

# 河川の静的平衡勾配について

正員 増田重臣\*  
正員 河村三郎\*\*

## ON THE STATIC EQUILIBRIUM BED SLOPE IN RIVERS

By Shigeomi Masuta, C.E. Member, and Saburō Kōmura, C.E. Member

**Synopsis:** In the previous paper, the authors theoretically analysed (dynamic) equilibrium bed slope in rivers with sediment transport. In this paper, the authors theoretically analysed static equilibrium bed slope in rivers, as well as dynamic equilibrium bed slope in rivers with sediment transport.

Combining the equations of motion and continuity for non-uniform steady flow with the condition of critical tractive force, the authors introduced the fundamental equation of static equilibrium bed slope in rivers, by solving this equation of motion for non-uniform steady flow. From this fundamental equation, the authors introduced the equations of static equilibrium bed slope in rivers with gradually varied width and same width.

**要旨** 著者らは、前論文において流砂ある河川における（動的）平衡勾配を理論的に解析した。本論文は、流砂ある河川における動的平衡勾配と同様に河川の静的平衡勾配を理論的に解析したものである。

著者らは、不等速定流の運動方程式と連続式、および限界掃流力の条件を組み合わせる不等速定流の運動方程式を解くことにより河川における静的平衡勾配の基礎方程式を誘導した。この基礎方程式から巾の漸変する河川および一様な巾を有する河川の静的平衡勾配の式を導いた。

### 1. 緒言

前論文において<sup>1)</sup>、著者らは流砂の動的平衡の条件を与えて、流砂があっても河床が変動しない動的平衡勾配を理論的に解析した。本論文では、土砂礫が全然移動せず河床が洗掘も堆積も生じない静的な平衡勾配を限界掃流力の条件を使用して理論的に解析した。静的平衡勾配は、実際河川において流量が洪水流量よりも相当少ない場合に、局部的に存在しうるが河川全体が同時に限界掃流力の状態になることは、実際に存在しない（人工的には作りうる）。しかしながら、一定流量を流下する用水路、排水路、運河等を設計するときは、土砂礫を流送せしめない限界の勾配、すなわち、静的平衡勾配をとって限界掃流力以下の掃流力で流下しうる開水路を設計することが望ましい。ゆえに、静的平衡勾配は、土砂礫の流送をなるべくさげねばならない開水路（農業用水路、排水路、工業廃水路、運河等）の設計に役立つであろう。

静的平衡勾配の研究は、古くからなされておられ、わが国では、物部博士<sup>2)</sup>、安芸博士<sup>3)</sup>らの研究がある。これらの研究は、河巾が一定の場合についてのみなされておられ、河巾が不規則に変化する実際河川および開水路に適用するには多くの問題点を残していた。著者らは、不等速定流の運動方程式を流水の連続式と限界掃流力の条件を組み合わせることで解くことにより、静的平衡勾配の基礎方程式を誘導した。この基礎方程式から巾が漸変する場合、一定の巾を有する場合などの静的平衡勾配の式を導き、著者らの巾が一定の場合の式と物部博士の式、安芸博士の式と比較した。その結果、物部博士の式および安芸博士の式は、不等速定流の運動方程式において慣性項を省略し、摩擦項のみから静的平衡勾配を求めた式に近似的に等しいことが明らかとなった。

### 2. 基礎方程式の誘導

限界掃流力に関する実験公式は、古くから数多くのものが提案されている。そのおもなものは、Shields, White, Schoklitsch, Krey, Kramer, U.S.W.E.S., Indri, Chang, 安芸, 佐藤, 境, 栗原, 岩垣などの各公式があるが、砂礫移動開始の機構を理論的に取り扱ったものは非常に少なく White, C.M., 栗原博士, 岩垣博士のものがあるだけである。本論文では、岩垣公式<sup>4)</sup>を使用することにする。

\*岐阜大学教授 工学部土木工学教室

\*\*岐阜大学助手 工学部土木工学教室

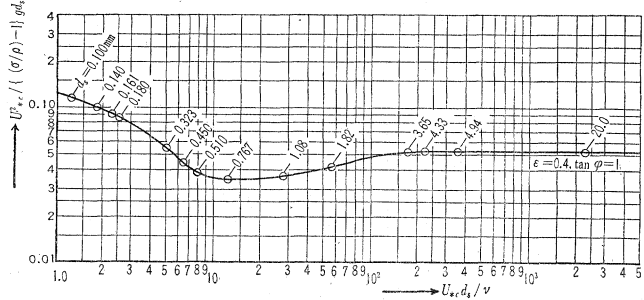
岩垣公式は、一般につきのごとく示しうる。

$$U_{*c}^2 = \frac{\tau_c}{\rho} = a_c \left\{ \left( \frac{\sigma}{\rho} \right) - 1 \right\} g d_s \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $d_s$  : 平均粒径、 $\sigma$  : 砂礫の密度、 $\rho$  : 水の密度、 $g$  : 重力の加速度、 $\tau_c$  : 底面の限界摩擦応力  $a_c : U_{*c} d_s / \nu$  の値によって決定しうる常数である ( $\nu$  : 動粘性係数)。

