}{\mu}\right)\theta-\delta}{l_1} = \frac{2\delta}{l_2}$$

これより

$$\frac{1+\mu}{\mu}k\theta=(2+k)\delta \quad \text{ただし } \frac{l_2}{l_1}=k$$

全塑性モーメントとヒンジの回転角は常に同方向に生ずるはずだから 図-3 より  $\theta-\delta>0$  すなわち  $\theta>\delta$  または、 $\frac{\delta}{\theta}<1$ , ゆえに上の等式が成り立つためには

$$\frac{1+\mu}{\mu(2+k)}k = \frac{\delta}{\theta} < 1 \quad \text{これより } k < 2\mu \dots\dots(5)$$

なる条件が成り立たねばならない。次にヒンジのできる箇所 (図-1 (b) に数字で示す位置) における曲げモーメントをそれぞれ  $M_{(1)}, M_{(2)}, \dots\dots$  で表わせば (はり下

面に引張を生ずるときものを正とす) 次の二つの平衡条件式を得る。

$$\left. \begin{aligned} M_{(1)}-\mu M_{(2)} &= \mu(1-\mu)l_1\left(W_1+\frac{l_1w_1}{2}\right) \\ M_{(3)}-M_{(2)} &= \frac{l_2W_2}{4}+\frac{l_2^2w_2}{8} \end{aligned} \right\} (6)$$

ところが (3) により

$$M_{(1)}=-M_{(2)}=M_1 = \frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu}l_1\left(W_1+\frac{l_1w_1}{2}\right)$$

と書けるから (6) の第 1 式は満足される。よって第 2 式に代入して

$$M_{(3)} = \frac{l_2W_2}{4} + \frac{l_2^2w_2}{8} + M_{(2)} = \frac{l_2W_2}{4} + \frac{l_2^2w_2}{8} - M_1$$

静的許容で安全な応力分布が存在するためには  $M_{(3)} \leq M_2$  でなければならぬから上式と (3) とより次の条件式を得る。

$$k \frac{\left(W_2+\frac{l_2w_2}{2}\right)}{\left(W_1+\frac{l_1w_1}{2}\right)} \leq \frac{8\mu(1-\mu)}{1+\mu} \dots\dots(7)$$

すなわち (5), (7) の条件を満たすならば (3) に示す  $M_1, M_2$  は最小重量設計を与える設計全塑性モーメントである。

2. (1) 式において  $\theta=0$  とおけば中央径間みの崩壊に対する仕事式を得て前同様中間支点においてヒンジ回転角  $\varphi, \delta$  の 2 つの自由度をもつ機構に対応するための条件より

$$M_1=M_2 = \frac{l_2}{8}\left(W_2+\frac{l_2w_2}{2}\right) \dots\dots(8)$$

を得、一方仕事式が weight compatible であるための条件より

$$k > 2 \dots\dots(9)$$

また静定許容かつ安全な応力分布であるための条件より

$$k \frac{\left(W_2+\frac{l_2w_2}{2}\right)}{\left(W_1+\frac{l_1w_1}{2}\right)} \geq \frac{8\mu(1-\mu)}{1+\mu} \dots\dots(10)$$

3. (1) 式において  $\delta=\theta$  とおけば全径間の崩壊に対する仕事式であるが、中間支点ではヒンジは中央径間側にそれぞれ 1 個できるとき機構に対応する。そうしてこの場合は  $\theta, \varphi$  が 2 つの自由度となり前同様にして次の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \mu(1-\mu)l_1\left(W_1+\frac{l_1w_1}{2}\right) - \mu\frac{l_2}{8}\left(W_2+\frac{l_2w_2}{2}\right) \\ M_2 &= \frac{l_2}{8}\left(W_2+\frac{l_2w_2}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

また weight compatibility の条件および静定許容条件よりそれぞれ

$$k > 2\mu \dots\dots(12)$$

$$k \frac{\left( W_2 + \frac{l_2 w_2}{2} \right)}{\left( W_1 + \frac{l_1 w_1}{2} \right)} \leq \frac{8\mu(1-\mu)}{1+\mu} \dots\dots\dots (13)$$

を得る。

4. (1) 式において  $\varphi = -\delta$  とおけば同じく全径間の崩壊に対する仕事式を得るが、中間支点ではヒンジが側径間に各1個できる場合であって  $\theta, \varphi$  が2つの自由度となり次の結果を得る。

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu} l_1 \left( W_1 + \frac{l_1 w_1}{2} \right) \\ M_2 &= \frac{l_2}{4} \left( W_2 + \frac{l_2 w_2}{2} \right) \\ &\quad - \frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu} l_1 \left( W_1 + \frac{l_1 w_1}{2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

また上式の成立範囲として

$$k > 2 \dots\dots\dots (15)$$

$$k \frac{W_2 + \frac{l_2 w_2}{2}}{W_1 + \frac{l_1 w_1}{2}} \geq \frac{8\mu(1-\mu)}{1+\mu} \dots\dots\dots (16)$$

