

流砂ある河川における平衡勾配について

正員 増 田 重 臣*
正員 河 村 三 郎**

ON THE EQUILIBRIUM BED SLOPE IN RIVERS WITH SEDIMENT TRANSPORT

By *Siqomi Masuta, C.E. Member, and Saburō Kōmura, C.E. Member*

Synopsis: In this paper, the authors theoretically analyzed the equilibrium bed slope in rivers with sediment transport with gradually varied width and same width of rectangular cross sections, in consideration of the new developments in the many researches of flowing water and sediment transport in open channels. Combining the equations of motion and continuity for non-uniform steady flow with the equations of motion (formula for sediment transportation) and continuity for sediment transport and the equations of the resistance law for flowing water with sediment transport, the authors introduced the fundamental equation of the equilibrium bed slope in rivers with sediment transport by solving the equation of motion for non-uniform steady flow. Furthermore, the authors introduced the formulas of the equilibrium bed slope in rivers with sediment transport with gradually varied width and same width of rectangular cross sections from above fundamental equation.

Last of all, a numerical example was added to demonstrate the method of application to a river with sediment transport.

要 旨 本論文では、開水路における流水と流砂の多くの研究における最近の新しい発展を取り入れて、矩形断面で漸変する巾および一様な巾を有する流砂河川の平衡勾配を理論的に解析したものである。著者らは、不等速定流の運動方程式と連続式、流砂の運動方程式（流砂量公式）と連続式、そして流砂をとまらう流水の抵抗法則の式を組み合わせ、不等速定流の運動方程式を解くことにより流砂河川における平衡勾配の基礎方程式を導いた。さらに、矩形断面で漸変する巾および一様な巾を有する流砂河川の平衡勾配の式を前述の基礎方程式から求めた。最後に、流砂河川への応用方法を示すために計算例をつけ加えた。

1. 緒 言

人為的に全然手を加えたことのない自然の河道は、水とともに上流から下流へ土砂が輸送され、流水のもつ水理特性と河道を構成している土砂との間に適当な釣合関係がもたらされて、いわゆる平衡断面（安定断面ともいう）が形成される。流水によって河床土砂が全然移動せず洗掘も堆積も起こらないような河道は、通常の河川には存在しない。したがって、われわれは動的平衡状態にある河道をもって安定河道としなければならない。動的平衡状態にある河道とは、 $4x$ だけ離れた2断面において、上流断面からこの $4x$ 区間に流入してくる流砂量が下流断面を通り $4x$ 区間から出て行く流砂量に等しい河道である¹⁾。われわれは、洪水に対して常に十分な断面を維持することはもちろん、河床に対しても自然変動を起こさせず動的に平衡な河道を設計し、維持するようにつとめねばならない。河川改修に当たっては、この河床の平衡、不平衡ということは他の水理学的資料と同様にきわめて大切なものであり、重要な一つの基本事項である。

河道断面の平衡条件としては、従来は河道を構成している土砂の平衡を問題として限界掃流力から関係式を導いていたが^{2),3)}、厳密には、前述したごとく河道のすべての断面において流砂量が等しいことを必要とする。動的平衡の基本条件式は $dQ_T/dx=0$ 、 $Q_T=Q_S'+Q_B$ である。ここに x は流下距離、 Q_S' 、 Q_B および Q_T はそれぞれ河道断面の浮遊流砂量、掃流砂量および全流砂量である。従来の式は、不等速定流の運動方程式を解くことができなかつたから、一様断面について、限界掃流力と河床を構成している土砂の粒径との関係、および流水の連続式から近似的に平衡勾配を求めている^{2),3)}。本論文は、従来の研究から一歩進めて前述の動的平衡の条件式を使用し流砂河川における平衡勾配を理論的に解析したものである。

* 岐阜大学教授、工学部土木工学教室

** 岐阜大学助手、工学部土木工学教室

2. 基礎方程式の誘導

流れ方向に x 軸をとり、流水が平衡に達した状態を考えれば、不等速定流であるから運動方程式と連続式は

$$I = i - \frac{dh}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{U^2}{2g} \right) + \frac{U_*^2}{gR} \dots\dots\dots (1)$$

$$Q = AU = A_0 U_0 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 I : 水面勾配、 i : 河床勾配、 h : 水深、 U : 平均流速、 g : 重力の加速度、 R : 径深、 U_* : 摩擦速度、 A : 流水の断面積、添字 0 は基準点 ($x=0$) を示している。

断面を巾の広い矩形断面であると見なせば

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{U^2}{2g} \right) &= -\frac{Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dx} \\ &= -\frac{Q^2}{gB^2 h^3} \frac{dh}{dx} - \frac{Q^2}{gB^2 h^2} \frac{dB}{dx} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

(3) 式において $Q^2/gB^2 = h_c^3$ とおき (1) 式に代入し

$$i = \left(1 - \frac{h_c^3}{h^3} \right) \frac{dh}{dx} - \frac{h_c^3}{Bh^2} \frac{dB}{dx} + \frac{U_*^2}{gR} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 B : 河川巾、 h_c : 限界水深

抵抗法則としては、河床砂の移動による粗度の増加に対して、相当粗度 k_s を導入して、そのときの抵抗法則を一般に次式で表わす。

$$\frac{U}{U_*} = A_r - 2.5 + 5.75 \log_{10} \left(\frac{R}{k_s} \right) \dots\dots\dots (5)$$