この  $a_c$  の決定は、岩垣博士の  $U_{*c}^2 / \{ (\sigma/\rho) - 1 \} g d_s$  と  $U_{*c} d_s / \nu$  との関係を表わした 図-1 を使用して決定する<sup>1)</sup>。

図-1



図中の  $d_s$  の位置は、岩垣博士の実験値を記入したものと、Liu, H.K.<sup>5)</sup> の論文 “Mechanics of Sediment-Ripple Formation” の討議において Albertson, M.L., Simons, D.B., および Richardson E.V.<sup>6)</sup> が示している 図-A の中に、Shields の限界掃流曲線の代りに岩垣博士の限界掃流曲線を記入し、その図の  $U_{*c}/W$ ,  $d_s$ ,  $U_{*c} d_s / \nu$  の関係を  $U_{*c}^2 / \{ (\sigma/\rho) - 1 \} g d_s$ ,  $d_s$ ,  $U_{*c} d_s / \nu$  の関係に変換して  $d_s$  の位置を記入したものである ( $W$  は沈降速度である)。例えば、 $d_s = 0.767$  mm のときの  $a_c$  は、図-1 を使用して  $U_{*c}^2 / \{ (\sigma/\rho) - 1 \} g d_s = 0.034$  であるから  $a_c = 0.034$  をうる。

静的平衡状態にある河川では、任意の2地点でつぎの関係式が成り立つ。

$$\frac{\tau_c}{\tau_{c0}} = \frac{\rho U_{*c}^2}{\rho_0 U_{*c0}^2} = \frac{\rho U_*^2}{\rho_0 U_{*0}^2} = \frac{\rho a_c \{ (\sigma/\rho) - 1 \} g d_s}{\rho_0 a_{c0} \{ (\sigma/\rho) - 1 \} g_0 d_{s0}}$$

添字 0 は基準点を示している。上式において  $\rho = \rho_0$ ,  $g = g_0$ ,  $\{ (\sigma/\rho) - 1 \} = \{ (\sigma/\rho) - 1 \}_0$  であるから

$$\left( \frac{U_*}{U_{*0}} \right)^2 = \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right) \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right) \dots \dots \dots (2)$$

流水が平衡に達した状態を考えれば、不等速定流であるから運動方程式と連続式は、図-2 のごとく流れ方向に  $x$  軸をとり断面を巾の広い矩形断面と見なせば

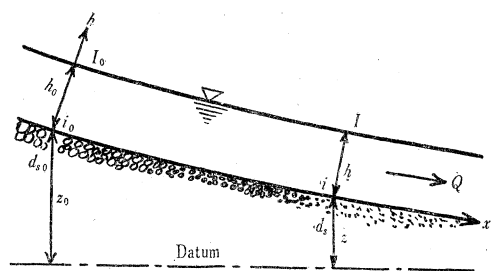
$$i = \left( 1 - \frac{h_c^3}{h^3} \right) \frac{dh}{dx} - \frac{h_c^3}{B h^2} \frac{dB}{dx} + \frac{U_*^2}{gR} \dots \dots (3)$$

$$Q = BhU = B_0 h_0 U_0 = \text{const.} \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 $i$  : 河床勾配、 $h$  : 水深、 $R$  : 径深、 $U$  : 平均流速、 $B$  : 河川巾、 $h_c$  : 限界水深  $h_c^3 = Q^2 / g B^2$ 。

抵抗法則として (5) 式を使用したいのであるが (3) 式の運動方程式を解く場合に非常に複雑であるから ( $R/k_s$ ) のある範囲内で (5) 式に近似しうる式として (6) 式を使用する<sup>1)</sup>。