を得る。今連続はりの全長を  $l$  とすれば  $2l_1 + l_2 = l, l_2 = kl_1$  であるから

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{l}{2+k}, \quad l_2 = \frac{kl}{2+k} \\ k \frac{W_2 + \frac{l_2 w_2}{2}}{W_1 + \frac{l_1 w_1}{2}} &= k \frac{W_2 + \frac{klw_2}{2(2+k)}}{W_1 + \frac{lw_1}{2(2+k)}} \\ &= k \frac{2(2+k)W_2 + klw_2}{2(2+k)W_1 + lw_1} \equiv F(k, W, w, l) \end{aligned}$$

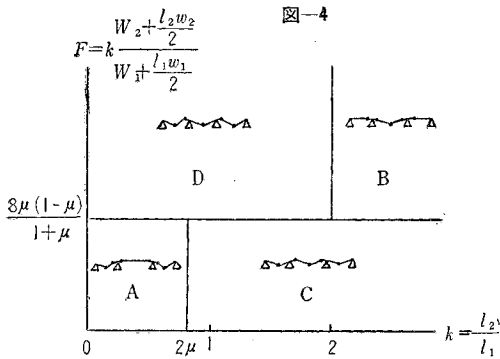


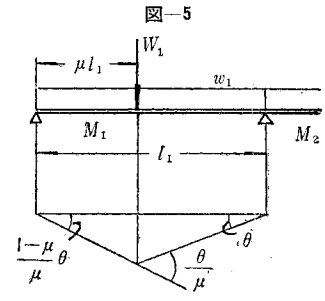
表-1

領域	$M_1$	$M_2$
A	$\frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu} l_1 \left( W_1 + \frac{l_1 w_1}{2} \right)$	$\frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu} l_1 \left( W_1 + \frac{l_1 w_1}{2} \right)$
B	$\frac{l_2}{8} \left( W_2 + \frac{l_2 w_2}{2} \right)$	$\frac{l_2}{8} \left( W_2 + \frac{l_2 w_2}{2} \right)$
C	$\mu(1-\mu) l_1 \left( W_1 + \frac{l_1 w_1}{2} \right)$ $-\mu \frac{l_2}{8} \left( W_2 + \frac{l_2 w_2}{2} \right)$	$\frac{l_2}{8} \left( W_2 + \frac{l_2 w_2}{2} \right)$
D	$\frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu} l_1 \left( W_1 + \frac{l_1 w_1}{2} \right)$	$\frac{l_2}{4} \left( W_2 + \frac{l_2 w_2}{2} \right)$ $-\frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu} l_1 \left( W_1 + \frac{l_1 w_1}{2} \right)$

と書けるから特定の  $l, \mu$  に対して図-4のごとき Design Chart を画くことができる。図中 A, B, C, D で示した領域が上記各場合に対応する。すなわち与えられた  $k, F(k, W, w)$  に対する最小重量設計は点  $(k, F)$  が図-4においてよくまれる領域に応じてそれぞれ表-1に示すとき  $M_1, M_2$  の値によって決定されるわけである。

2. 側径間における塑性ヒンジの位置

荷重位置およびスパン割が与えられれば最小重量設計は表-1および図-4によりただちに求められるが集中荷重が移動荷重なる場合は最も崩壊を起こしやすい荷重位置につき考察しておく必要がある。中央径間では対称性から中央位置に集中荷重が載る場合がその位置であることは明らかであるから問題にならないが側径間では吟味を要する。



まず集中荷重の作用点に塑性ヒンジができるものと仮定し  $M_2 \leq M_1$  なるものとすれば中間支点では中央径間側にヒンジができるから図-5を参照して仕事式を作り、これより

$$W_1 + \frac{w_1 l_1}{2} = \frac{M_2}{l_1} \frac{\beta + \mu}{\mu(1-\mu)} \dots\dots\dots (17)$$

ただし  $M_1/M_2 = \beta$

を得る、上式は崩壊荷重  $W_1, w_1$  がヒンジ位置を示す  $\mu$  の関数として表わされたものと考えることができるからこの荷重を極小ならしめるヒンジの位置は

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left( W_1 + \frac{w_1 l_1}{2} \right) = 0$$

により

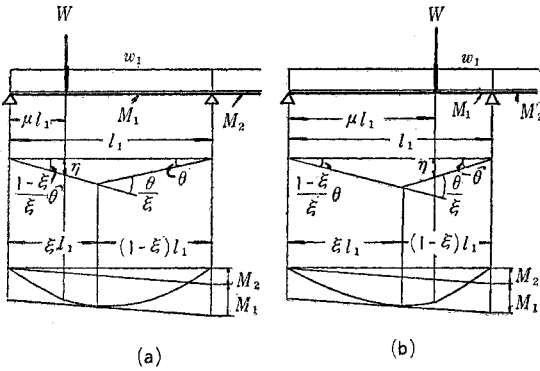
$$\mu = \sqrt{\beta(\beta+1)} - \beta \dots\dots\dots (18)$$

ところで(17)において  $w_1 = 0$  または  $W_1 = 0$  と置いても結果(18)が変わらぬことは明らかだから集中荷重または等分布荷重の一方のみが作用する場合にはヒンジの生ずべき位置は(18)によって与えられる。しかるに  $W_1, w_1$  の両者が共存する場合には  $W_1$  の位置によって塑性ヒンジの生ずべき位置(以下簡単のためヒンジ可能点と呼ぶ)は  $W_1$  の位置とは一般には一致しないのでこの点について吟味しよう。

