

# 異方性弾性地山における素掘円形トンネルの 変形について

正員川本 肇 万\*

ON THE DEFORMATION AROUND A CIRCULAR TUNNEL WITHOUT LINING DRIVEN IN THE ANISOTROPICALLY ELASTIC GROUND

By Tosikazu Kawamoto, C.E. Member

**Synopsis:** Assuming that the ground in which a circular tunnel without lining is driven at a deep level under its surface has an anisotropic elasticity, a general equation for the displacement around this tunnel is found theoretically by utilizing the two analytic functions that satisfy the boundary conditions in the general equation for stress components which

**要旨** 地山が直交異方性の弾性体とみなせるとき、地表面下かなり深いところに掘られた素掘円形トンネル周辺の変位に対する一般式を、複素関数を用いて導かれた応力式中の境界条件を満足する二つの解析関数を用いることにより求めた。さらにこの式より算出した数値結果からトンネル周縁の半径および切線方向変位状態におよぼす地山の異方性の影響やトンネルの鉛直方向と水平方向直径の変化の比率などについて考察した。

## 1. 緒言

従来より地山を等方等質の弾性体とみなすことによりトンネルの周辺応力および変形についての理論的な研究がなされてきている。また最近小田博士<sup>1)</sup>は rheology の立場より地山を粘弾性体とみなした場合のトンネルの変形挙動について報告されているが、この場合も地山は等方等質であり、その終極においては弾性的変位と一致する。このように地山状態が等方等質であることは實際にはきわめてまれであり、かなり複雑な様相をていすることは以前より指摘されているとおりである。そこでここではさらに実際的な岩盤および地層の性質を考慮し、とくに成層状態とともに地山の弾性性質の異方性がいかにトンネル周辺の変形状態に影響をおよぼすかを理論的に考察した。

地山の異方性には種々の状態が存在し、たとえば地山材料は等質であるがその弾性係数が方向によって異なった値を有するごとき、いわゆる等質異方性弾性体と考えられるもの、地山が弾性性質の異なった岩石の互層となるもの、あるいは同一材料による地山においてもそれらが層状になり、各層間の連続性が絶たれることによって地山全体が異方性になるものなどが考えられる。こ

は計算によって複素関数を用いて導かれた応力式にふくまれる 2 つの解析関数で境界条件を満足するものを変位の一般式に導入することにより、トンネル近傍および周縁の変位式を算出し、さらに特別な場合として地山荷重が主弾性係数の方向に 2 軸的に作用した場合のトンネルの変形量を示す式を求めた。

Moreover, from the numerical results which are calculated by these equations, the effects of anisotropicity of ground on the radial and tangential displacement around a circular tunnel and the ratio of the horizontal change of tunnel diameter to the vertical one are discussed.

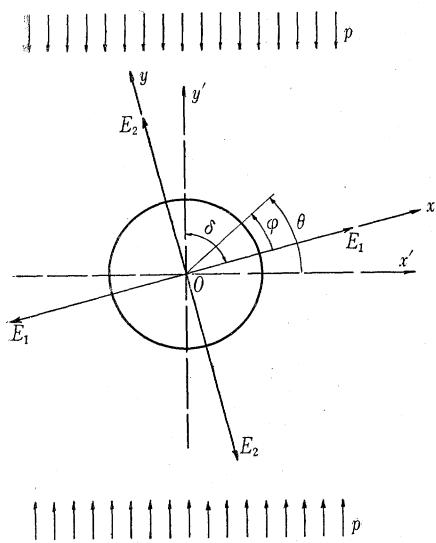
こでは地山として一般的な等質直交異方性弾性体を考えるが、積層状の地山の場合でも層間に相対変位を生ずることのない場合には、地山全体としての等值主弾性係数を考慮することにより等質直交異方性の場合と同様に取扱うことができる。

孔周辺の応力に対しては円孔または梢円孔を有する直交異方性板が一様に引張りをうけている場合の池田健氏<sup>2)</sup>の解があるが、これは荷重方向が弾性主軸の方向と一致する場合に対するものである。また Lechnizki, S.G.<sup>3)</sup>はさらに一般的な場合の円孔周辺応力に対する厳密解を与えており、その解を用いて Sonntag, G.<sup>4)</sup>は坑道周辺応力状態におよぼす地山の異方性の影響について種々の考察を行なっている。著者も Sawin, G.N.<sup>5)</sup>の与えている弾性基礎方程式を適用して一般的な状態に対する円孔周辺応力を算出し、上記のものと同様な結果を得た。しかしトンネル周辺の変位に関する理論計算はあまり見られず、Sonntag, G. が地山の主弾性係数の方向が地山荷重の方向と一致する場合に対して Sawin, G. により計算された応力式を用いてトンネル周縁の変位量を求めているのを知るだけである。それゆえ著者は一般的に地山荷重が直交異方性地山の弾性主軸と任意の傾きをなして作用する場合に対して、複素関数を用いて導かれた応力式にふくまれる 2 つの解析関数で境界条件を満足するものを変位の一般式に導入することにより、トンネル近傍および周縁の変位式を算出し、さらに特別な場合として地山荷重が主弾性係数の方向に 2 軸的に作用した場合のトンネルの変形量を示す式を求めた。

さらにこれらの変位式を用いて種々の主弾性係数比、弾性主軸の方向および鉛直、水平方向地山荷重比などに対する数値計算を行い、それらの結果を図示するとともにトンネル周縁の変位状態やトンネルの変形量におよぼ

\* 熊本大学助教授、工学土木工学教室

図-1



す地山の異方性の影響について考察した。

## 2. 直交異方性弾性体における変位式

いま図-1に示すごとく座標軸を弾性主軸に選び、任意方向に地山荷重  $p$  が作用する場合を考えると、応力関数  $F$  はつきのような適合条件式<sup>6)</sup> を満足しなければならない。

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

ここで上式の各係数はつきのごとく弾性性質と関係している。平面応力状態の場合は

$$\begin{aligned} a_{11} &= 1/E_1, \quad a_{22} = 1/E_2, \quad a_{12} = -v_1/E_1 = -v_2/E_2, \\ a_{66} &= 1/G \end{aligned}$$

平面ひずみ状態の場合は

$$\begin{aligned} a_{11} &= (1 - v_{13} \cdot v_{31})/E_1, \quad a_{22} = (1 - v_{23} \cdot v_{32})/E_2, \\ a_{12} &= -(v_1 + v_{23} \cdot v_{32})/E_1, \quad a_{66} = 1/G \end{aligned}$$