図-2



$$\frac{U}{U_*} = 6.0 + 5.75 \log_{10} \left( \frac{R}{k_s} \right) \dots \dots \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{U}{U_*} &= E \left( \frac{R}{k_s} \right)^q \\ \frac{k_s}{d_s} &= K \left[ \frac{U_*^2}{\{ (\sigma/\rho) - 1 \} g d_s} \right]^m \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 $E$ ,  $K$ ,  $q$ ,  $m$  はある常数である。“流砂ある河川における平衡勾配について” の論文<sup>1)</sup> に述べたごとく、 $q = 1/5$  であり、 $m$  の値は、掃流力が限界掃流力以下であれば、砂礫は移動せず固定床における抵抗を示すから  $m = 0 \sim 1$  である。普通  $m = 0$  としている。すなわち、 $k_s = K d_s \div d_{65}$  をとっている。 $d_{65}$  は通過率 65% に相当する粒径である。

(3) 式の摩擦項は (2) 式を使用して

$$\frac{U_*^2}{gR} = \frac{U_{*0}^2}{gR} \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right) \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)$$

$U_{*0}^2 = g R_0 I_0$  とおけば ( $I_0$  : 基準点における水面勾配),

$$\frac{U_*^2}{gR} = I_0 \left( \frac{R_0}{R} \right) \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right) \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)$$

$(R_0/R) = (h_0/h)$  を代入して

$$\frac{U_*^2}{gR} = I_0 \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right) \left( \frac{h_0}{h} \right) \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right) \dots \dots \dots (7)$$

$(h_0/h)$  を求めるために (6) 式より  $U$  と  $U_0$  を求めると

$$\left. \begin{aligned} U &= U_*^{(1-2mq)} E R^q K^{-q} d_s^{(m-1)q} \{ \sigma/\rho - 1 \}^{mq} g^{mq} \\ U_0 &= U_{*0}^{(1-2mq)} E_0 R_0^q K_0^{-q} d_{s0}^{(m-1)q} \{ \sigma/\rho - 1 \}_0^{mq} g_0^{mq} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

(8) 式を (4) 式に代入して、 $\{ \sigma/\rho - 1 \} = \{ \sigma/\rho - 1 \}_0$ ,  $g = g_0$ ,  $E = E_0$ ,  $K = K_0$ ,  $(R_0/R) = (h_0/h)$  であるから

$$\frac{U_*}{U_{*0}} = \left( \frac{B_0}{B} \right) \left( \frac{1}{1-2mq} \right) \left( \frac{h_0}{h} \right) \left( \frac{1+q}{1-2mq} \right) \left( \frac{d_{s0}}{d_s} \right)^{\frac{-mq-q}{1-2mq}} \dots \dots \dots (9)$$

(2) 式に (9) 式を代入して  $(U_*/U_{*0})$  を消去して  $(h_0/h)$  をうる。

$$\frac{h_0}{h} = \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right)^{\frac{(1-2mq)}{2(1+q)}} \left( \frac{B}{B_0} \right)^{\frac{1}{(1+q)}} \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{\frac{(1-2q)}{2(1+q)}} \dots \dots \dots (10)$$

(10) 式を (7) 式に代入して、

$$\frac{U_*^2}{gR} = \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right)^{\frac{(1-2mq)}{2(1+q)}} \left( \frac{B}{B_0} \right)^{\frac{1}{(1+q)}} \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{\frac{3}{2(1+q)}}$$

$$\frac{(3+2q-2mq)}{2(1+q)} = \mu, \quad \frac{1}{(1+q)} = r, \quad \frac{3}{2(1+q)} = l \quad \text{とおけば上式は}$$

$$\frac{U_*^2}{gR} = I_0 \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right)^\mu \left( \frac{B}{B_0} \right)^r \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^l \dots \dots \dots (11)$$

$$\frac{(1-2mq)}{2(1+q)} = \varphi, \quad \frac{(1-2q)}{2(1+q)} = \lambda \quad \text{とおけば (10) 式は}$$

$$\frac{h_0}{h} = \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right)^\varphi \left( \frac{B}{B_0} \right)^r \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^\lambda \dots \dots \dots (12)$$

(12) 式を  $x$  で微分して

$$\frac{dh}{dx} = -h_0 \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right)^{-\varphi} \left( \frac{B}{B_0} \right)^{-r} \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{-\lambda} \left[ \frac{\varphi}{a_c} \frac{da_c}{dx} + \frac{r}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \dots \dots \dots (13)$$

(11) 式, (12) 式, (13) 式の間係を (3) 式に代入して静的平衡勾配  $i$  に関する基礎方程式をうる。

$$\begin{aligned} i &= I_0 \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right)^\mu \left( \frac{B}{B_0} \right)^r \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^l - h_0 \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right)^{-\varphi} \left( \frac{B}{B_0} \right)^{-r} \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{-\lambda} \left[ \frac{\varphi}{a_c} \frac{da_c}{dx} + \frac{r}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \\ &+ \frac{h_c^3}{h_0^2} \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right)^{2\varphi} \left( \frac{B}{B_0} \right)^{2r} \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{2\lambda} \left[ \frac{\varphi}{a_c} \frac{da_c}{dx} + \frac{(r-1)}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \dots \dots \dots (14) \end{aligned}$$