A_r は断面形の効果を考えない時 $A_r=8.5$ 、断面形の効果を考慮する時 $A_r=8.75$ 、普通 $A_r=8.5$ を使用している。(5) 式は (4) 式の運動方程式を解く場合、非常に複雑であるから (R/k_s) のある範囲内で (5) 式に近似し得る式として指数形式で表示した次式を使用する。

$$\frac{U}{U_*} = E \left(\frac{R}{k_s} \right)^q \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 E と q はある常数である。 E は Powell⁴⁾ が指適しているように、Manning 公式が (R/k_s) の全域で一般法則 (5) 式と一致するためには、一定と見なし得ないのであって次式で与えられる

$$E = \frac{k_s^q}{ng^{1/2}} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 n は Manning の粗度係数である。 E を近似的に一定と見なした式は、Einstein, H.A. と Barbarossa, N.L.⁵⁾ が Manning 公式と Strickler 公式を使用して次式を求めている。

$$\frac{U}{U_*} = 7.66 \left(\frac{R}{k_s} \right)^{1/6} \dots\dots\dots (8)$$

(8) 式からわかるように、 $q=1/6$ であり、 E は (R/k_s) の 1~1000 の範囲内では 7~8 程度である。

流水の抵抗法則として (5) 式あるいは (6) 式をとるとき、相当粗度 k_s については、 (k_s/d_s) と掃流力を表わす無次元量 $U_*^2/[(\sigma/\rho)-1]gd_s$ との関数形を一般に次式で表わす。

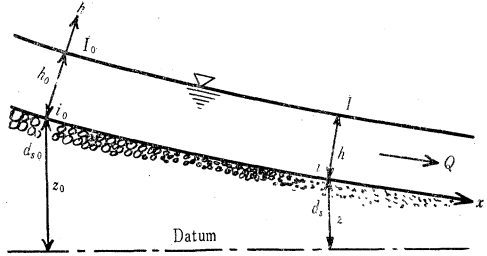
$$\left(\frac{k_s}{d_s} \right) = K \left[\frac{U_*^2}{\left\{ \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) - 1 \right\} gd_s} \right]^m \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 d_s : 平均粒径、 σ : 砂礫の密度、 ρ : 水の密度、 K と m はある常数である。この形に相当する実験式として、岩垣博士⁶⁾ の実験式があり、滑面固定床水路において底面に砂が堆積することなく、限界と思われるまで、なるべく多くの砂を流すようにして実験を行ない、移動河床の砂澱不発生の状態と類似の現象を得て、その測定値より砂澱が発生していない状態について次式を提案した。

$$\left(\frac{k_s}{d_s} \right) = 10 \left[\frac{U_*^2}{\left\{ \left(\frac{\sigma}{\rho} \right) - 1 \right\} gd_s} \right]^{0.769} \dots\dots\dots (10)$$

(10) 式は砂澱の発生していない Smooth Bed の場合に比較的よく適合することが知られている⁷⁾。

図-1



また、椿博士と古屋氏⁹⁾は次元解析により

$$\left(\frac{k_s}{d_s}\right) = F \left\{ \frac{U_*^2}{\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right) - 1\right\} g d_s}, \frac{U_* d_s}{\nu} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

の関数形を導き、そして $U_* d_s / \nu$ よりも $U_*^2 / \left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right) - 1\right\} g d_s$ の方が重要な無次元量であるとして、実測された諸河川の観測結果を用いて次式を提案した。ここに、 ν は動粘性係数である。

$$\log_{10} \left(\frac{k_s}{d_s}\right) = 3.48 \left[1 - 0.225 \left\{ \frac{U_*^2}{\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right) - 1\right\} g d_s} \right\}^{-1/2} \right] \dots\dots\dots (12)$$

(12) 式は勾配 0.001~0.0015, 水深 10~310 cm, 平均粒径 0.27~0.796 mm の河川の資料から得られたものであるが、砂漣の発生している水路においてよく適合することが確かめられている⁷⁾。(12) 式の m の値を求めると $m=3$ である。

松梨氏⁷⁾は Gilbert, G.K. の資料と著者自身の資料より、Dune から Antidune への遷移領域として出現する Smooth Bed と限界掃流直後の Smooth Bed の状態に対して次式を提案している。

$$\left(\frac{k_s}{d_s}\right) = K \left[\frac{U_*^2}{\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right) - 1\right\} g d_s} \right]^3 \dots\dots\dots (13)$$

m の値としては、以上のことから(文献 6),7),8) から考察して) 河床が比較的滑かで砂漣の発生がない時 $m=2$, 砂漣が発生している時は $m=3$ をとればよいようである。

流砂の運動方程式として Brown, C.B. の実験式の形を使用する⁹⁾。

$$\frac{q_s}{U_* d_s} = a_s \left[\frac{U_*^2}{\left\{\left(\frac{\sigma}{\rho}\right) - 1\right\} g d_s} \right]^p \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 a_s と p は、ある常数であって、Brown の実験式では $a_s=10$, $p=2$ である。 q_s は浮遊流砂量もふくめた単位中、単位時間当りの流砂量である。

流砂の連続式は、ある基準面から測った河床面の高さを z とし、下流方向に x 軸をとれば次式で表わされる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{B(1-\lambda)} \frac{\partial (q_s B)}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 λ は空けき率 % を 100 で割って示したものである。

河床が時間的に変動しない、すなわち、動的な平衡状態にあるならば

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 0, \text{ゆえに } \frac{\partial}{\partial x} (q_s B) = 0 \text{ である。}$$

この流砂の動的平衡条件から得られた流砂の連続式は

$$Q_s = q_s B = q_{s0} B_0 = \text{const.} \dots\dots\dots (16)$$

q_s, q_{s0} は (14) 式より

$$\left. \begin{aligned} q_s &= U_*^{(1+2p)} d_s^{(1-p)} a_s \{(\sigma/\rho) - 1\}^{-p} g^{-p} \\ q_{s0} &= U_{*0}^{(1+2p)} d_{s0}^{(1-p)} a_{s0} \{(\sigma/\rho) - 1\}_0^{-p} g_0^{-p} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

(17) 式を (16) 式に代入し、 $\{(\sigma/\rho) - 1\} = \{(\sigma/\rho) - 1\}_0, g = g_0, a_s = a_{s0}$ であるから

$$\frac{U_*}{U_{*0}} = \left(\frac{B_0}{B}\right)^{\left(\frac{1}{1+2p}\right)} \left(\frac{d_{s0}}{d_s}\right)^{\left(\frac{1-p}{1+2p}\right)} \dots\dots\dots (18)$$