まず  $W_1$  の位置および塑性ヒンジの位置の相対関係および各場合に対するモーメント図がそれぞれ図-6のごとくであるとして仕事式により  $W_1$  を計算すると

a)  $\mu < \xi$  なる場合 (図-6 (a))  
 $W_1$  の仕事 =  $W_1 \eta = W_1 \frac{1-\xi}{\xi} - \mu l_1 \theta$

図-6



$$w_1 \text{ の仕事} = w_1 \frac{(1-\xi)}{2} l_1^2 \theta$$

仕事式は

$$W_1 \frac{1-\xi}{\xi} \mu l_1 \theta + \frac{w_1 l_1}{2} (1-\xi) l_1 \theta = M_1 \frac{\theta}{\xi} + M_2 \theta$$

上式より求められる  $W_1$  を後の区別のため  $W_{\xi_1}$  と記すと

$$W_{\xi_1} = \frac{2 M_2}{l_1} \frac{\beta + \xi}{(1-\xi)(r_1 \xi + 2\mu)} \dots\dots\dots (19)$$

ただし  $r_1 = w_1 l_1 / W_1$

b)  $\mu > \xi$  なる場合 (図-6 (b))

この場合の  $W_1$  を  $W_{\xi_2}$  と記すと前回のような仕事式より

$$W_{\xi_2} = \frac{2 M_2}{l_1} \frac{\beta + \xi}{\xi \{ 2(1-\mu) + r_1(1-\xi) \}} \dots\dots\dots (20)$$

c)  $\mu = \xi$  なる場合

この場合は (17) より直接または (19) あるいは (20) において  $\mu = \xi$  とおいて得られ、この場合の  $W_1$  を  $W_\mu$  と記すこととすれば

$$W_\mu = \frac{2 M_2}{l_1} \frac{\beta + \mu}{\mu(1-\mu)(r_1 + 2)} \dots\dots\dots (21)$$

崩壊形式としては上記3つの場合以外あり得ない。さてこれらについて次の検討を行なう。

まず  $\mu < \xi$  なる場合については  $W_{\xi_1}$  と  $W_\mu$  とを、 $\mu > \xi$  なる場合については  $W_{\xi_2}$  と  $W_\mu$  とを比較すると次の関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \beta r_1 - 2\mu(1+\beta) \geq r_1(\beta\xi + \beta\mu + \mu\xi) \text{ ならば} \\ W_\mu \geq W_{\xi_1} \text{ (符号同順)} \\ \beta r_1 + 2\beta(1-\mu) \geq r_1(\beta\xi + \beta\mu + \mu\xi) \text{ ならば} \\ W_\mu \geq W_{\xi_2} \text{ (符号同順)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

また明らかに

$$\beta r_1 - 2\mu(1+\beta) < \beta r_1 + 2\beta(1-\mu) \dots\dots\dots (23)$$

さていわゆる Upper bound theorem によれば大なる方の  $W_1$  は真の崩壊荷重であり得ないから上の関係式を考慮するとヒンジ可能点の位置に関し次の3つの場合が生ずる。

場合 1) (図-6 (a))

$\mu < \xi$  のとき  $\beta r_1 - 2\mu(1+\beta) > r_1(\beta\xi + \beta\mu + \mu\xi)$  が成り立てば (23) により当然  $\beta r_1 + 2\beta(1-\mu) > r_1(\beta\xi + \beta\mu + \mu\xi)$  が成り立つから (22) により

$$W_{\xi_1} < W_\mu < W_{\xi_2}$$

となる。ゆえに  $W_{\xi_1}$  が崩壊荷重となりうる事がわかる。またヒンジの位置は  $W_{\xi_1}$  を極小ならしむるとき点であるから (19) を用い  $(\partial W_{\xi_1} / \partial \xi) = 0$  より求められる。この場合の  $\xi$  を区別のため  $\xi_1$  と記すと

$$\xi_1 = \sqrt{(\beta+1)\left(\beta - \frac{2\mu}{r_1}\right)} - \beta \dots\dots\dots (24)$$

$W_{\xi_1}$  の位置を  $\mu_1$  で表わすと、もちろん  $\mu_1 < \xi_1$  である。

場合 2) (図-6 (b))

$\mu > \xi$  のとき  $\beta r_1 + 2\beta(1-\mu) < r_1(\beta\xi + \beta\mu + \mu\xi)$  が成り立てば (22) により当然  $\beta r_1 - 2\mu(1+\beta) < r_1(\beta\xi + \beta\mu + \mu\xi)$  が成り立つから (22) により

$$W_{\xi_1} > W_\mu > W_{\xi_2}$$

ゆえに  $W_{\xi_2}$  が崩壊荷重となり得て、ヒンジ可能点は  $(\partial W_{\xi_2} / \partial \xi) = 0$  より求めこの場合の  $\xi$  を  $\xi_2$  と記せば

$$\xi_2 = \sqrt{\beta(\beta+1) + 2\frac{\beta}{r_1}(1-\mu)} - \beta \dots\dots\dots (25)$$

で与えられる。 $W_{\xi_2}$  の位置を  $\mu_2$  で表わせば  $\mu_2 > \xi_2$  である。

場合 3) (図-5)