(14) 式において  $a_c(x)$ ,  $B(x)$ ,  $d_s(x)$  の関数形が与えられれば静的平衡勾配  $i$  を求めることができる。計算しようとしている区域内の  $d_s$  が  $d_s \geq 3$  mm であるような河川では、図-1 からわかるように  $a_c = a_{c0}$  であるから (14) 式はつきのごとくになる。

$$\begin{aligned} i &= I_0 \left( \frac{B}{B_0} \right)^r \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^l - h_0 \left( \frac{B}{B_0} \right)^{-r} \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{-\lambda} \left[ \frac{r}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \\ &+ \frac{h_c^3}{h_0^2} \left( \frac{B}{B_0} \right)^{2r} \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{2\lambda} \left[ \frac{(r-1)}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \dots \dots \dots (15) \end{aligned}$$

$d_s \geq 3$  mm では、 $(a_c/a_{c0})$  が 1~4.1 の範囲で変化することと、 $\mu$  の値が  $m=0$  としたとき  $\mu=10/7$  であるから、 $i$  の値の 90% 程度を占める (14) 式の第 1 項は大きな影響を受けることになる。ゆえに、 $d_s \geq 3$  mm における  $a_c(x)$  の決定に際しては、十分の注意が必要である。 $a_c(x)$  の決定は、最初に  $d_s(x)$  を決定し、この決定された  $d_s(x)$  を使用して  $a_c$  を図-1 から求めて  $a_c(x)$  の関数形を決定すればよい。

河床高  $z$  は、 $i = -dz/dx$  であるから次式で与えられる。

$$z = z_0 - \int_0^x i dx \dots \dots \dots (16)$$

### 3. 巾が $B = B_0 e^{ax}$ にて漸変する場合

巾の変化が  $B = B_0 e^{ax}$  で表わされる場合について述べよう。ここに、 $a$  は  $x > 0$  に行くにしたがって巾が拡大する場合に  $a > 0$ 、縮小する場合に  $a < 0$  である。粒径  $d_s$  は河道を流下するにしたがって  $d_s = d_{s0} e^{-cx}$  にて変化

しているものとする。 $(a_c/a_{c0})$  は  $(a_c/a_{c0})=1$  として静的平衡勾配  $i$  および河床高  $z$  を求める。

$$\left. \begin{aligned} B &= B_0 e^{ax}, h_c^3 = h_{c0}^3 e^{-2ax}, dB/dx = aB_0 e^{ax} \\ d_s &= d_{s0} e^{-cx}, dd_s/dx = -cd_{s0} e^{-cx}, a_c = a_{c0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

(17) 式の関係をも (14) 式に代入して、静的平衡勾配  $i$  に関する式をうる。

$$i = I_0 e^{(ar-cl)x} + (c\lambda - ar)h_0 e^{-(c\lambda - ar)x} + \frac{h_{c0}^3}{h_0^2} (ar - c\lambda - a) e^{(2ar - 2c\lambda - 2a)x} \dots\dots\dots (18)$$

$$(ar - cl) \neq 0, (c\lambda - ar) \neq 0, (ar - c\lambda - a) \neq 0$$

河床高  $z$  に関する式は (18) 式を (16) 式に代入して、積分し次式をうる。

$$z = z_0 - \frac{I_0}{(ar - cl)} [e^{(ar-cl)x} - 1] - h_0 [e^{(c\lambda - ar)x} - 1] - \frac{h_c^3}{2h_0^2} [e^{(2ar - 2c\lambda - 2a)x} - 1] \dots\dots\dots (19)$$

4. 巾が  $B = B_0(1 + \xi x)^\beta$  にて漸変する場合

巾が  $B = B_0(1 + \xi x)^\beta$  にて漸変する場合も平均粒径  $d_s$  は、 $d_s = d_{s0} e^{-cx}$  にて変化しているものとし、また  $a_c = a_{c0}$  として静的平衡勾配  $i$  および河床高  $z$  を求めよう。ここに、 $\xi, \beta$  は巾の変化によって定まる常数であつて、 $\xi$  は  $x > 0$  に行くにしたがひ巾が拡大する場合に  $\xi > 0$ 、縮少する場合に  $\xi < 0$  である。なお、 $\beta = 1$  の場合は巾が直線的に漸変する場合であり、 $\xi = 0, \beta = 0$  のときは巾が一定な場合である。

$$\left. \begin{aligned} B &= B_0(1 + \xi x)^\beta, h_c^3 = h_{c0}^3(1 + \xi x)^{-2\beta} \\ dB/dx &= \beta B_0 \xi (1 + \xi x)^{(\beta-1)}, d_s = d_{s0} e^{-cx} \\ dd_s/dx &= -cd_{s0} e^{-cx}, a_c = a_{c0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