(4) 式の摩擦項は (18) 式を使用して

$$\frac{U_*^2}{gR} = \frac{U_{*0}^2}{gR} \left(\frac{B_0}{B}\right)^{\left(\frac{2}{1+2p}\right)} \left(\frac{d_{s0}}{d_s}\right)^{\left(\frac{2-2p}{1+2p}\right)}$$

$U_{*0}^2 = gR_0 I_0$ とおき、 $(R_0/R) = (h_0/h)$ を代入して

$$\frac{U_*^2}{gR} = I_0 \left(\frac{h_0}{h}\right) \left(\frac{B_0}{B}\right)^{\left(\frac{2}{1+2p}\right)} \left(\frac{d_{s0}}{d_s}\right)^{\left(\frac{2-2p}{1+2p}\right)} \dots\dots\dots (19)$$

(h_0/h) を求めるために (6) 式と (9) 式から U と U_0 を求めると

$$\left. \begin{aligned} U &= U_*^{(1-2mq)} E R^q K^{-q} d_s^{(m-1)q} \{(\sigma/\rho) - 1\}^{mq} g^{mq} \\ U_0 &= U_{*0}^{(1-2mq)} E_0 R_0^q K_0^{-q} d_{s0}^{(m-1)q} \{(\sigma/\rho) - 1\}_0^{mq} g_0^{mq} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

(20) 式を (2) 式に代入して $\{(\sigma/\rho) - 1\} = \{(\sigma/\rho) - 1\}_0$, $g = g_0$, $E = E_0$, $K = K_0$, $(R_c/R) = (h_0/h)$ であるから

$$\frac{U_*^2}{U_{*0}^2} = \left(\frac{B_0}{B}\right) \left(\frac{1}{1-2mq}\right) \left(\frac{h_0}{h}\right) \left(\frac{1+q}{1-2mq}\right) \left(\frac{d_{s0}}{d_s}\right) \left(\frac{mq-q}{1-2mq}\right) \dots\dots\dots (21)$$

(18) 式と (21) 式から (h_0/h) を得る。

$$\left(\frac{h_0}{h}\right) = \left(\frac{B}{B_0}\right) \frac{(2mq+2p)}{(1+2p)(1+q)} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right) \frac{(3mq-2pq-q+p-1)}{(1+2p)(1+q)} \dots\dots\dots (22)$$

(22) 式を (19) 式に代入して整理すれば、摩擦項は次のごとくになる。

$$\frac{U_*^2}{gR} = I_0 \left(\frac{B}{B_0}\right) \frac{(2mq-2q+2p-2)}{(1+2p)(1+q)} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right) \frac{(3mq-3q+3p-3)}{(1+2p)(1+q)} \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{(2mq-2q+2p-2)}{(1+2p)(1+q)} = b, \quad \frac{(3mq-3q+3p-3)}{(1+2p)(1+q)} = f \quad \text{とおけば, (23) 式は}$$

$$\frac{U_*^2}{gR} = I_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)^b \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^f \dots\dots\dots (23)'$$

同様に, $\frac{(2mq+2p)}{(1+2p)(1+q)} = k, \quad \frac{(3mq-2pq-q+p-1)}{(1+2p)(1+q)} = j$ とおけば, (22) 式は

$$\left(\frac{h_0}{h}\right) = \left(\frac{B}{B_0}\right)^k \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^j \dots\dots\dots (22)'$$

(22)' 式を x で微分して

$$\frac{dh}{dx} = -h_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)^{-k} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^{-j} \left[\frac{k}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{j}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \dots\dots\dots (24)$$

(22)' 式, (23)' 式, (24) 式を (4) 式に代入して, 平衡勾配 i に関する基礎方程式を得る。

$$i = I_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)^b \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^f - h_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)^{-k} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^{-j} \left[\frac{k}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{j}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] + \frac{h_c^3}{h_0^2} \left(\frac{B}{B_0}\right)^{2k} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^{2j} \left[\frac{(k-1)}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{j}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \dots\dots\dots (25)$$

(25) 式の基礎方程式において $B(x)$, $d_s(x)$ の関数形が与えられれば平衡勾配 i を求めることができる。

河床高 z は, $i = -(dz/dx)$ であるから次式で与えられる。

$$z = z_0 - \int_0^x i dx \dots\dots\dots (26)$$

3. 巾が $B = B_0 e^{ax}$ にて漸変する場合

巾が $B = B_0 e^{ax}$ にて漸変する場合の平衡勾配 i と河床高 z に関する式を (25) 式および (26) 式を使用し て求めてみよう。 e^{ax} の a は, $x > 0$ に行くにしたがい巾が拡大する場合には $a > 0$, 縮小する場合には $a < 0$ である。

$$B = B_0 e^{ax}, \quad dB/dx = aB_0 e^{ax}, \quad h_c^3 = h_{c0}^3 e^{-2ax} \dots\dots\dots (27)$$

ここに, $h_{c0}^3 = Q^2/gB_0^2$ である。粒径 d_s は, 河道を流下するにしたがい $d_s = d_{s0} e^{-cx}$ にて変化するものとする。この c は Sternberg の摩擦係数 c' と異なり, あとに述べるごとく $c' = 3c$ である。 c を粒径の減少係数と呼ぶことにする。

$$d_s = d_{s0} e^{-cx}, \quad dd_s/dx = -cd_{s0} e^{-cx} \dots\dots\dots (28)$$

(27) 式と (28) 式を (25) 式の基礎方程式に代入して, 平衡勾配 i に関する式を得る。

$$i = I_0 e^{(ab-cf)x} + (cj-ak) h_0 e^{(cj-ak)x} + \frac{h_{c0}^3}{h_0^2} (ak-cj-a) e^{(2ak-2cj-2a)x} \dots\dots\dots (29)$$

$$(ab-cf) \neq 0, \quad (cj-ak) \neq 0, \quad (2ak-2cj-2a) \neq 0$$

河床高 z に関する式は (29) 式を (26) 式に代入し, 積分して次式を得る。

$$z = z_0 - \frac{I_0}{(ab-cf)} [e^{(ab-cf)x} - 1] - h_0 [e^{(cj-ak)x} - 1] - \frac{h_{c0}^3}{2h_0^2} [e^{(2ak-2cj-2a)x} - 1] \dots\dots\dots (30)$$