$\mu < \xi$  のとき  $\beta r_1 - 2\mu(1+\beta) < r_1(\beta\xi + \beta\mu + \mu\xi)$  が成り立ち、また  $\mu > \xi$  のとき  $\beta r_1 + 2\beta(1-\mu) > r_1(\beta\xi + \beta\mu + \mu\xi)$  が成り立てば (22) により  $W_\mu < W_{\xi_1}$ 、 $W_\mu < W_{\xi_2}$  であるから  $W_\mu$  が崩壊荷重であってヒンジの位置は  $W_\mu$  の位置と一致する。この位置を  $\mu_3 (= \xi_3)$  と記せばこれは (18) で与えられ

$$\mu_3 = \sqrt{\beta(\beta+1)} - \beta \dots\dots\dots (18)$$

ところで (24), (25), (18) の式形をくらべると容易にわかるごとく

$$0 < \mu_1 < \xi_1 < \mu_3 = \xi_3 < \xi_2 < \mu_2 < 1 \dots\dots\dots (26)$$

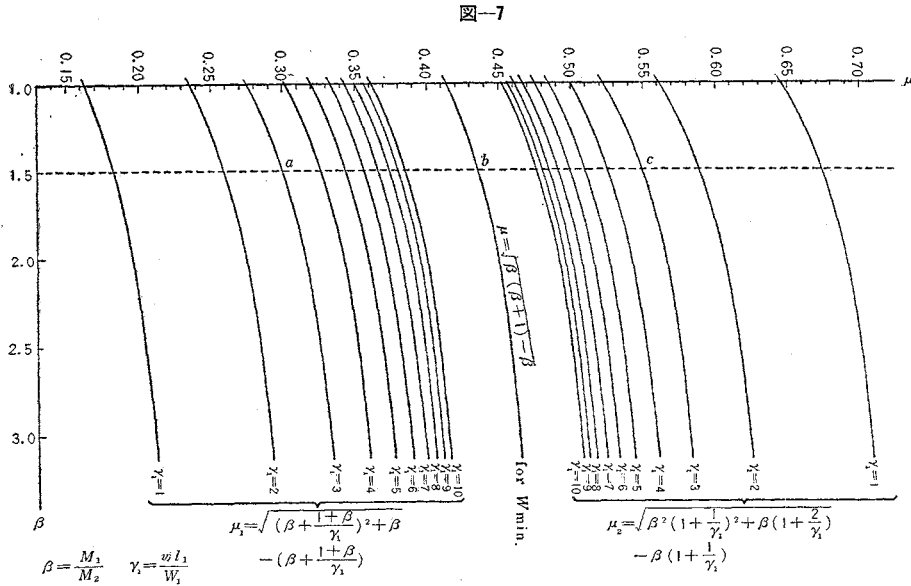
である。

次に場合-1 と場合-3 の両状態の境界位置なるものを考えてみよう。これは場合-1 において  $\mu_1 = \xi_1$  となるごとく場合を求めることであるから (24) において  $\xi_1 = \mu$  とおいて  $\mu$  を求めこれを  $\bar{\mu}_1$  と書けば

$$\bar{\mu}_1 = \sqrt{\left(\beta + \frac{1+\beta}{r_1}\right)^2 + \beta} - \left(\beta + \frac{1+\beta}{r_1}\right) \dots\dots\dots (27)$$

また場合-2 と場合-3 の境界位置も前同様 (25) において  $\xi_2 = \mu$  とおいて  $\mu$  を求め、これを  $\bar{\mu}_2$  と書けば

$$\bar{\mu}_2 = \sqrt{\beta^2 \left(1 + \frac{1}{r_1}\right)^2 + \beta \left(1 + \frac{2}{r_1}\right)} - \beta \left(1 + \frac{1}{r_1}\right) \dots\dots\dots (28)$$



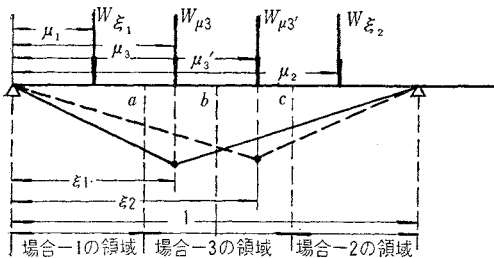
は前にみたとおりであるが実際の崩壊機構に対するヒンジ位置を調べなくてはならない。図-8においてa,b,cの各点は図-7に示すものと同じ意味の点であるとす。しかる時はヒンジ可能点はa~c間のみ存在するから、今a~b間の任意の一点がヒンジである場合を仮想すると、この崩壊機構

さて  $r_1 [=w_1 l_1 / W_1]$  の種々の値について  $\beta [=M_1 / M_2]$  を変数として (18), (27), (28) の各式の値を図示すれば図-7を得る。

今図-7により荷重の位置とヒンジ可能点の位置との相対的挙動を説明しよう。例えば  $r_1=3, \beta=1.5$  なる場合を考える、 $W$  の位置が端支点より中間支点へ向って移動するものとすれば 図-7上では  $\beta=1.5$  を通り  $\mu$ -軸に平行な直線上をたどることになる。まず  $W$  が径間内に入る前はヒンジ可能点はb点にあることは (18) 式でみたとおりである。次に  $W$  が  $r=3$  に対する  $\mu_1$ -曲線との交点aまで移動する間はヒンジ可能点はb点よりa点に向って移動し、その位置は(24)で与えられる。しかしa点上では  $W$  とヒンジ可能点とは一致し  $W$  がb点を越えてc点 [ $r=3$  に対する  $\mu_2$  曲線との交点] に至る間はヒンジ可能点は  $W$  の位置と一致したまま移動することは (26) より明らかである。しかして  $W$  がc点を越えるとさらにヒンジ可能点はc点よりb点に向って移動しはじめその位置は (25) で与えられ、 $W$  が中間支点上に到達すればヒンジ可能点はb点に戻ることであるのである。