(20) 式の関係をも (14) 式に代入して、静的平衡勾配  $i$  に関する式をうる。

$$\begin{aligned} i &= I_0(1 + \xi x)^{\beta r} e^{-clx} + h_0 [c\lambda - \beta r \xi (1 + \xi x)^{-1}] (1 + \xi x)^{-\beta r} e^{clx} \\ &\quad - \frac{h_{c0}^3}{h_0^2} [c\lambda - (r-1)\beta \xi (1 + \xi x)^{-1}] (1 + \xi x)^{(2\beta r - 2\beta)} e^{-2clx} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

河床高  $z$  は (21) 式を (16) 式に代入して

$$\begin{aligned} z &= z_0 - \int_0^x I_0(1 + \xi x)^{\beta r} e^{-clx} dx - \int_0^x h_0 [c\lambda - r\beta \xi (1 + \xi x)^{-1}] (1 + \xi x)^{-\beta r} e^{clx} dx \\ &\quad + \int_0^x \frac{h_{c0}^3}{h_0^2} [c\lambda - (r-1)\beta \xi (1 + \xi x)^{-1}] (1 + \xi x)^{(2\beta r - 2\beta)} e^{-2clx} dx \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

上式は一般に積分できないから、この場合の河床高は、(21) 式で  $i$  を求め、この  $i$  と距離  $x$ 、および  $x=0$  の点の  $z_0$  を使用して河床高  $z$  を求めればよい。

5. 巾が一定の場合

(21) 式において  $\xi = 0, \beta = 0$  を代入すれば静的平衡勾配  $i$  に関する式をうる (ただし、 $a_c = a_{c0}$  の場合)。

$$i = I_0 e^{-clx} + c\lambda h_0 e^{clx} - \frac{h_{c0}^3}{h_0^2} c\lambda e^{-2clx} \dots\dots\dots (23)$$

(23) 式は、(18) 式において  $a=0$  とおいてもえられる。

河床高  $z$  は (22) 式において  $\xi = 0, \beta = 0$  を代入して、積分し次式をうる。

$$z = z_0 + \frac{I_0}{cl} [e^{-clx} - 1] - h_0 [e^{clx} - 1] - \frac{h_{c0}^3}{2h_0^2} [e^{-2clx} - 1] \dots\dots\dots (24)$$

(24) 式は (19) 式において  $a=0$  とおいてもえられる。

6. 河道を微小区間に分割し、その区間の河床高の差から求める方法

$i = -dz/dx$  であるから基礎方程式 (14) 式を使用して

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= -I_0 \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right)^n \left( \frac{B}{B_0} \right)^r \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^l + h_0 \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right)^{-n} \left( \frac{B}{B_0} \right)^{-r} \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{-l} \left[ \frac{\varphi}{a_c} \frac{da_c}{dx} + \frac{r}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \\ &\quad - \frac{h_c^3}{h_0^2} \left( \frac{a_c}{a_{c0}} \right)^{2n} \left( \frac{B}{B_0} \right)^{2r} \left( \frac{d_s}{d_{s0}} \right)^{2l} \left[ \frac{\varphi}{a_c} \frac{da_c}{dx} + \frac{(r-1)}{B} \frac{dB}{dx} + \frac{\lambda}{d_s} \frac{dd_s}{dx} \right] \end{aligned}$$

上式の関係から、いま、計算しようとしている区域を  $n$  個の区間に分割した場合、この分割した  $\Delta x_n$  区間に於ける河床高の差  $\Delta z_n$  は、次のごとく示しうる。