4. 巾が $B = B_0(1+\xi x)^\beta$ にて漸変する場合

巾が $B = B_0(1+\xi x)^\beta$ にて漸変する場合も, 3. に述べた場合と同様に求めることができる。ここに, ξ, β は巾の変化によって決まる常数である。 ξ は $x > 0$ に行くにしたがい巾が拡大する場合 $\xi > 0$, 縮小する場合 $\xi < 0$ である。なお, $\beta = 1$ の時は巾が直線的に漸変する場合であり, $\xi = 0, \beta = 0$ の時は巾が一定な場合である。この

場合にも粒径の変化は、 $d_s = d_{s0}e^{-cx}$ で変化するものとする。

$$\left. \begin{aligned} B &= B_0(1+\xi x)^\beta, \quad dB/dx = B_0\beta\xi(1+\xi x)^{\beta-1} \\ h_e^3 &= h_{e0}^3(1+\xi x)^{-2\beta}, \quad d_s = d_{s0}e^{-cx}, \quad dd_s/dx = -cd_{s0}e^{-cx} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

(31) 式を (25) 式に代入して平衡勾配 i に関する式を得る。

$$\begin{aligned} i &= I_0(1+\xi x)^{\beta b}e^{-cfx} + h_0[cj - \beta\xi k(1+\xi x)^{-1}](1+\xi x)^{-\beta k}e^{cix} \\ &\quad - \frac{h_{e0}^3}{h_0^2}[cj - \beta\xi(k-1)(1+\xi x)^{-1}](1+\xi x)^{(2k\beta-2\beta)}e^{-2cix} \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

河床高 z は (32) 式を (26) 式に代入して

$$\begin{aligned} z &= z_0 - \int_0^x i dx = z_0 + \int_0^x \frac{h_{e0}^3}{h_0^2}[cj - \beta\xi(k-1)(1+\xi x)^{-1}](1+\xi x)^{(2k\beta-2\beta)}e^{-2cix} dx \\ &\quad - \int_0^x h_0[cj - \beta\xi k(1+\xi x)^{-1}](1+\xi x)^{-\beta k}e^{cix} dx - \int_0^x (1+\xi x)^{\beta b}e^{-cfx} dx \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

上式は一般に積分できないから、この場合の河床高は、(32) 式で i を求め、この i と x および $x=0$ の断面における河床高 z_0 を使用して求めればよい。

5. 巾が一定の場合

(32) 式において $\xi=0, \beta=0$ とおけば、巾が一定である場合の平衡勾配 i に関する式を得る。

$$i = I_0e^{-cfx} + cjh_0e^{cix} - \frac{h_{e0}^3}{h_0^2}cje^{-2cix} \dots\dots\dots (34)$$

(34) 式は、(29) 式において $a=0$ とおいても得られる。

河床高 z に関する式は、(33) 式において $\xi=0, \beta=0$ を代入し、積分して次式を得る。

$$z = z_0 + \frac{I_0}{cf}[e^{-cfx} - 1] - h_0[e^{cix} - 1] - \frac{h_{e0}^3}{2h_0^2}[e^{-2cix} - 1] \dots\dots\dots (35)$$

(35) 式は (30) 式において $a=0$ とおいても得られる。

6. 河道を微小区間に分割し、その区間の河床高の差から求める方法

$i = -dz/dx$ であるから、基礎方程式 (25) 式を使用して

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= -I_0\left(\frac{B}{B_0}\right)^b\left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^f + h_0\left(\frac{B}{B_0}\right)^{-k}\left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^{-j}\left[\frac{k}{B}\frac{dB}{dx} + \frac{j}{d_s}\frac{dd_s}{dx}\right] \\ &\quad - \frac{h_{e0}^3}{h_0^2}\left(\frac{B}{B_0}\right)^{2k}\left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)^{2j}\left[\frac{(k-1)}{B}\frac{dB}{dx} + \frac{j}{d_s}\frac{dd_s}{dx}\right] \end{aligned}$$

上式の関係から、計算しようとしている区域を n 個の区間に分割した場合、この分割した、ある一つの Δx_η 区間における河床高の差 Δz_η は次のごとく表示し得る。

$$\begin{aligned} \Delta z_\eta &= -I_0\left(\frac{B}{B_0}\right)_m^b\left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)_m^f \Delta x_\eta + h_0\left(\frac{B}{B_0}\right)_m^{-k}\left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)_m^{-j}\left[k\left(\frac{B_0}{B}\right)_m\left(\frac{\Delta B}{B_0}\right) + j\left(\frac{d_{s0}}{d_s}\right)_m\left(\frac{\Delta d_s}{d_{s0}}\right)\right] \\ &\quad + \frac{h_{em}^3}{h_0^2}\left(\frac{B}{B_0}\right)_m^{2k}\left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)_m^{2j}\left[(1-k)\left(\frac{B_0}{B}\right)_m\left(\frac{\Delta B}{B_0}\right) - j\left(\frac{d_{s0}}{d_s}\right)_m\left(\frac{\Delta d_s}{d_{s0}}\right)\right] \dots\dots\dots (36) \end{aligned}$$