さて  $W$  の進行にともなうヒンジ可能点の位置の挙動

図-8



を生ぜしむべき  $W$  は上にみたごとく2つあって、1つは端支点とa点間にあり、それを  $W_{\xi_1}$ 、いま1つはヒンジ上にありそれを  $W_{\mu_3}$  とすればこれらは (19), (21) で与えられる。ところで  $\mu_1 < \mu_3, \mu_3 = \xi_1$  なる事を考慮すると容易にわかるごとく

$$W_{\xi_1} > W_{\mu_3}$$

次に b~c 間にヒンジのある場合を仮想すると、この崩壊機構に対応する  $W$  の位置は前同様2つあって、ヒンジ上と他はc点と中間支点との間にありそれぞれに必ず  $W$  の値を  $W_{\mu_3'}, W_{\xi_2}$  とすればこれらは (21), (20) で与えられるから

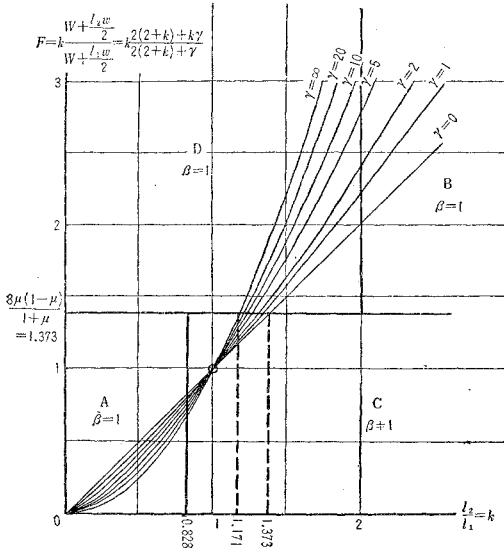
$$W_{\xi_2} > W_{\mu_3'}$$

なることをためしうる。しかも a~c 間で最小の  $W$  を与える機構はb点がヒンジ点となる場合であることは (18) 式でみたとおりである。結局 (18) 式で与えられる位置に塑性ヒンジができるものとして崩壊荷重を計算するか、あるいははり断面を定めて置くならば  $W$  がはり上を進行する間にほかの点にヒンジが発生することはないことが明らかとなった。

### 3. 最小重量を与えるスパン割

第1節においては荷重配置すなわち  $\mu$  が与えられれば任意のスパン割に対する最小重量設計を定めることができ  $M_1, M_2$  が定まり従ってまた  $\beta (=M_1 / M_2)$  も定まった。一方第2節においては  $\beta$  が与えられれば  $\mu$  は (18) 式で定められることが証明された。すなわち  $\mu$  は  $\beta$  の関数である。ところで第1節で示した最小重量設計は  $\mu$  が常数であるとして成立するものであるから  $\mu$  が  $\beta$  の関数であるような場合には適用することができないわけである。この点に注意しながら橋梁荷重のごとく等分布

図-9



荷重  $w$  の他に 1 個の集中荷重  $W$  が通過するものとして最小重量を与えるスパン割を考えよう。かかる集中荷重の移動に対しては各径間ごとに順次崩壊するいわゆる部分崩壊が相続して生ずるとき設計が経済的である事は明らかである。従って連続ばり全体としてはかかる部分崩壊の合計について経済的であることが要求されるから結局荷重状態としては各径間ごとに集中荷重を 1 個ずつ仮想して 図-1 の状態を考えればよい。ゆえに 図-4 の Design chart を利用する事ができるはずである。

さて  $W_1 = W_2 = W$ ,  $w_1 = w_2 = w$  とおいて 図-4 のとき Design chart を画くと 図-9 を得る。ただし  $lw/W = r$  とおけば

$$\frac{l_1 w_1}{W_1} = \frac{r}{2+k}, \quad \frac{l_2 w_2}{W_2} = \frac{kr}{2+k}$$

$$F = k \frac{2(2+k) + kr}{2(2+k) + r} \dots\dots\dots (29)$$

とおいてある。上式において  $r=0$  とおけば  $w=0$  すなわち  $W$  のみの場合に相当し  $r=\infty$  とおけば  $W=0$  すなわち  $w$  のみの場合に相当する。しかし  $0 < r < \infty$  は  $w$  と  $W$  が任意の比率で共存する場合を表わし  $r$  の種々の値に対して (29) を図示すれば 図-9 中の曲線群を得る。すなわち特定の  $r$  値に対する最小重量設計はこの chart 中この  $r$  に対応する曲線上の点で代表されることになる。ところが 図中 A, B の領域では  $M_1 = M_2$  であるから当然  $\beta=1$  また D の領域では  $M_1 < M_2$  であるから中間支点では  $M_1$  の方にヒンジが発生するものと考えてよいからやはり  $\beta=1$  である。ゆえにこれらの領域では (18) より  $\mu=0.4142$  を得てこれは一定である。しかるに c 領域では  $M_1 > M_2$  であるから中間支点でヒンジは  $M_2$  の方に発生することになり,  $M_1/M_2 = \beta > 1$  従って