$$\begin{aligned} \Delta z_\eta = & -I_0 \left( \frac{a_c}{a_{co}} \right)_m^\mu \left( \frac{B}{B_0} \right)_m^r \left( \frac{d_s}{d_{so}} \right)_m^l \Delta x_\eta + h_0 \left( \frac{a_c}{a_{co}} \right)_m^{-\varphi} \left( \frac{B}{B_0} \right)_m^{-r} \left( \frac{d_s}{d_{so}} \right)_m^{-\lambda} \\ & \times \left[ \varphi \left( \frac{a_{co}}{a_c} \right)_m \left( \frac{\Delta a_c}{a_{co}} \right) + r \left( \frac{B_0}{B} \right)_m \left( \frac{\Delta B}{B_0} \right) + \lambda \left( \frac{d_{so}}{d_s} \right)_m \left( \frac{\Delta d_s}{d_{so}} \right) \right] \\ & - \frac{h_{cm}^3}{h_0^2} \left( \frac{a_c}{a_{co}} \right)_m^{2\varphi} \left( \frac{B}{B_0} \right)_m^{2r} \left( \frac{d_s}{d_{so}} \right)_m^{2\lambda} \left[ \varphi \left( \frac{a_{co}}{a_c} \right)_m \left( \frac{\Delta a_c}{a_{co}} \right) + (r-1) \left( \frac{B_0}{B} \right)_m \left( \frac{\Delta B}{B_0} \right) + \lambda \left( \frac{d_{so}}{d_s} \right)_m \left( \frac{\Delta d_s}{d_{so}} \right) \right] \end{aligned} \quad (25)$$

$n$  個に分割した  $\eta$  の点における河床高  $z_\eta$  は、次式で与えられる。

$$z_\eta = z_0 + \sum_{\eta=0}^{\eta} \Delta z_\eta \quad (\eta=0, 1, 2, 3, \dots, n, \Delta z_0=0) \quad (26)$$

ここに、添字  $m$  は  $\Delta x_\eta$  区間における平均値を示し、 $\Delta a_c, \Delta d_s, \Delta B$  は  $\Delta x_\eta$  へたてた両端の  $a_c, d_s, B$  のそれぞれの差である。 $\Delta a_c$  は、 $d_s \geq 3 \text{ mm}$  では  $a_c = a_{co}$  であるから  $\Delta a_c = 0$  である。 $d_s \leq 3 \text{ mm}$  では、 $x > 0$  (上流に基準点をとり下流へ向かって計算する場合) に行くにしたがい  $a_c$  が減少する場合には  $\Delta a_c < 0$ , 増加する場合には  $\Delta a_c > 0$  である。 $\Delta d_s$  は  $x > 0$  に行くにしたがい  $d_s$  が減少する場合には  $\Delta d_s < 0$ , 増加する場合には  $\Delta d_s > 0$  である。 $\Delta B$  は、 $x > 0$  に行くにしたがい  $B$  が減少する場合には  $\Delta B < 0$ , 増加する場合には  $\Delta B > 0$  である。 $h_{cm}^3$  は  $h_{cm}^3 = Q^2/gB_m^2$  で与えられる。

$n$  個に分割した最後の  $\Delta x_{\eta=n}$  の区間における  $(d_s/d_{so})$  が  $(d_s/d_{so}) \equiv 1$  であるような粒径の変化が非常に小さい河川では、(25) 式に  $(d_s/d_{so}) \equiv 1, (\Delta d_s/d_{so}) \equiv 0$  を代入して

$$\begin{aligned} \Delta z_\eta = & -I_0 \left( \frac{a_c}{a_{co}} \right)_m^\mu \left( \frac{B}{B_0} \right)_m^r \Delta x_\eta + h_0 \left( \frac{a_c}{a_{co}} \right)_m^{-\varphi} \left( \frac{B}{B_0} \right)_m^{-r} \left[ \varphi \left( \frac{a_{co}}{a_c} \right)_m \left( \frac{\Delta a_c}{a_{co}} \right) + r \left( \frac{B_0}{B} \right)_m \left( \frac{\Delta B}{B_0} \right) \right] \\ & - \frac{h_{cm}^3}{h_0^2} \left( \frac{a_c}{a_{co}} \right)_m^{2\varphi} \left( \frac{B}{B_0} \right)_m^{2r} \left[ \varphi \left( \frac{a_{co}}{a_c} \right)_m \left( \frac{\Delta a_c}{a_{co}} \right) + (r-1) \left( \frac{B_0}{B} \right)_m \left( \frac{\Delta B}{B_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (27)$$

計算区域内の  $d_s$  が  $d_s \geq 3 \text{ mm}$  であれば  $(a_c/a_{co}) = 1$  であるから、さらに簡単となり

$$\Delta z_\eta = -I_0 \left( \frac{B}{B_0} \right)_m^r \Delta x_\eta + r h_0 \left( \frac{B}{B_0} \right)_m^{-(r+1)} \left( \frac{\Delta B}{B_0} \right) + \frac{h_{cm}^3}{h_0^2} (1-r) \left( \frac{B}{B_0} \right)_m^{(2r-1)} \left( \frac{\Delta B}{B_0} \right) \quad (27)'$$