ここに、添字 m は Δx_η 区間における平均値を示し、 ΔB および Δd_s は Δx_η へだてた両端の B および d_s の差である。

ΔB は ($x>0$) 上流に基準点を取り下流へ向かって計算する場合に、断面が拡大する時 $\Delta B>0$ 、縮小する時 $\Delta B<0$; ($x<0$) 下流に基準点を取り上流へ向かって計算する場合に、断面が拡大する時 $\Delta B>0$ 、縮小する時は $\Delta B<0$ である。 Δd_s は上流に基準点を取り下流へ向かって計算する場合には、下流に行くにしたがい d_s が増加する時 $\Delta d_s>0$ 、減少する時 $\Delta d_s<0$ である。下流に基準点を取り上流に向かかって計算する場合には、上流に行くにしたがい d_s が増加する時 $\Delta d_s>0$ 、減少する時 $\Delta d_s<0$ である。 h_{cm}^3 は $h_{cm}^3 = Q^2/gB_m^2$ である。

n 個に分割した、ある η の点における河床高 z_η は

$$z_\eta = z_0 + \sum_{\eta=0}^{\eta} \Delta z_\eta \dots\dots\dots (37)$$

$$(\eta = 0, 1, 2, \dots, n; \Delta z_0 = 0)$$

n 個に分割した最後の $\Delta x_{\eta=n}$ の区間における $(d_s/d_{s0})_m$ が $(d_s/d_{s0})_m \equiv 1$ であるような、流下にとまらう粒径の変化が少ない河川では (36) 式に $(d_s/d_{s0})_m \equiv 1, (\Delta d_s/d_{s0}) \equiv 0$ を代入して

$$\Delta z_{\eta} = -I_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^b \Delta x_{\eta} + kh_0 \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^{-(k+1)} \left(\frac{\Delta B}{B_0}\right) + (1-k) \frac{h_{cm}^3}{h_0^2} \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^{(2k-1)} \left(\frac{\Delta B}{B_0}\right) \dots (38)$$

(36) 式, (38) 式は不規則な巾を持つ河川の平衡勾配, および 不規則な巾を持つ河川に設けられた砂防ダム等の堆砂勾配を求める場合に非常に有用なものとなるであろう。

流砂ある河川の平衡勾配を求める場合も, 水面計算と同様に, 射流であれば上流に基準点をとり下流へ向かって計算を行ない, 常流であれば下流に基準点をとり上流へ向かって計算を行なえばよい。

7. b, f, j, k の値

b, f, j, k の値は, $p=2, q=1/6$ を使用するとそれぞれ次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} b &= \frac{(2mq-2q+2p-2)}{(1+2p)(1+q)} = \frac{(2m+10)}{35}, & f &= \frac{(3mq-3q+3p-3)}{(1+2p)(1+q)} = \frac{(3m+15)}{35} \\ j &= \frac{(3mq-2pq-q+p-1)}{(1+2p)(1+q)} = \frac{(3m+1)}{35}, & k &= \frac{(2mq+2p)}{(1+2p)(1+q)} = \frac{(2m+24)}{35} \end{aligned} \right\} \dots (39),$$

$m=2$ を使用するときは, $b=2/5, f=3/5, j=1/5, k=4/5$ となる。

8. 粒径減少係数 c と Sternberg の摩耗係数 c' との関係

砂礫粒の重量減少については Sternberg, H.²⁾ (1875) の法則があり, Sternberg の法則は W なる重量を有する砂礫粒が dx なる距離を流下する間に dW だけ重量を減ずるものとすれば, $-dW$ は Wdx に比例する。摩耗係数 (重量減少係数) を c' で表わせば, $-dW=c'Wdx, \therefore \log_e W = -c'x + c_1, x=0$ の点における砂礫粒が W_0 であるから $c_1 = \log_e W_0$ ゆえに

$$(W/W_0) = e^{-c'x} \dots (40)$$

c' は石質や形状に関係する。粒径減少については, 粒径減少係数を c とすれば Sternberg, H. と同様に次式をうる。

$$(d_s/d_{s0}) = e^{-cx} \dots (41),$$

砂礫粒を球形と仮定すれば次式をうる。

$$(W/W_0) = (d_s/d_{s0})^3 \dots (42)$$

(42) 式に (40) 式と (41) 式の関係代入して, $c' = 3c$ をうる。ゆえに, 粒径減少係数は摩耗係数の約 $1/3$ である。

9. 基準点における水面勾配 I_0 の決定方法

(1) 未平衡河川における I_0 の決定方法

基準点にとる場所は, 基準点付近の河川巾がほぼ一様であり, 河床が滑らかで, しかも変動がなく等流状態になるような場所にとるべきである。動的平衡の条件は, 河道のいずれの断面においても総流砂量 Q_s が等しいことを必要としているから, 平衡勾配を計算する場合の水面勾配 I_0 は, 動的平衡の条件式から得られた流砂の連続式, (16) 式を満足する Q_s から求めるべきである。ゆえに, この場合の I_0 は平衡を達成した時の基準点における水面勾配を表わしており, 未平衡河川では, 出水時の I_0 の観測値と異なる値を与える訳である。

a) 流送流砂量に制限がない場合 (16)式と(17)式の q_{s0} から, $U_{*0} = [Q_s d_{s0}^{(p-1)} \{(\sigma/\rho) - 1\}_0^p g^p / a_{s0} B_0]^{1/(1+2p)}$ 等流に近い状態の流れを有する地点では

$$I_0 = \frac{1}{gR_0} \left[\frac{Q_s d_{s0}^{(p-1)} \{(\sigma/\rho) - 1\}_0^p g^p}{a_{s0} B_0} \right]^{2/(1+2p)}, \quad R_0 = \frac{B_0 h_0}{B_0 + 2h_0}$$

$x=0$ の点では, $g, d_{s0}, \{(\sigma/\rho) - 1\}_0, a_{s0}, B_0$ は常数であるから, 一般に次式で表わしうる。

$$I_0 = \varepsilon \left[2 + \left(\frac{B_0}{h_0}\right) \right] Q_s^{2/(1+2p)}, \quad \varepsilon = \frac{1}{B_0} \left[\frac{d_{s0}^{(p-1)} \{(\sigma/\rho) - 1\}_0^p}{a_{s0} B_0 g^{1/2}} \right]^{2/(1+2p)} \dots (43)$$