ただし  $v_{31}, v_{32}$  はトンネル軸方向に関する  $x$  軸、 $y$  軸方向のポアソン比である。(1) 式の特性方程式の根はこの場合  $s_1 = i\beta_1, s_2 = i\beta_2, s_3 = -i\beta_1, s_4 = -i\beta_2 (\beta_1, \beta_2$  は実の常数) となり、これらの係数  $\beta_1, \beta_2$  はつきのようになる。

$$\beta_1^2 \beta_2^2 = a_{22}/a_{11}, \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 = (2a_{12} + a_{66})/a_{11} \quad (2)$$

(1) 式の一般解はつきのような形で示される。

$$F(x, y) = U_1(z_1) + U_2(z_2) + \overline{U_1(z_1)} + \overline{U_2(z_2)} \quad (3)$$

ここに  $z_k = x + s_k y$  ( $k = 1, 2$ ) であり、 $U_1(z_1)$  や  $U_2(z_2)$  は2つの解析関数である。いま、

$$\varphi(z_1) = \frac{dU_1}{dz_1}, \quad \psi(z_2) = \frac{dU_2}{dz_2}$$

とすれば、 $\overline{\varphi(z_1)} = d\overline{U_1}/d\overline{z_1}, \overline{\psi(z_2)} = d\overline{U_2}/d\overline{z_2}$  となり、(3) 式で与えられる応力関数より各成分応力は2つの解析関数  $\varphi(z_1)$  や  $\psi(z_2)$  によってつきのように表わ

される。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2R_e[s_1^2 \varphi'(z_1) + s_2^2 \psi'(z_2)] \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2R_e[\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -2R_e[s_1 \varphi'(z_1) + s_2 \psi'(z_2)] \end{aligned} \right\} \cdots (4)$$

ここで  $R_e$  は [ ] 内の実数部を表わし、 $\varphi'(z_1) = \partial \varphi / \partial z_1, \psi'(z_2) = \partial \psi / \partial z_2$  である。

いま  $x, y$  方向の変位を  $u(x, y)$ 、および  $v(x, y)$  で表わせば、平面問題における各ひずみ成分は一般に次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (5)$$

(5) 式に (4) 式の  $\sigma_x, \sigma_y$  の値を代入し積分すれば、 $u(x, y)$  や  $v(x, y)$  はつきのようにえられる。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2R_e[p_1 \varphi(z_1) + p_2 \psi(z_2)] - r_0 y + \alpha_0 \\ v(x, y) &= 2R_e[q_1 \varphi(z_1) + q_2 \psi(z_2)] + r_0 x + \beta_0 \end{aligned} \quad (6)$$

上式において

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= a_{11}s_1^2 + a_{12}, \quad p_2 = a_{11}s_2^2 + a_{12} \\ q_1 &= (a_{12}s_1^2 + a_{22})/s_1, \quad q_2 = (a_{12}s_2^2 + a_{22})/s_2 \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (7)$$

であり、また  $(-r_0 y + \alpha_0)$  や  $(r_0 x + \beta_0)$  は物体全体の固定変位を生ずる項であって、ここで考えるトンネルの変形に対しては考慮しなくともよい。

## 3. 異方性弾性地山中の素掘円形トンネル周辺の変位

さて図-1に示されるような地山荷重状態に対する2つの解析関数  $\varphi(z_1)$  や  $\psi(z_2)$  は図に示す記号を用いてつきのように求められる<sup>7)</sup>。この場合境界条件は、

$$\text{無限遠において: } \sigma_x^{(\infty)} = -p \cos^2 \delta, \quad \sigma_y^{(\infty)} = -p \sin^2 \delta,$$

$$\tau_{xy}^{(\infty)} = -p \sin \delta \cos \delta$$

$$\text{トンネル周縁において: } \sigma_r = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0.$$

であって、これらの条件を満足するごとき  $\varphi(z_1)$  や  $\psi(z_2)$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z_1) &= Bz_1 + \varphi_0(z_1) \\ \psi(z_2) &= (B' + iC')z_2 + \psi_0(z_2) \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (8)$$

上式で係数  $B, B'$  や  $C'$  はつきのようである。

$$\left. \begin{aligned} B &= -p \frac{\cos^2 \delta + \beta_2^2 \sin^2 \delta}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \\ B' &= p \frac{\cos^2 \delta + \beta_1^2 \sin^2 \delta}{2(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \\ C' &= -p \frac{\sin 2\delta}{4\beta_2} \end{aligned} \right\} \cdots \cdots \cdots (9)$$

また  $\varphi_0(z_1)$  や  $\psi_0(z_2)$  はつきのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0(z_1) &= \frac{ipa^2(1-is_1)}{4(s_1-s_2)} \left\{ \frac{(s_2 \sin 2\delta + 2\cos^2 \delta)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2(1+s_1^2)}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{i(2s_2 \sin^2 \delta + \sin 2\delta)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2(1+s_1^2)}} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\psi_0(z_2) = -\frac{ipa^2(1-is_2)}{4(s_1-s_2)} \left\{ \frac{(s_1 \sin 2\delta + 2 \cos^2 \delta)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2(1+s_2^2)}} \right. \\ \left. + \frac{i(2s_1 \sin^2 \delta + \sin 2\delta)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2(1+s_2^2)}} \right\} \quad (10)$$

(8) 式を (3) 式に代入すれば、この場合の応力成分の式は、

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p \cos^2 \delta + 2 R_e [s_1^2 \varphi_0'(z_1) + s_2^2 \psi_0'(z_2)] \\ \sigma_y &= p \sin^2 \delta + 2 R_e [\varphi_0'(z_1) + \psi_0'(z_2)] \\ \tau_{xy} &= p \sin \delta \cos \delta - 2 R_e [s_1 \varphi_0'(z_1) + s_2 \psi_0'(z_2)] \end{aligned} \quad (11)$$