(18) により  $\mu$  は定まらから以下のごとく推論する。まずいましばらく  $\mu$  は常数としておいて重量関数  $X$  を計算してみる。  $X$  は (4) で表わされるから 図-9 のそれぞれの領域に応じて 表-1 に示す  $M_1, M_2$  の値を用いれば本節で考える荷重に対してはそれぞれ

A 領域では

$$X = l^2 W \frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu} \left\{ \frac{1}{2+k} \left( 1 + \frac{r}{2(2+k)} \right) \right\} \dots (30)$$

B 領域では

$$X = l^2 W \frac{k}{8(2+k)} \left\{ 1 + \frac{kr}{2(2+k)} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

C 領域では

$$X = l^2 W \frac{1}{(2+k)^2} \left\{ 1 + \frac{r}{2(2+k)} \right\} \left\{ 2\mu(1-\mu) + \frac{k-2\mu}{8} F \right\}$$

$$= l^2 W \left\{ \frac{16\mu(1-\mu) + (k-2\mu)k}{8(2+k)^2} + r \frac{16\mu(1-\mu) + (k-2\mu)k^2}{16(2+k)^3} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

D 領域では

$$X = l^2 W \frac{1}{(2+k)^2} \left\{ 1 + \frac{r}{2(2+k)} \right\} \left\{ \frac{\mu(1-\mu)(2-k)}{1+\mu} + \frac{k}{4} F \right\}$$

$$= l^2 W \left[ \frac{1}{(2+k)^2} \left\{ \frac{\mu(1-\mu)(2-k)}{1+\mu} + \frac{k^2}{4} \right\} + \frac{r}{2(2+k)^3} \left\{ \frac{\mu(1-\mu)(2-k)}{1+\mu} + \frac{k^3}{4} \right\} \right] \dots\dots\dots (33)$$

のごとく表わされる。上式中 (32) 以外は与えられた  $\mu$  に対してそれぞれの領域における最小重量設計に於ける重量関数である。式形より明らかなごとく (30) 式は  $k$  の単調減少関数であり (31) 式は単調増加関数である。すなわち A 領域では  $k$  の大なるほど, B 領域では  $k$  の小なるほど  $X$  の値は小さい。さて C 領域については  $\mu$  が仮に 1 つの常数パラメータと見なすと 表-1 により

$$\beta = \frac{M_1}{M_2} = 8\mu(1-\mu) \frac{l_2 \left( W_1 + \frac{l_1 w_1}{2} \right)}{l_1 \left( W_2 + \frac{l_2 w_2}{2} \right)} - \mu$$

$$= \frac{8\mu(1-\mu)}{F} - \mu \dots\dots\dots (34)$$

いま考える場合に対しては上式中の  $F$  として (29) 式を用いればよい。すなわち特定の  $r$  につき  $k$  に 図-9 に示す範囲内 ( $0.828 < k < 1.373$ ) のある値  $k_1$  を与えると  $F$  が定まるから (34) と (18) を連立させることにより  $\mu$  が定まる。これを  $\mu_1$  としよう。さて  $\mu_1$  を常数として Design chart を画いたとすれば領域 C 内で  $k=k_1$  なる 1 点でのみ正しい崩壊機構に対応した最小重量設計が得られたこととなり他の点および他の領域では荷重が単に  $\mu_1$  なる点に載った状態に対する最小重量設計を得るに過ぎない。いま領域 C 内のみを問題としているのであるから領域内の各点ですなわち  $k$  の種々の値に対して  $\mu$  を (34) と (18) より決定しなくてはならない。  $r=0$ ,

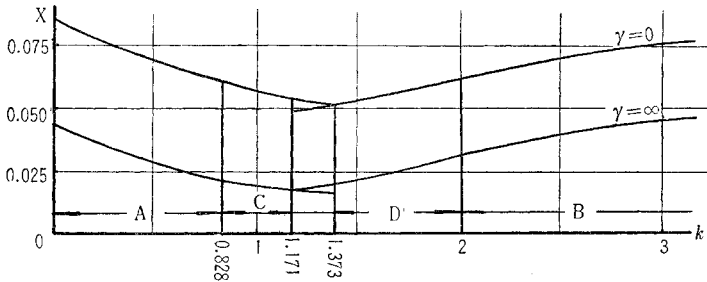
$r = \infty$  なる両極端に対しては (29) より  $F=k, F=k^2$  を得る。これらに対して  $\mu$  を (34), (18) より求めれば表-2のごとくであって  $k$  の増加につれて  $\mu$  は減少し領域  $C(M_1 > M_2)$ , 領域  $D(M_1 < M_2)$  の境界上では,  $M_1 = M_2$ , すなわち  $\beta = 1$  に対する  $\mu$  の値 0.4142 に一致するものであることがわかる。また  $0 < r < \infty$  なる任

表-2  $\mu$  の 値

$k$	0.83	0.9	1	1.1	1.171	1.2	1.3	1.373
$r=0$	0.448	0.443	0.437	0.431	0.427	0.425	0.419	0.4142
$r=\infty$	0.457	0.449	0.437	0.425	0.4142			