Brown の実験式における $p=2, a_s=10$ を代入すると

$$I_0 = \varepsilon \left[2 + \left(\frac{B_0}{h_0}\right) \right] Q_s^{2/5}, \quad \varepsilon = \frac{1}{B_0} \left[\frac{d_{s0} \{(\sigma/\rho) - 1\}_0^2}{10 B_0 g^{1/2}} \right]^{2/5} = \text{const.} \dots (43)'$$

$h_0 = \text{const.}$ とすると, 水面勾配 I_0 は総流砂量 Q_s の $2/5$ 乗に比例していることが知られる。

総流砂量 Q_s の決定方法は, まず最初に, 計算しようとしている流量 Q に対応する各地点の総流砂量 $Q_{s\eta}$ を求める。 $Q_{s\eta}$ は, (5)式において $A_r=8.5$ を用い $R \doteq h, k_s \doteq d_{65}$ とおけば

$$U_* = Q/Bh[6.0 + 5.75 \log_{10}(h/d_{65})] \dots\dots\dots (44)$$

ここに、 d_{65} は通過率 65% に相当する粒径である。

任意の地点における $Q_{s\eta}$ は (16) 式と (17) 式の q_s より

$$Q_{s\eta} = a_s B U_*^{(1+2p)} / g^p d_s^{(p-1)} \{(\sigma/\rho) - 1\}^p \dots\dots\dots (45)$$

(44) 式と (45) 式から

$$Q_{s\eta} = \frac{a_s Q^{(1+2p)}}{g^p d_s^{(p-1)} \{(\sigma/\rho) - 1\}^p B^2 p h^{(1+2p)}} \left[6.0 + 5.75 \log_{10} \left(\frac{h}{d_{65}} \right) \right]^{-(1+2p)} \dots\dots\dots (46)$$

Brown の実験式における $p=2$, $a_s=10$ を代入すると

$$Q_{s\eta} = \frac{10 Q^5}{g^2 d_s \{(\sigma/\rho) - 1\}^2 B^2 h^5} \left[6.0 + 5.75 \log_{10} \frac{h}{d_{65}} \right]^{-5} \dots\dots\dots (46)'$$

(46)' 式を使用して各地点の $Q_{s\eta}$ を求める。つぎに、これらの $Q_{s\eta}$ の平均値を求め、この $Q_{s\eta}$ の平均値を Q_s とする。ゆえに、この場合の水面勾配 I_0 は計算しようとしている河川に、流砂の連続式 (16) 式を満足して流送し得る総流砂量 Q_s , h_0 , B_0 , d_{s0} , $\{(\sigma/\rho) - 1\}_0$ が与えられれば (43)' 式を用いて求めることができる。

b) 流送流砂量に制限がある場合 河川の下流部あるいは計算区域内のある断面において、流送しうる流砂量に、ある最大の制限があるときは、 Q_s として、その限界値をとる。この Q_s を使用して (43)' 式により I_0 を求める。ゆえに、流送し得る限界流砂量 Q_s に対応する限界流量も求めることができる。

e) 計算区域内に、絶対に河床高の変化をさせられない地点がある場合 計算区域内のある地点 (例えば、仮りに D とする) に床固め、伏越等の河川構造物が設けられており、河床を変動させられないとき、この地点の河床面に、(25) 式の基礎方程式から得られる平衡曲線が通るように I_0 を求めるには、前述したように、各地点の $Q_{s\eta}$ を求め、これら各地点の $Q_{s\eta}$ の平均値を Q_s とし、この Q_s を使用して I_0 を仮定する。この仮定した I_0 を使用して平衡曲線を計算し、 D 点を平衡曲線が通るように Q_s を少しずつ変化させて、試算により Q_s および I_0 を決定し、 D 点をとる平衡曲線をうる。

(2) 平衡河川における I_0 の決定方法

すでに平衡状態にある河川における、基準点の I_0 を求めるには (1) の場合と同様に、基準点を巾がほぼ一様であり、河床が滑らかでしかも変動がなく、等流状態になるような場所にとる。

a) (1) の方法により求める場合 (1) の場合と同様に各地点の $Q_{s\eta}$ を求め、これらの $Q_{s\eta}$ の平均値を Q_s として (43)' 式から I_0 を求める。

b) 基準点における Q_{s0} から求める場合 すでに平衡状態にあれば、いずれの断面においても $Q_s = Q_{s\eta}$ であるから基準点における総流砂量 Q_{s0} を (46)' 式から求め、この Q_{s0} を使用して (43)' 式により I_0 を求める。

e) 流量 Q から求める場合 (44) 式を用いて、 $Q^2/gB_0^2 = h_{c0}^3$ とおけば

$$I_0 = \left(\frac{h_{c0}}{h_0} \right)^3 \left[6.0 + 5.75 \log_{10} \left(\frac{h_0}{d_{65}} \right) \right]^{-2} \dots\dots\dots (47)$$

(47) 式において Q , B_0 , h_0 , d_{65} が与えられれば I_0 を求めることができる。

d) 出水時における I_0 の観測値を使用する場合

e) 基準点における河床勾配 i_0 を使用する場合

a) の方法以外の b), e), d), e) の方法により求めた I_0 は、平衡勾配および河床高を計算する前に b), c), d), e), の方法で求めた I_0 を使用して 2, 3 の地点について求めた Q_s と比較し妥当な I_0 であるかどうか必ず検討しなければならない。もし、(43)' 式を使用して求めた Q_s が 2, 3 の地点について (46)' 式を使用して求めた値と非常に異なる場合は、その河川は未平衡河川であるから (1) の方法により計算しなければならない。

10. 河道設計における計画河床勾配および計画河床高の決定法

従来、計画河床勾配および計画河床高は、現河川の河床にならって経験的に決定されてきた。ゆえに、流砂の面からこれらを合理的に決定することが強く要望されている。どんな河川においても多かれ少なかれ、上流からの流送砂礫が存在するから、流砂の観点に立って、これら計画河床勾配および計画河床高は決定されるべきである。