となる。(6) 式に (11) 式を代入し、(7) 式を考慮すればこの場合の変位成分  $u(x, y)$  および  $v(x, y)$  は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -p(-a_{11}\beta_1^2 + a_{12}) \left[ \frac{(\cos^2 \delta + \beta_2^2 \sin^2 \delta)x}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \right. \\ &- \frac{a(1+\beta_1)}{2(\beta_1 - \beta_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{a^{2(n-1)}(1-\beta_1^2)^{n-1}}{(x^2 + \beta_1^2 y^2)^{2n-1}} \\ &\times \left\{ -a \sin 2\delta (1+\beta_1) \sum_{r=1}^n (-1)^r C_{2r-1} \beta_1^{2r-1} \right. \\ &\quad \left. x^{2n-2r} y^{2r-1} + 2a(\cos^2 \delta - \beta_2^2 \sin^2 \delta) \right. \\ &\times \left. \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r C_{2r-1} \beta_1^{2r} x^{2n-2r-1} y^{2r} \right\} \\ &- p(-a_{11}\beta_2^2 + a_{12}) \left[ -\frac{(\cos^2 \delta + \beta_1^2 \sin^2 \delta)x}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)} - \frac{\sin 2\delta y}{2} \right. \\ &+ \frac{a(1+\beta_2)}{2(\beta_1 - \beta_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{a^{2(n-1)}(1-\beta_2^2)^{n-1}}{(x^2 + \beta_2^2 y^2)^{2n-1}} \\ &\times \left\{ -a \sin 2\delta (1+\beta_2) \sum_{r=1}^n (-1)^r C_{2r-1} \beta_2^{2r-1} \right. \\ &\quad \left. x^{2n-2r} y^{2r-1} + 2a(\cos^2 \delta - \beta_1^2 \sin^2 \delta) \right. \\ &\times \left. \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r C_{2r-1} \beta_2^{2r} x^{2n-2r-1} y^{2r} \right\} \quad (12) \\ v(x, y) &= -\frac{p(-a_{12}\beta_1^2 + a_{22})}{\beta_1} \left[ \frac{(\cos^2 \delta + \beta_2^2 \sin^2 \delta)}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \beta_1 y \right. \\ &- \frac{a(1+\beta_1)}{2(\beta_1 - \beta_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \frac{a^{2(n-1)}(1-\beta_1^2)^{n-1}}{(x^2 + \beta_1^2 y^2)^{2n-1}} \\ &\times \left\{ a \sin 2\delta (1+\beta_2) \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r C_{2r} \beta_1^{2r} x^{2n-2r-1} y^{2r} \right. \\ &+ 2a(\cos^2 \delta - \beta_2^2 \sin^2 \delta) \\ &\times \left. \sum_{r=1}^n (-1)^r C_{2r-1} \beta_1^{2r-1} x^{2n-2r} y^{2r-1} \right\} \\ &- \frac{p(-a_{12}\beta_2^2 + a_{22})}{\beta_2} \left[ -\frac{(\cos^2 \delta + \beta_1^2 \sin^2 \delta)}{(\beta_2^2 - \beta_1^2)} \beta_2 y \right. \\ &+ \frac{\sin 2\delta}{2} x + \frac{a(1+\beta_2)}{2(\beta_1 - \beta_2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \cdot \\ &\quad \frac{a^{2(n-1)}(1-\beta_2^2)^{n-1}}{(x^2 + \beta_2^2 y^2)^{2n-1}} \times \left\{ a \sin 2\delta (1+\beta_1) \sum_{r=1}^{n-1} \right. \\ &\quad \left. (-1)^r C_{2r-1} \beta_2^{2r} x^{2n-2r-1} y^{2r} \right. \\ &+ 2a(\cos^2 \delta - \beta_1^2 \sin^2 \delta) \sum_{r=1}^n (-1)^r \\ &\quad \left. \left. \sum_{2n-1} C_{2r-1} \beta_2^{2r-1} x^{2n-2r} y^{2r-1} \right\} \right] \quad (13) \end{aligned}$$

いま地山が等方等質あるいはそれに近い状態の場合は  $\beta_1 - \beta_2 = 0$  あるいは  $\beta_1 - \beta_2 \neq 0$  となるから、上式において  $[ ]$  内の各項の分母が零になるため計算できないようと思われるが、上式の級数項を分解整理すれば、(12) および (13) 式は  $(\beta_1 - \beta_2)$  に対して無関係な項と  $(\beta_1 - \beta_2)$  の高次の項に分けることができる。その表示式は多

少複雑になるので省略するが、とくに地山が等方等質の弾性体と見なせる場合、すなわち  $\beta_1 = \beta_2$  のときの変位成分を求めるところになると、なおこの場合は  $a_{11} = a_{22}$  である。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -px(a_{11} \cos^2 \delta + a_{12} \sin^2 \delta) \\ &- \frac{1}{2} py(a_{11} - a_{12}) \sin 2\delta - pa^2 y \cdot \\ &\quad \frac{\{(3a_{11} - a_{12})x^2 + (a_{11} + a_{12})y^2\}}{(x^2 + y^2)^2} \sin 2\delta \\ &- pa^2 \cdot \frac{x}{2(x^2 + y^2)^2} \times \{(5a_{11} \cos^2 \delta - 3a_{11} \sin^2 \delta - a_{12})x^2 \\ &+ (a_{11} + 3a_{12} \cos^2 \delta - 5a_{12} \sin^2 \delta)y^2\} \\ &+ pa^4 \frac{(a_{11} - a_{12})}{2(x^2 + y^2)^6} \{(3x^8y + 8x^6y^3 + 6x^4y^5 - y^9)\sin 2\delta \\ &+ (x^9 - 6x^5y^4 - 8x^3y^6 - 3xy^8)(\cos^2 \delta - \sin^2 \delta)\} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -py(a_{12} \cos^2 \delta + a_{22} \sin^2 \delta) \\ &+ \frac{1}{2} px(a_{12} - a_{22}) \sin 2\delta - pa^2 \cdot \frac{x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &\quad \{(a_{12} + a_{22})x^2 - (a_{12} - 3a_{22})y^2\} \sin 2\delta \\ &- pa^2 \cdot \frac{y}{2(x^2 + y^2)^2} \{(5a_{12} \cos^2 \delta - 3a_{12} \sin^2 \delta - a_{22})x^2 \\ &+ (a_{12} + 3a_{22} \cos^2 \delta - 5a_{22} \sin^2 \delta)y^2\} \\ &- pa^4 \frac{(a_{22} - a_{12})}{2(x^2 + y^2)^6} \{(x^9 - 6x^5y - 8x^3y^6 - 3xy^8)\sin 2\delta \\ &- (3x^8y + 8x^6y^3 + 6x^4y^5 - y^9)(\cos^2 \delta - \sin^2 \delta)\} \end{aligned} \quad (15)$$