(25) 式、(26) 式、(27) 式および (27)' 式の計算法は“流砂ある河川における平衡勾配について”の論文中に述べた方法と同一である。

### 7. $r, \mu, l, \varphi, \lambda$ の値

$r, \mu, l, \varphi, \lambda$  の値は  $q=1/6$  を用いるとそれぞれ次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} r = \frac{1}{(1+q)} = \frac{6}{7}, \quad l = \frac{3}{2(1+q)} = \frac{9}{7}, \quad \lambda = \frac{(1-2q)}{2(1+q)} = \frac{2}{7} \\ \mu = \frac{(3+2q-2mq)}{2(1+q)} = \frac{(10-m)}{7}, \quad \varphi = \frac{(1-2mq)}{2(1+q)} = \frac{(3-m)}{7} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$m$  の値は、2. の基礎方程式の誘導の際に述べたごとく  $m=0 \sim 1$  であり、普通  $m=0$  を使用しているから  $m=0$  を使用することにしよう。 $d_s \geq 3 \text{ mm}$  であれば  $(a_c/a_{co}) = 1$  であるから  $\mu, \varphi$  の値の大小は影響しない。すなわち、 $d_s \geq 3 \text{ mm}$  では  $m$  の値に無関係である。 $d_s \leq 3 \text{ mm}$  では  $m=0$  とおくと  $\varphi=3/7, \mu=10/7$  である。

### 8. 基準点における水面勾配 $I_0$ の決定方法

基準点にとる場所は、基準点付近の河巾がほぼ一様であり、河床滑らかで、等流状態になるような場所にとる。

(5) 式において  $R \equiv h, k_s \equiv d_{65}$  とおけば

$$U_* = \frac{Q}{Bh} \left[ 6.0 + 5.75 \log_{10} \left( \frac{h}{d_{65}} \right) \right]^{-1}$$

等流に近い流れでは、 $I_0 \equiv i_0 \equiv U_*^2/gR_0$  であるから、 $h_{co}^3 = Q^2/gB_0^2$  とおけば  $I_0$  は次式で表わされる。

$$I_0 \equiv \left( \frac{h_{co}}{h_0} \right)^3 \left[ 6.0 + 5.75 \log_{10} \left( \frac{h_0}{d_{65}} \right) \right]^{-2} \quad (29)$$

ゆえに、流量  $Q$  とその流量  $Q$  に対応する基準点の水深  $h_0$ , 河川巾  $B_0$  および  $d_{65}$  が与えられれば水面勾配  $I_0$  は、(29) 式から求めうる。

すでに、静的平衡状態であれば、水面勾配  $I_0$  の観測値を近似的に使用するか、あるいは、基準点の河床勾配  $i_0$  を近似的に使用してもよい。

9. 従来の式との比較

(1) 物部博士の式<sup>2)</sup>

物部博士は、流下による砂礫粒の重量減少については、Sternberg, H, (1875)の法則に従うものとしている。すなわち、 $(W/W_0) = e^{-c'x}$  で表わされる。ここに、 $W$  は砂礫の重量、 $c'$  は砂礫の摩耗係数である。前論文において述べたごとく<sup>1)</sup>、粒径減少係数  $c$  は  $c=c'/3$  である。つぎに、Chézy 型の流速公式を使用することとし、掃流力および平均粒径  $d_s$  が  $hI$  に比例し、砂礫重量  $W$  が  $d_s^3$  に比例することから粒径変化と水面勾配の変化の関係を導き、一定の中を有する河川の河床高  $z$  および静的平衡勾配  $i$  に関する次式を提案した。

$$z = z_0 + \frac{2}{c'} I_0 \left[ e^{-\frac{c'}{2}x} - 1 \right] - h_0 \left[ e^{\frac{c'}{6}x} - 1 \right] \dots\dots\dots (30)$$

$$i = I_0 e^{-\frac{c'}{2}x} + \frac{c'}{6} h_0 e^{\frac{c'}{6}x} \dots\dots\dots (31)$$