いま、計画高水 (洪水) 流量を Q とすると、この Q に対応する流砂量は (46)' 式を用い前述の方法により決定できる。この決定された流砂量を計画流砂量 Q_s と呼ぶことにする。この計画流砂量 Q_s を使用して基準点における水面勾配 I_0 を求める。かくて、計画高水流量 Q に対応する計画流砂量 Q_s および基準点の水面勾

配 I_0 が求められたから $B(x)$, $d_s(x)$ の関数形, 計画高水流量に対応する基準点の水深 h_0 および基準点の河床高 z_0 が与えられれば, 平衡勾配および河床高が求められる。この求められた平衡勾配を計画河床勾配に, 河床高を計画河床高にとればよい。

11. 計 算 例

揖斐川支流, 牧田川 (岐阜県) について計算例を示そう。牧田川は昭和 28 年 9 月の 13 号台風のとき甚大な被害を受けた。この台風直後から河川改修計画の立案のために縦断測量, 横断測量および平面測量が昭和 30 年 3 月に行なわれた。著者らは, これらの測量と同時期に (昭和 30 年 8 月) 牧田川, 中流部の断面番号 No. 83, 91, 103, 112, 124, 134, 145 の各横断面内にて, それぞれ 2~3 カ所ずつ, 河床表面より 1m 程度掘り下げた部分の砂礫を採取した。これら採取試料の粒度分析の結果から, この論文に必要な d_s と x の関係, d_{65} と x の関係および最大粒径 $d_{s,max}$ と x の関係を 図-2 に示す。

この計算例は, 基準点を断面番号 No.82 にとり上流へ向かって No.148 まで計算する場合を示す。粒径減少係数 c は,

$$(d_s/d_{s0}) = e^{c \cdot x}, \quad (x > 0) \dots\dots\dots (48)$$

(48) 式を使用して, 最少自乗法により c を求めればよい。

著者らの場合は $c = 0.11 \text{ km}^{-1}$ を得た。

昭和 28 年の 13 号台風時における最大洪水流量は $1200 \text{ m}^3/\text{sec}$ であった (当時の計画高水流量は $850 \text{ m}^3/\text{sec}$)。この流量は砂礫が移動を開始し河床に影響を与える限界掃流力以上であり, 断面番号 No.82~No.148 の区域においては $h \geq h_c$ であるから, 下流に基準点をとって上流へ向かって計算する。この出水時の No.82 の断面における水理諸量と計算に必要な諸量は $Q = 1200 \text{ m}^3/\text{sec}$, $h_0 = 2.76 \text{ m}$, $B_0 = 137 \text{ m}$, $z_0 = 4.22 \text{ m}$, $c = 0.11 \text{ km}^{-1}$, $(\sigma/\rho) = 2.585$, $d_{s0} = 0.018 \text{ m}$, $Q_s = 0.29 \text{ m}^3/\text{sec}$ (計画流砂量) を得たから (43)' 式より $I_0 = 0.00235$, $m = 2$ を使用することにすれば $b = 2/5$, $f = 3/5$, $j = 1/5$, $k = 4/5$ である。

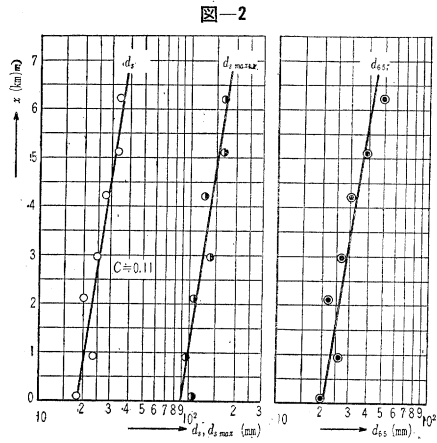


図-2

(1) 河道を微小区間に分割し, その区間の河床高の差から求める方法の計算例

前述の諸量を (36) 式および (37) 式に代入し, 整理して次式をうる。

$$\Delta z_\eta = 0.00235 \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^{2/5} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)_m^{3/5} \Delta x_\eta + 0.522 \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^{-4/5} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)_m^{-1/5} \left[4 \left(\frac{B_0}{B}\right)_m \left(\frac{\Delta B}{B_0}\right) + \left(\frac{d_{s0}}{d_s}\right)_m \left(\frac{\Delta d_s}{d_{s0}}\right) \right] + 0.02625 h_{cm}^3 \left(\frac{B}{B_0}\right)_m^{3/5} \left(\frac{d_s}{d_{s0}}\right)_m^{2/5} \left[\left(\frac{B_0}{B}\right)_m \left(\frac{\Delta B}{B_0}\right) - \left(\frac{d_{s0}}{d_s}\right)_m \left(\frac{\Delta d_s}{d_{s0}}\right) \right] \dots\dots\dots (49)$$

$$z_\eta = 4.22 + \sum_{\eta=0}^{\eta} \Delta z_\eta \dots\dots\dots (50)$$

ここに, $\Delta x_\eta > 0$, $\eta = 0, 1, 2, \dots, 33$, $\Delta z_0 = 0$

(49), (50) 式を使用して求めた z_η と x_η の関係および実際河川の実測河床高 z_p と x との関係, B と x の関係を 図-3 に示した。