さらに地山荷重の方向が  $x$  軸と一致するときは  $\delta = 0^\circ$  となり、平面応力状態の場合を考えると、 $a_{11} = a_{22} = 1/E$ ,  $a_{12} = -\nu/E$  であるから、(14) 式および (15) 式より、

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -\frac{p}{2E} \left[ 2x + \frac{a^2 x}{(x^2 + y^2)^2} \{(5+\nu)x^2 \right. \\ &\quad \left. + (1-3\nu)y^2\} - \frac{a^4}{(x^2 + y^2)^6} (1+\nu)(x^9 \right. \\ &\quad \left. - 6x^5y^4 - 8x^3y^6 - 3xy^8) \right] \\ &= -\frac{p}{2E} \left[ 2r \cos \varphi + \frac{1}{r} a^2 \cos \varphi \{4(1+\nu) \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. + 1-3\nu\} - \frac{a^4}{r^3} (1+\nu) \cos \varphi (4 \cos^2 \varphi - 3) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} v(x, y) &= -\frac{p}{2E} \left[ -2\nu y + \frac{a^2 y}{(x^2 + y^2)^2} \{-(1+\nu)x^2 \right. \\ &\quad \left. + (3-\nu)y^2\} - \frac{a^4}{(x^2 + y^2)^6} (1+\nu) \right. \\ &\quad \left. (3x^8y + 8x^6y^3 + 6x^4y^5 - y^9) \right] \\ &= -\frac{p}{2E} \left[ -2\nu r \cos \varphi + \frac{a^2}{r} \sin \varphi \{1+5\nu \right. \\ &\quad \left. - 4(1+\nu) \sin^2 \varphi\} - \frac{a^4}{r^3} (1+\nu) (3-4 \sin^2 \varphi) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

なお上の (16) 式および (17) 式はたとえば Timoshenko, S. による応力式<sup>8)</sup> を用いて求めた変位式と全く同一のものである。

#### 4. 素掘円形トンネル周縁の変位

つぎにトンネル周縁における変位を考えてみると、周

縁上では (11) 式において次式 :

$$\begin{aligned}\sqrt{z_1^2 - a^2(1+s_1^2)} &= \sqrt{(x+i\beta_1 y)^2 - a^2(1-\beta_1^2)} \\ &= a(i \sin \varphi + \beta_1 \cos \varphi) \\ \sqrt{z_2^2 - a^2(1+s_2^2)} &= \sqrt{(x+i\beta_2 y)^2 - a^2(1-\beta_2^2)} \\ &= a(i \sin \varphi + \beta_2 \cos \varphi)\end{aligned}$$

が成り立つから、解析関数  $\varphi_0(z_1)$  やび  $\psi_0(z_2)$  はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned}\varphi_0(z_1)_a &= \frac{pa}{4(\beta_1 - \beta_2)} \\ &\quad \left\{ \frac{2(\cos^2 \delta - \beta_2 \sin^2 \delta) + i(1 + \beta_2) \sin 2\delta}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \right\} \\ \psi_0(z_2)_a &= -\frac{pa}{4(\beta_1 - \beta_2)} \\ &\quad \left\{ \frac{2(\cos^2 \delta - \beta_1 \sin^2 \delta) + i(1 + \beta_1) \sin 2\delta}{\cos \varphi + i \sin \varphi} \right\}\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

上式を (6) 式に代入し計算を行なうと、素掘円形トンネルの周縁における  $x$  方向および  $y$  方向の変位は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned}u_{r=a} &= -pa \left\{ (1 + \beta_1 + \beta_2) a_{11} \cos^2 \delta \cos \varphi \right. \\ &\quad - \beta_1 \beta_2 a_{11} \sin^2 \delta \cos \varphi + \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2) \\ &\quad \left. + \beta_1 \beta_2 + \beta_2^2 \right\} a_{11} \sin 2\delta \sin \varphi \\ u_{r=a} &= -pa \left\{ \frac{(1 + \beta_1 + \beta_2)}{2\beta_2} a_{22} \sin 2\delta \cos \varphi \right. \\ &\quad - \frac{1}{\beta_1 \beta_2} a_{22} \cos^2 \delta \sin \varphi \\ &\quad \left. + \frac{(\beta_1 \beta_2 + \beta_1 + \beta_2)}{\beta_1 \beta_2} a_{22} \sin^2 \delta \sin \varphi \right\}\end{aligned} \right\} \quad (19)$$

さらに上式を用いてトンネル周縁における半径方向および切線方向の変位  $u_r$  および  $u_\varphi$  を求めると次式をうる。

$$\begin{aligned}u_r &= -pa \left[ \left\{ (1 + \beta_1 + \beta_2) \cos^2 \delta - \beta_1 \beta_2 \sin^2 \delta \right\} \right. \\ &\quad a_{11} \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} \left\{ (\beta_1 + \beta_2 + \beta_1 \beta_2 + \beta_2^2) a_{11} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(1 + \beta_1 + \beta_2) \beta_1 \beta_2 + \beta_1^2}{\beta_1^2 \beta_2^2} a_{22} \right\} \sin 2\delta \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta_1 \beta_2} \left\{ -\cos^2 \delta + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_1 \beta_2) \sin^2 \delta \right\} a_{22} \sin^2 \varphi \right] \quad (20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_\varphi &= -pa \left[ \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + \beta_1 + \beta_2) \beta_1 \beta_2 + \beta_1^2}{\beta_1^2 \beta_2^2} a_{22} \sin 2\delta \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -(1 + \beta_1 + \beta_2) \cos^2 \delta - \beta_1 \beta_2 \sin^2 \delta \right\} a_{11} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta_1 \beta_2} (-\cos^2 \delta + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_1 \beta_2) \sin^2 \delta) a_{22} \right\} \\ &\quad \times \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{2} (\beta_1 + \beta_2 + \beta_1 \beta_2 + \beta_2^2) \\ &\quad a_{11} \sin 2\delta \sin^2 \varphi \right] \quad (21)\end{aligned}$$