意の  $r$  に対しても同様の傾向を示すであろう事は想像に難くない。また領域  $C$  と領域  $D$  の境界上では 図-9 にみるごとく  $F=1.373$  である。一方表-2 の  $\mu$  の各値を用いて (32) 式により  $X$  を計算すればやはり  $0.83 < k < 1.373$  の範囲で減少関数であることが容易に確かめられる。今の場合、領域  $C$  内で  $X$  が減少関数であるとい

図-10



う事だけが重要であるから  $\mu = 0.4142 = \text{一定}$ , とおいても同じ性質を示す (32) 式で代用する事とする。さて  $r=0, r=\infty$  の二つの場合につき (30), (31), (32), (33) による  $X$  を  $k$  の関数として図示すれば 図-10 を得て  $X$  を最小ならしめる  $k$  は領域  $C, D$  の境界上にあることがわかる。 $r=0, r=\infty$  には (32), (33) の右辺第1項が対応し前者は減少関数, 後者は増加関数である。また  $r=\infty$  には (32), (33) の右辺第2項が対応し同じく前者は減少関数, 後者は増加関数である。従って任意の  $r$  に対しては (32) はやはり減少関数 (33) は増加関数である。しかして領域  $C, D$  の境界上では  $F=8\mu(1-\mu)/(1+\mu)$  だから (32) と (33) は一致する事がわかる。ゆえに最小重量は 図-9 において  $F=8\mu(1-\mu)/(1+\mu) = 1.373$  線上で与えられると結論できる。しかもこの線上では  $M_1 = M_2$  であるから  $\beta = 1$ , 従って  $\mu = 0.4142$  としてよい。結局最小重量スパン割は

$$F = k \frac{2(2+k) + k r}{2(2+k) + r} = \frac{8\mu(1-\mu)}{1+\mu} = 1.373 \quad \dots\dots\dots (35)$$

より求められ, これより

$$k = \frac{1}{2+r} \left\{ -0.627 + \sqrt{0.627^2 + 1.373(4+r)(2+r)} \right\} \quad \dots\dots\dots (36)$$

を得る。上述の諸傾向は荷重相互間に多少の変動があっても保存されるものと想像されるから  $W_1$  と  $W_2$  および  $w_1$  と  $w_2$  が互いに等しくないが大体似通った値であるような場合には 図-4 の chart につき同様な考察をすれば, 重量関数の変化につき上例と同じ性質を示すものと推測されるので, 最小重量を与えるスパン割を決める公式として (35) 式と同様に

$$F = \frac{l_2 \left( W_2 + \frac{l_2 w_2}{2} \right)}{l_1 \left( W_1 + \frac{l_1 w_1}{2} \right)} = \frac{8\mu(1-\mu)}{1+\mu} \quad \dots\dots (37)$$

とおいて, これより

$$k = \frac{1}{2+r} \left\{ -(2-\lambda) + \sqrt{(2-\lambda)^2 + \lambda(4+r)(2+r)} \right\} \quad \dots\dots\dots (38)$$

ただし  $\lambda = \frac{8\mu(1-\mu)}{1+\mu}$

を得る。このとき  $M_1 = M_2$  であって (37) の関係が成立つ限り表-1の各欄に示す表式はすべて互いに等しくなるから, いずれか一つの式で計算すればよい。たとえば表-1 第1行の  $M_1$  の式を用いると

$$M = M_1 = \frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu} l_1 \left( W_1 + \frac{l_1 w_1}{2} \right) = \frac{\mu(1-\mu)}{1+\mu} \frac{l W_1}{2+k} \left( 1 + \frac{r_1}{2} \right)$$

ゆえに (35) を参照すると上式より次の結果を得る。

$$M = \frac{1.373}{8} \frac{l W}{2+k} \left( 1 + \frac{r}{2} \right) = 0.08581 l W \frac{2+r}{2+k} \quad \dots\dots\dots (39)$$

上記の結論は与えられた荷重の下に生じたいわゆる Complete Collapse mechanism のうち各ヒンジ点における全塑性モーメントの絶対値が, すべて等しくなるような設計が最も重量を小ならしめるものである事を意味している。

#### 4. 変断面による重量軽減

前節において各径間ごとに一定断面であるような場合には 通過集中荷重  $W$  と分布荷重  $w$  を受けるはりの最小重量を与えるスパン割りは (36) で全塑性モーメントは (39) で与えられる事がわかった。しかし設計としては崩壊荷重としての  $W$  の値を一定に保ちうる限りスパン内ヒンジ点の位置の如何は本来問題でないから一定の  $W$  を任意位置に載荷した時常に崩壊するごとくはり断面を変えておけば一層重量を軽減できるはずである。 図-8 でみたように径間中央部  $a-c$  区間内の荷重  $W_{\mu 3}$  または  $W_{\mu 3}'$  によりその荷重位置にヒンジが発生するようにその位置の断面  $M_1$  を決めたとすればそのヒンジ可能点