(2) 巾が一定な場合の計算例

(1) と比較するために, 不規則な巾を有する牧田川を巾が一定と見なして計算して見よう。この場合は, 指数計算が便利なように, すべて km 単位で計算する。計算に必要な諸量は

$$Q = 1.2 \times 10^6 \text{ km}^3/\text{sec},$$

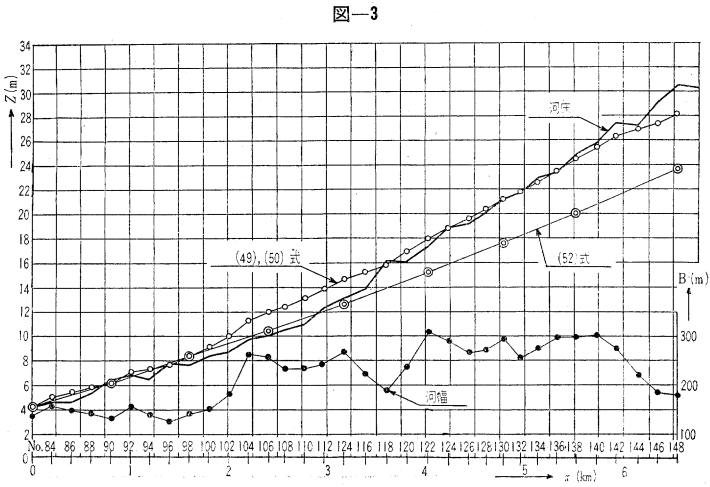


図-3

$h_0=0.00276$ km, $B_0=0.137$ km, $z_0=0.00422$ km, $I_0=0.00235$, $cf=0.066$ km⁻¹, $cj=0.022$ km⁻¹, $h_{e0}=7.8303 \times 10^{-9}$ km³ である。

これらの諸数値を(34)式および(35)式に代入し、整理してそれぞれ次式を得る。(x>0)

$$i=0.00235 e^{0.066x} + 0.000061 e^{-0.022x} - 0.000023 e^{0.044x} \dots\dots\dots (51)$$

$$z=0.00422 + 0.035606[e^{0.066x} - 1] + 0.00276[1 - e^{-0.022x}] - 0.000514[e^{0.044x} - 1] \dots\dots\dots (52)$$

(52)式の z と x の関係を(1)の(49), (50)式による結果と比較するために図-3に示した。

(3) 計算結果に関する考察

(49)式および(50)式から求めた結果は、河川巾の広い所では、河床が高く、河川巾が狭い所では反対に河床が低く計算され巾の変化に似た傾向を示している。

この河川には、約200~400m間隔に床固めがあるため、例えば、No.96とNo.118は河川巾が狭いにもかかわらず実際河川の河床が高くなっている。図-3からわかるように、No.82~No.124の間は、まだ砂礫の堆積を続けるであろうし、No.148の付近は、なお一層の洗掘を受けるであろうことが推察される。実際河川では、No.96~No.118の間は、砂礫の堆積が多く、13号台風後の河道整正の際、しゅんせつと堤防のかき上げを行なった。また、No.140付近の床固めは洪水時の掃流力により洗掘され、床固めが吊橋のような状態になっていた。

(52)式による結果は、不規則な巾を有する河川を巾が一定と見なしているから、当然、実際河川と比較することはできないけれども、(49)式、(50)式による結果と比較すると巾の変化が平衡勾配にどれほどの影響を与えているかを知り得る。不規則な巾を有する河川において、河川巾をほぼ一定になるよう河川改修を行なう際に、(34)式および(35)式を使用すれば、その計画立案に役立つであろう。

12. 結 言

(1) 動的平衡の条件を用いて誘導した平衡勾配 i の基礎方程式は、 $B(x)$, $d_s(x)$ の関数形が与えられれば平衡勾配 i および河床高 z を求めることができるから河道設計、河川改修計画、捷水路の設計、捷水路設置後の将来の河床変動の推定、等に役立つであろう。

(2) 従来、河道設計における計画河床勾配および計画河床高等の決定は現河川の河床にならってほとんど経験により決定されてきたのであるが、河道設計において非常に重要である計画河床勾配および計画河床高を合理的に決定する一つの方法を提案することができた。

(3) (36)式および(37)式の使用による河道を微小区間に分割し、その区間の河床高の差から求める方法は、複雑な巾を有する河川の河床高と平衡勾配、複雑な巾を有する溪流に設けられた砂防ダムの貯砂勾配、等の計算に有用なものとなるであろう。なお、(38)式の使用に際しては、計算の最後の区間における $(d_s/d_{s0})_m$ が $(d_s/d_{s0})_m \approx 1$ であることが絶対に必要である。 $(d_s/d_{s0}) \geq 1$ の場合は、 d_s の変化が河床高の計算に誤差を与えることになるから(38)式の適用に際しては、 $(d_s/d_{s0}) \approx 1$ であるかどうか十分の検討を行なって使用すべきである。

本論文の平衡勾配を動的平衡勾配と呼ぶことにするとこの動的平衡勾配に対して、限界掃流力の条件を使用し求めた平衡勾配は静的平衡勾配と呼ぶことができる。

最後に、この研究に対して終始御指導を賜った京都大学防災研究所石原英雄助教授および種々の御討議を賜った京都大学工学部長 石原教授、防災研究所 矢野教授、岩垣教授、足立助教授に深く感謝するとともに、多大の御援助を頂いた前岐阜県河川課長 片岡 武氏(千葉県土木部長)、宮崎虎太郎氏(大阪府河川課長)ならびに岐阜県河川課の各位に謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 佐藤清一：河道の設計について、土木学会誌，第42巻，第4号，昭和32年4月
- 2) 物部長種：水理学，岩波書店，1950，p.260
- 3) 安芸政一：河相論・主として河相と河川工法との関係性についての研究，其の2，土木学会誌，第27巻，第11号，昭和16年11月，p.1049
- 4) Powell, R.W.: Resistance to Flow in Smooth Channel, Trans. A.G.U., Vol.30, No.6, Dec., 1949
- 5) Einstein, H.A. and N.L. Barbarossa: River Channel Roughness, Proc. A.S.C.E., Vol.77, July, 1951
- 6) 岩垣雄一：雨水流による地面浸食機構に関する基礎的研究，1955
- 7) 松梨順三郎：開水路における移動床の不安定性について，河床変動の実験資料についての検討，土木学会論文集，第62号，1959
- 8) 椿東一郎・古屋朝治：流砂ある河川における流速法則について，九大流体工学研究所報告，第7巻，第4号，1951
- 9) Rouse, H.: Engineering Hydraulics, 1949, p.798