(20) 式および (21) 式における  $\beta_1, \beta_2$  は (2) 式で与えられるごとく、地山の異方性によって異なる。この場合ポアソン比  $\nu$  の影響は地山材料の弾性係数の影響よりも一層小さいから、計算を容易にするために  $\nu=0$

とおいて結果を比較しても差し支えないと思われる。

いま  $\nu=0$  と仮定すれば、平面ひずみおよび平面応力状態に対して、

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}$$

となり、(2) 式より  $\beta_1$  および  $\beta_2$  はつぎのようになる。

$$\beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \sqrt{E_1/E_2} \quad \dots \dots \dots \quad (22)$$

したがって (20) 式および (21) 式は、

$$\begin{aligned}u_r &= -\frac{pa}{E_1 E_2} \left[ \{2E_2 \cos^2 \delta + \sqrt{E_1 E_2} (\cos^2 \delta - \sin^2 \delta)\} \right. \\ &\quad \left. \cos^2 \varphi + (E_1 + 2\sqrt{E_1 E_2} + E_2) \sin 2\delta \sin \varphi \cos \varphi \right. \\ &\quad \left. + \{2E_1 \sin^2 \delta - \sqrt{E_1 E_2} (\cos^2 \delta - \sin^2 \delta)\} \sin^2 \varphi \right] \quad (23)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_\varphi &= -\frac{pa}{E_1 E_2} \left[ (0.5 E_1 + \sqrt{E_1 E_2} + 0.5 E_2) \sin 2\delta \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. + \{-2(\sqrt{E_1 E_2} + E_2) \cos^2 \delta + 2(\sqrt{E_1 E_2} \right. \\ &\quad \left. + E_1) \sin^2 \delta\} \sin \varphi \cos \varphi - (0.5 E_1 + \sqrt{E_1 E_2} \right. \\ &\quad \left. + 0.5 E_2) \sin 2\delta \sin^2 \varphi \right] \quad (24)\end{aligned}$$

いま地山が等方等質の弾性体とみなされるときには、上式で  $E_1 = E_2 = E$  とおいて次式をうる。

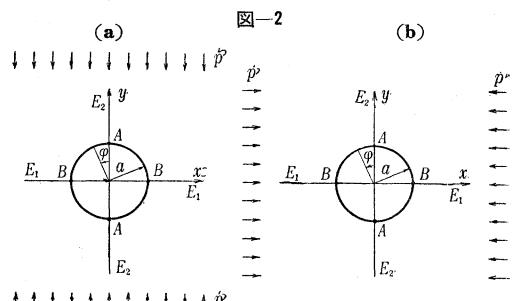
$$\left. \begin{aligned}u_r &= -\frac{pa}{E} [(3 \cos^2 \delta - \sin^2 \delta) \cos^2 \varphi \\ &\quad + 4 \sin 2\delta \sin \varphi \cos \varphi + (3 \sin^2 \delta - \cos^2 \delta) \sin^2 \varphi] \\ u_\varphi &= -\frac{pa}{E} [2 \sin 2\delta \cos^2 \varphi - 4(\cos^2 \delta \\ &\quad - \sin^2 \delta) \sin \varphi \cos \varphi - 2 \sin 2\delta \sin^2 \varphi]\end{aligned} \right\} \quad (25)$$

さらに  $\delta=0$  とおけば地山荷重が  $x$  方向に作用する場合であって、つぎのごとく Timoshenko, S. による応力式から求めたものと一致する。

$$u_r = -\frac{pa}{E} (2 \cos 2\varphi + 1), \quad u_\varphi = \frac{2pa}{E} \sin 2\varphi \quad \dots \dots \quad (26)$$

つぎに地山荷重の方向が主弾性係数の方向 ( $x$  軸および  $y$  軸方向) と一致する場合を考える。この場合には (23) 式および (24) 式において  $\delta=0^\circ$  あるいは  $\delta=90^\circ$  とおけばよく、 $\delta=0^\circ$  の場合は 図-2 (a) のごとく鉛直方向 ( $y$  軸方向) に荷重が作用する場合であって、変位式はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}u_r &= -\frac{pa}{E_1 E_2} \left[ (2E_2 + \sqrt{E_1 E_2}) \cos^2 \varphi - \sqrt{E_1 E_2} \sin^2 \varphi \right] \\ u_\varphi &= \frac{2pa}{E_1 E_2} (\sqrt{E_1 E_2} + E_2) \sin \varphi \cos \varphi\end{aligned} \quad \dots \dots \quad (27)$$



また  $\delta=90^\circ$  の場合は 図-2(b) のごとく水平方向(x軸方向)に荷重が作用する場合であり、変位式は

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\frac{pa}{E_1 E_2} \{-\sqrt{E_1 E_2} \cos^2 \varphi + (2E_1 + \sqrt{E_1 E_2}) \sin^2 \varphi\} \\ u_\varphi &= -\frac{2pa}{E_1 E_2} (\sqrt{E_1 E_2} + E_1) \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

したがって一般に弾性主軸が鉛直および水平方向にあり、それぞれの方向に地山荷重  $p$  やび  $q$  が作用するときのトンネル周縁の変位式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} u_r &= -\frac{a}{E_1 E_2} [\{2pE_2 + \sqrt{E_1 E_2}(p-q)\} \cos^2 \varphi \\ &\quad + \{2qE_1 - \sqrt{E_1 E_2}(p-q)\} \sin^2 \varphi] \\ u_\varphi &= \frac{2a}{E_1 E_2} [\sqrt{E_1 E_2}(p-q) + pE_2 - qE_1] \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ゆえにこの場合にはつぎのような上下盤間および側壁間の直径の変化を生ずる(図-2 参照)。

$$\left. \begin{aligned} A\overline{AA} &= -\frac{4pa}{E_1} - \frac{2a}{\sqrt{E_1 E_2}} (p-q) \\ A\overline{BB} &= -\frac{4qa}{E_2} + \frac{2a}{\sqrt{E_1 E_2}} (p-q) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

このように主弾性係数が鉛直および水平方向をとり、かつ地山荷重が鉛直方向に作用する場合に対して、Sonntag, G.<sup>9)</sup> はつぎのようにして上盤Aおよび側壁Bの変位を求めている。まず上盤Aの変位は、

$$(u_r)_A = -\frac{pa}{E_1} - \frac{1}{E_1} \int_{r=a}^{\infty} [p - \sigma_r(\varphi=0^\circ)] dr \quad (31)$$