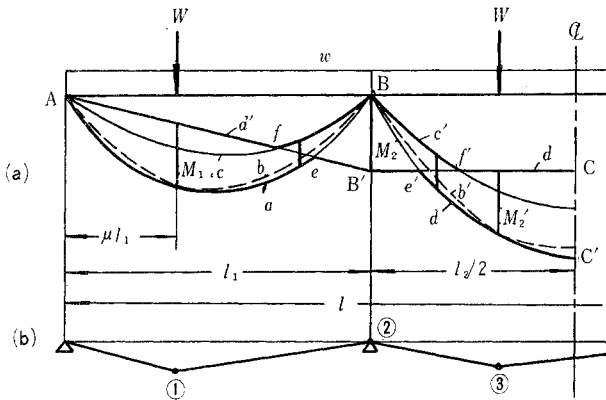
に対応する  $a \sim c$  区間外の  $W_{\xi_1}$  または  $W_{\xi_2}$  が  $W_{\mu_3}$  または  $W_{\mu_3'}$  と同値なる限りこれらによって当該ヒンジの発生を起し得ないことは前に見たとおりである。ゆえにこの区間の断面を (21) 式から定めておけば  $W$  が  $a \sim c$  区間内にある時に限り  $W$  の位置にヒンジが発生して機構となり得るが  $a \sim c$  区間外に  $W$  がある場合はこの区間にヒンジができることがない。ゆえに  $a \sim c$  区間の外側部分については  $W$  の位置においてヒンジが発生するごとく断面の全塑性モーメントを決めておけばよい。これは (21) 式により断面を定めることを意味するから結局全体について (21) 式により断面を定めてよいことになる。さて (21) 式より

$$M_1 = \frac{Wl(2+r_1)}{2(2+k)} \mu(1-\mu) - \mu M_2$$

ただし  $r_1 = wl_1/W$

上式右辺第1項はこの荷重状態に対する単荷最大曲げモーメント図 (図-11 中  $a$ -曲線で示してある) を表わし第2項は中間支点の全塑性モーメントによる負モーメント図 (図中  $d$ -直線) を表わしている。以上は側径間についてであるが中央径間に対しても全く同様で説明を要

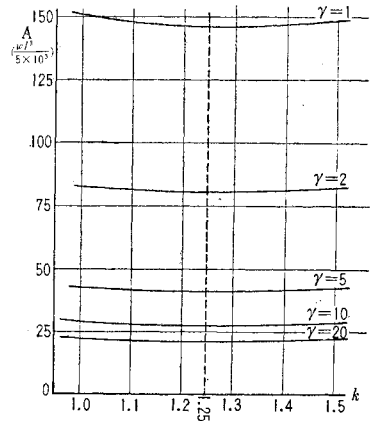
図-11



しないであろう (図-11 参照)。さて (4) 式でみたごとく重量関数は全塑性モーメントに1次比例するとしたから上述の曲げモーメント図の面積が連続ばりの重量に比例することになる。ところで負モーメントの部分  $eB'B$  は  $W$  が支点付近にある場合が大となる。例えば  $W$  が支点  $A$  付近にあれば正モーメント図は  $c$ -曲線で表わされるから中間支点での負モーメントは  $fBB'$  となる。これらのことを考慮すれば結局曲げモーメント図  $A-a-e-B'-e'-a-C'-C'-f'-B-f-A$  の面積を設計塑性モーメントの分布と考えてよい。曲げモーメントの符号が正負交替する  $f-e$  区間ではより断面が対称形ならば塑性モーメントは絶対値のみ指定すれば正負に同等に働くから  $a$ -曲線と  $c$ -曲線との間の縦距を直線  $f-e$  で二等分する位置を境

として正負いずれか大なる方のモーメント図のみを考慮すればよい。さて一定の径間比  $k(=l_2/l_1)$  につき上記の曲げモーメント図を作図し負モーメント  $M_2$  (図中  $BB'$ ) の値を種々変ぜしめ各場合のモーメント図の総面積をプランメーターで計測して極小の面積を与える  $M_2$  を判定するのである。実際作図の結果では  $M_2$  は  $r(=wl/W)$  の値によりかなり変動するが  $k=1$  付近での  $k$  の値にはあまり敏感でなく停留的である。このようにして求めた極小の面積  $A$  を今度は種々の  $k$  につき求め図示したものは 図-12 であってこれより  $1 \leq r \leq 20$  の範囲では  $1.23 < k < 1.28$  を得て  $k=1.25$  が最小重量を与えるスパン割と見なしてよいといえるが 図-12 にみるごとく、この付近で  $k$  の変化に対し面積  $A$  はほとんど不変であってくわしい値を問題にする必要がない事が解る。実際の設計には突縁断面、腹板断面を変化させて所要全塑性モーメントを保有し、またせん断力、たわみ度等についての制限も充さなければならぬから所要設計塑性モーメント図としては上記モーメント図に外接する適当な折線状モーメント図で代用することになる。

図-12



5. 結 言

以上塑性設計の初等理論にもとづき主として最小重量を与えるべきスパン割について論じたが二次的にはさらにせん断力の影響、局部座屈に対する補強等ヒンジの Rotation capacity 保持に関する問題、撓度に関する制限等吟味を要する問題が残されているがこれらについては今後の研究にまらたい。最後に図式検討に対する加藤正之君の労を深謝する。

参 考 文 献

- 1) Beedle, L.S., : "Plastic Design of Steel Frames" 1958
- 2) Neal, B.G., : "Plastic Methods of Structural Analysis" 1956
- 3) Hodge, P.G., : "Plastic Analysis of Structures" 1959

(原稿受付: 1960 9.1)