上式において最初の項はトンネルが穿たれる前の半径  $a$  の短縮(すなわちA点の変位)に当り、積分の項はトンネルの開削による影響を与える。また側壁Bの変位(水平半径の増加)はつぎのようになる。

$$(u_r)_B = \frac{1}{E_2} \int_{r=a}^{\infty} \sigma_r(\varphi=90^\circ) dr \quad (32)$$

(31), (32) 式において  $\sigma_r$  は Sawin, G.N. によってつぎのように計算されている。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(\varphi=0^\circ) &= p + \frac{pa}{\beta_1 - \beta_2} \\ &\quad \left\{ \frac{\beta_1^2}{a(1-\beta_1)} \left( 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2(1+\beta_1^2)}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_2^2}{a(1-\beta_2)} \left( 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 - a^2(1+\beta_2^2)}} \right) \right\} \\ \sigma_r(\varphi=90^\circ) &= -\frac{pa}{\beta_1 - \beta_2} \\ &\quad \left\{ \frac{1}{a(1-\beta_1)} \left( 1 - \frac{\beta_1 r}{\sqrt{a^2 - \beta_1^2(r^2 - a^2)}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{a(1-\beta_2)} \left( 1 - \frac{\beta_2 r}{\sqrt{a^2 + \beta_2^2(r^2 - a^2)}} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

上式を(31)式および(32)式に代入して積分すれば、 $\varphi=0$  に対して鉛直および水平方向の直径の変化はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} A\overline{AA} &= -\frac{2pa}{E_1} \left( 2 + \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \right) \\ A\overline{BB} &= \frac{2pa}{\sqrt{E_1 E_2}} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

上式は(27)式の変位式より特別な場合( $\varphi=0^\circ$ およ

び  $90^\circ$ )として求められるものにほかならない。測定された変形量から地山荷重を推定する場合に便利なように(30)の第1式を变形すると、

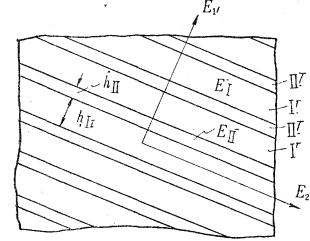
$$\frac{p}{E_1} \cdot \frac{2a}{A\overline{AA}} = \frac{-1}{\left\{ 2 + \left( 1 - \frac{q}{p} \right) \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \right\}} \quad (35)$$

さらに水平方向と鉛直方向直径の変化量の比を求めればつぎのようになり、その比  $A\overline{BB}/A\overline{AA}$  を測定することにより地山荷重の比  $q/p$  を推定することができる。

$$\frac{A\overline{BB}}{A\overline{AA}} = \frac{-2q/p \cdot \sqrt{E_1/E_2} + (1-q/p)}{-2\sqrt{E_2/E_1} - (1-q/p)} \quad (36)$$

なお緒言においてもすこし述べたように、地山が異なる弾性性質をもつ弾性層の互層となるごとき場合でも、層間の接着が十分であって層間に相対変位を生じないときには、地山全体としての等値主弾性係数を考えることによって以上述べ

た解析方法を用いることができる。いま特別な場合として図-3に示すとく地山が2種の異なる弾性体の規則正しい互層よりなっている場合を考える。



実際には地山全体がこのような状態にあることはまれであるが、トンネルを掘削する付近の地山が局部的にこのような状態とみなせる場合が考えられる。この場合には全体として考えられる等値主弾性係数  $E_1$  および  $E_2$  は、

$$E_1 = \frac{(h+h')EE'}{hE+h'E'}, \quad E_2 = \frac{hE+h'E'}{h+h'} \quad (37)$$

で与えられるから、この値を用いてさきと同様に取扱えばよい。

## 5. 計算結果およびその考察

つぎに種々の主弾性係数比およびその方向を与えて計算した結果を述べる。計算に用いられた主弾性係数比は

$$E_1/E_2 = 1/10, 1/8, 1/6, 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 6, 8, 10$$

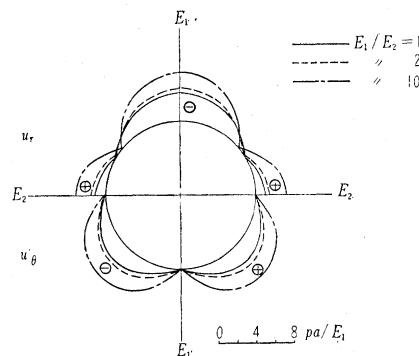
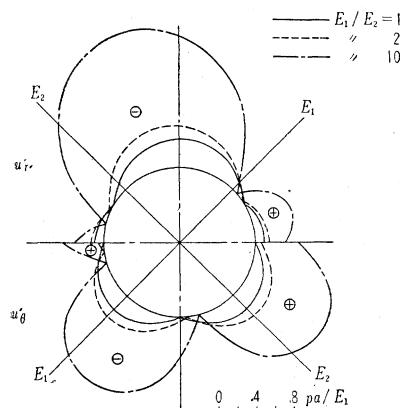
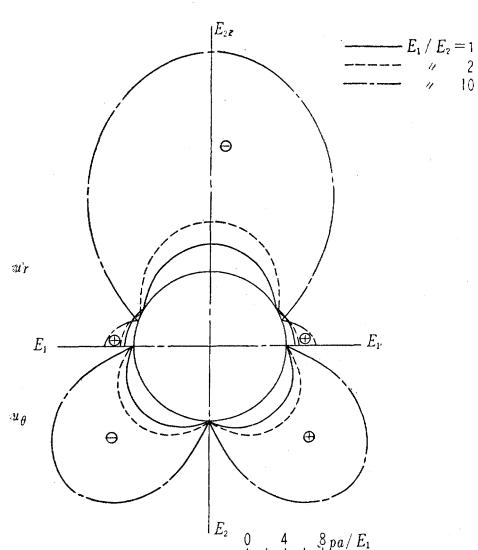
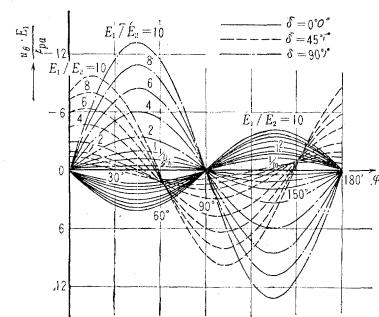
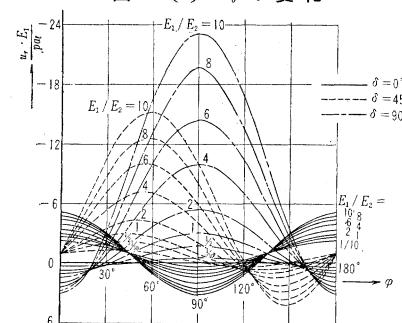
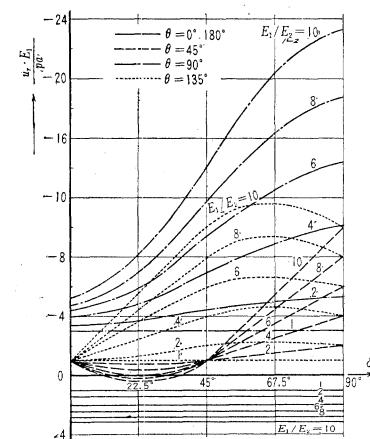
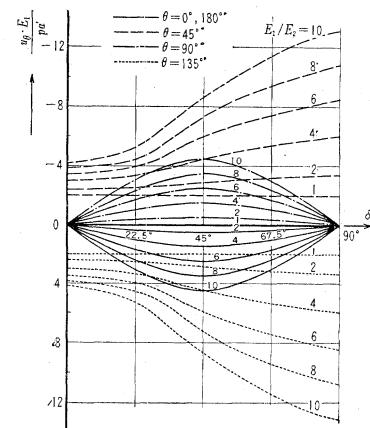
であり、そのおのおのについて荷重方向と主弾性係数  $E_1$  の方向(x軸方向)とのなす角  $\delta$  を、

$$\delta = 0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ, 90^\circ$$

にとって、地山荷重  $p$  が鉛直方向に作用する場合を考える。これらの値を用いて  $\beta_1$  および  $\beta_2$  を求め、さらに(20)式および(21)式より素掘円形トンネル周縁の半径、切線方向の変位を算出するつぎのようである。いま2, 3の場合にたいする周縁の変位状態を図示すると

図-4(a), (b), (c) のようである。図-4には  $E_1/E_2 = 1, 2, 10$  の場合が対比して示されており、これらの図からつぎのことが明らかになる。一般に主弾性係数比が大きいほど半径、切線方向変位とも増加する。この場合主弾性係数の方向  $\delta$  に対しても変位量は大いに影響され

る。 $\delta=90^\circ$ に近づくほど、すなわち小さい方の主弾性係数の方向が地山荷重の方向に近づくほど変位量はいちじるしく大きくなり、 $E_1/E_2$ の増大とともに変位量の増加の傾向もまた大きくなる。これらの変位量におよぼす地山の異方性の影響をさらに明らかにするために、半径方向変位  $u_r \cdot E_1/pa$  および切線方向変位  $u_\theta \cdot E_1/pa$  と

図-4 (a)  $\delta=0^\circ$ 図-4 (b)  $\delta=45^\circ$ 図-4 (c)  $\delta=90^\circ$ 図-5 (a)  $u_r$  の変化図-5 (b)  $u_\theta$  の変化図-6 (a)  $u_r$  の変化図-6 (b)  $u_\theta$  の変化

トンネル周縁の各点（主弾性係数  $E_1$  からの角度  $\phi$  で表わす\*）との関係を  $\delta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  の場合について  $E_1/E_2$  をパラメーターとして図示すれば、図-5(a), (b) のようである。さらにトンネル周縁上の各点 ( $\theta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ$ ) における変位量と主弾性係数の方向  $\delta$  との関係を  $E_1/E_2$  をパラメーターとして図示すれば 図-6(a), (b) のようになる。図-6より判るごとく荷重方向と垂直な位置にあるトンネル周縁の点（この場合はトンネル側壁、 $\theta=0^\circ, 180^\circ$ ）における半径方向変位  $u_r$  は主弾性係数の方向  $\delta$  には無関係に一定であり、ただ地山の主弾性係数比  $E_1/E_2$  の値によってのみ変化する。しかしこの点の半径方向変位量は  $E_1/E_2$  の値の変化に対してもほかの部分ほど大きな変化は示さない。これに対して  $\theta=90^\circ$  の位置（上下盤）における  $u_r$  は  $E_1/E_2$  が大きいほど、なおかつ  $\delta$  が増大するほど急激に増加することはこの図から一層はっきりとされる。また切線方向変位  $u_\theta$  については、 $\theta$  が  $45^\circ$  および  $135^\circ$  付近でほかの部分よりも変位量が大きく、その値はさきと同様に  $E_1/E_2$  および  $\delta$  の増加によってかなり増加する。ここでとくに興味のあるのはトンネル側壁および上下盤における

図-7

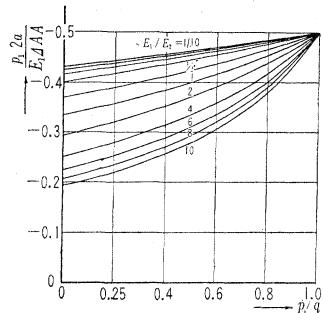
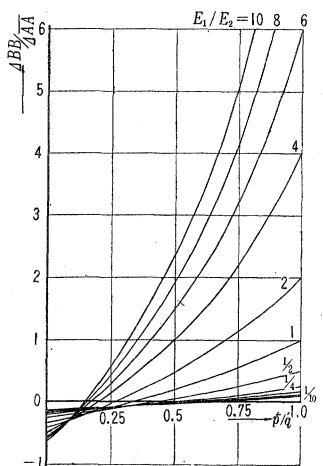


図-8



\* トンネルの水平直径の位置からの角度  $\theta$  との関係を示すべきであるが、図中の曲線が重なるため、変位量の変化する傾向を見やすくするために  $\phi$  に対する関係を図示した。

る切線方向変位量がいずれの  $\delta$  に対しても大きさ等しく符号反対の値を示すことであり、さらにその値は  $\delta=45^\circ$  の場合に最大となる。

つぎに主弾性係数の方向が鉛直および水平方向をとり、鉛直および水平に地山荷重  $p$  および  $q$  が作用する場合に対して鉛直直径の変化  $\Delta AA$  と荷重比  $p/q$  の関係を(35)式より求め、さらに水平直径と鉛直直径の変化の比  $\Delta BB/\Delta AA$  と荷重比  $p/q$  の関係を(36)式により計算して、それらの結果を  $E_1/E_2$  をパラメーターとして図示すればそれぞれ 図-7 および 図-8 のようになる。この場合直径の短縮を負にとっている。図-8によればこのような場合鉛直方向の主弾性係数が水平方向のそれよりも大きいほど上下盤の変形量に対して側壁の変形量は大きく、とくに水平方向荷重が増大すれば側壁のトンネル空間への移動は極度に大きくなることが判る。

## 6. 結 語

直交異方性弾性地山におけるトンネル周辺の変位に対する式を導き、さらに特別な場合として主弾性係数の方向に作用する2軸的な地山荷重によるトンネルの変形に対する式を算出した。その後種々の主弾性係数比およびその方向を与えて数値計算を行ない、それらの結果よりトンネル周縁の変位におよぼす地山状態の異方性の影響について考察した。ここで行なった数値計算では計算を容易に行なうために  $\nu=0$  と仮定したが、 $\nu$  の影響は地山の弾性係数の影響よりも小さく思われ、また地山の異方性の変化による変位状態の変化傾向を知る上にも  $\nu=0$  とおいてさしつかないと考えられる。しかし実際に  $\nu$  および  $G$  の値が地山材料に対して与えられている場合でも上に導いた式より同様に計算することができる。

この計算結果よりつぎのような興味あることが明らかにされた。

(1) 1 方向に地山荷重が作用する場合、荷重の方向と垂直な位置にあるトンネル周縁の点（荷重方向が鉛直の場合には  $\theta=0^\circ, 180^\circ$  の側壁にあたる）における半径方向変位  $u_r$ （あるいは水平直径の変化）は主弾性係数の方向  $\delta$  には無関係に一定であり、ただ地山の主弾性係数比  $E_1/E_2$  によってのみ変化する。

(2) 上下盤におけるトンネル空間への変位 ( $u_r$ ) は  $\delta$  が大きいほど、また  $E_1/E_2$  が大きいほど急激に大きくなる。

(3) トンネル周縁の切線方向変位は  $\theta=45^\circ, 135^\circ$  付近でもっとも大きく、それらの値は  $E_1/E_2$  および  $\delta$  の増加によってかなり増大する。また側壁の  $u_\theta$  は  $\delta$  のどの値においても上下盤における  $u_\theta$  と同じ大きさ（反対符号）の値を示す。さらにその値は  $\delta=45^\circ$  の場合に最大となる。

(4) 弾性主軸が鉛直、水平方向にあり、両方向に地

山荷重が作用するとき、鉛直方向主弾性係数が水平方向のそれよりも大きいほど上下盤の変形量に対して側壁の変形量は大きく、この状態でとくに水平荷重が増大すれば側壁のトンネル空間への移動は極度に大きくなる。

以上は素掘円形トンネルを対象にして理論的考察を行なったが、今後はさらに円形トンネルが巻立てを有する場合の応力および変位に対する理論式を導き、地山の異方性が巻立てトンネルの周辺岩盤や覆工の応力および変位状態におよぼす影響について研究をなす考えである。終りに本研究に際して終始御指導を頂いた京都大学 村山教授、丹羽教授に対して感謝の意を表する次第である。

## 参考文献

- 1) 小田英一：粘弹性体としての地山中の素掘円形トンネルの変形挙動

- について、土木学論文集、第 68 号、p. 41. 昭和 35 年 5 月  
 2) 池田 健：直交異方性板の平面応力に就いて、東京帝國大学航空研究所報告、第 19 卷第 10 冊、第 259 号、昭和 18 年 7 月  
 3) Lechnizki, S.G.: Anisotrope Platten, s. 100~108, OGIS Staatstechn. Verl., 1947  
 4) Sonntag, G.: Einfluß der Anisotropie auf die Beauspruchung des Gebirges in der Umgebung von Stollen, Der Bauingenieur, 33 Heft 8, 1958.  
 5) Sawin, G.N.: Spannungserhöhung am Rande von Löchern, s. 27~s. 36, s. 167~s. 174, VEB. Verlag Technik Berlin, 1956  
 6) 例えば倉西正嗣：弹性学、p. 586, 日本機械学会  
 7) 5) と同じ、s. 173  
 8) Timoshenko, S. and J.N. Goodier : Theory of Elasticity, p. 80, McGraw-Hill Book Company, Second Edition.  
 9) 4) と同じ s. 290

(原稿受付: 1960.7.6)

土木学会論文集第 69 号・別冊 (3-3) 正誤表  
正員 小松定夫：変断面連続箱桁橋の立体的応力解析

ページ	行	誤	正
8	下から 8	$T_{sb}(x) + \dot{T}_{sb}(x) + T^* T_{st}(x)$	$\dot{T}_{sb}(x) + T^* T_{st}(x)$
13	22	$\dot{F}_i(x_n)$	$\dot{F}_i(x_n)$
15	下から 15	不統点	不連続点
16	9	$\dot{M}_{wb}$	$\dot{M}_{wb}$
16	下から 7	$R_{n\pm} = \frac{5}{6} A l U_{n\pm} B_{n\pm}$	$R_{n\pm} = \frac{5}{6} A l U_{n\pm} B_{n\pm}$
25	6	(a) 項	(1) 項
25	7	(b) 項	(2) 項
26	1	(b) 項	(2) 項
28	11	(c) 項	(3) 項
32	中段	図-18 2 次ねじりモーメント $T_w$	図-18 St. Venant ねじりモーメント $\dot{T}_w$
33	1	図-19 St. Venant ねじりモーメント $\dot{T}_s$	図-19 2 次ねじりモーメント $\dot{T}_s$

## 表 の 訂 正

ページ	表	SPAN	行	列	誤	正
21	11	CENTER	12	12	0	-1
21	11	SIDE	8	8	0	-1
27	18	SIDE	2	8	-0. 3 7 7 6 6 7	-0. 3 7 6 6 7
29	22	SIDE	2	7	0. 9 5 0 5 5	0. 9 5 0 5 3
29	22	SIDE	3	7	0. 9 5 0 5 5	0. 9 5 0 5 3
30	23	CENTER	9	11	0. 0 5 9 1 8	0. 0 5 2 6 1
30	24	SIDE	2	6	0. 0 9 7 7 5	1. 0 9 7 7 5