(2) 安芸博士の式<sup>3)</sup>

安芸博士は、限界掃流力を次式で表わした。

$$S_0 = \rho g h I = 55.7(\sigma - \rho) g \lambda' d_s \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $S_0$  は限界掃流力 ( $\text{gr/m}^2$ )、 $d_s$ : mm、 $\lambda'$  は平均粒径  $d_s$  に相当する重量百分率を  $p_m\%$  とすると次式で与えられる。

$$\lambda' = (100\% - p_m\%) / p_m\% \dots\dots\dots (33)$$

$\lambda' d_s$  と  $x$  の関係は一般に次式で与える。

$$\lambda' d_s = 10^{-\frac{x'-a}{b'}} \dots\dots\dots (34)$$

(34) 式を (32) 式に代入し、河床が静的平衡の状態にある河川では任意の2地点の間で次の関係式が成り立つものとし

$$\frac{\rho g h I}{\rho g h_0 I_0} = \frac{55.7(\sigma - \rho) g 10^{\frac{a'-x}{b'}}}{55.7(\sigma - \rho) g 10^{\frac{a'-x_0}{b'}}$$

$$\therefore \frac{I}{I_0} = \left( \frac{h_0}{h} \right) \cdot 10^{\frac{x_0 - x}{b'}} \dots\dots\dots (35)$$

つぎに、流速公式として Manning 型式を使用し、流水の連続の条件から、つぎの関係式を導いた。

$$\frac{h_0}{h} = \left( \frac{I}{I_0} \right)^{3/10} \dots\dots\dots (36)$$

静的平衡勾配  $i$  は、不等速定流の運動方程式を解くことができなかったから、 $i = I + \frac{dh}{dx}$  にて与えることにした。

この式に (35) 式および (36) 式の関係代入して、一定の中を有する河川の静的平衡勾配  $i$  に関する次式を提案した。

$$i = I_0 \cdot 10^{\frac{5(x_0 - x)}{3.5b'}} + \frac{3.45}{3.5b'} h_0 10^{\frac{1.5(x - x_0)}{3.5b'}} \dots\dots\dots (37)$$

安芸博士は、河床高  $z$  を与える式は求めていない。ゆえに、河床高  $z$  は、(37) 式から求めた  $i$ ,  $x$  および基準点における河床高  $z_0$  の値を使用して求めることにしている。

(3) 従来の式と著者らの式との比較

安芸博士の式は、次のごとく表わすこともできる。

$$i = I_0 e^{\frac{5(x_0 - x)}{3.5b' \log_{10} e}} + \frac{3.45}{3.5b'} h_0 e^{\frac{1.5(x - x_0)}{3.5b' \log_{10} e}} \dots\dots\dots (38)$$

物部博士の式および著者らの式は、 $x_0 = 0$  として静的平衡勾配  $i$  および河床高  $z$  の式を誘導しているから、著者らの式と比較するために、(38) 式において  $x_0 = 0$  とおき  $\log_{10} e = 0.4343$  を代入して

$$i = I_0 e^{-\frac{11.51}{3.5b'} x} + \frac{3.45}{3.5b'} h_0 e^{\frac{3.45}{3.5b'} x} \dots\dots\dots (38)'$$

安芸博士は、河床高  $z$  に関する式を求めていないから、(38)' 式を (16) 式に代入し、積分して河床高  $z$  に関する式を求めるとつぎのごとくである。

$$z = z_0 + \frac{3.5b'}{11.51} I_0 \left[ e^{-\frac{11.51}{3.5b'} x} - 1 \right] - h_0 \left[ e^{\frac{3.45}{3.5b'} x} - 1 \right] \dots\dots\dots (39)$$

物部博士の式 [(30)式, (31)式] および安芸博士の式 [(38)'式, (39)式] は著者らが誘導した巾が一定の場合の (23) 式, (24) 式において最後の項を省略した式に形式的に等しい。(23) 式および (24) 式の最後の項は運動方程式の慣性項に相当する。ゆえに、物部博士の式および安芸博士の式は流水の運動方程式において慣性項を省略して、摩擦項のみから求めた静的平衡勾配の式に近似的に等しいといえよう。

10. 計算例による従来の式と著者らの式との比較

前論文<sup>1)</sup> の計算例として示した牧田川について述べよう。前論文において述べたごとく<sup>1)</sup>、動的平衡勾配および静的平衡勾配は、河床勾配が水面勾配と密接な関係を持っているから、水面形の計算のように、射流であれば上流から下流へ、常流であれば下流から上流へ向かって計算することが望ましい。しかしながら、静的平衡勾配においては、流砂の存在しない状態を考えているから、かならずしも、水面形の計算のように、射流であれば上流から下流へ、常流であれば下流から上流へと計算する必要はない。計算例は、物部博士の式および安芸博士の式と比較するために巾の一定な場合について計算する(巾の変化する場合の計算方法は、前論文<sup>1)</sup> を参照のこと)。

計算しようとしている流量  $1200 \text{ m}^3/\text{sec}$  に対する水深は  $h \geq h_c$  であるが、この計算例は従来の式と著者らの式とを比較し、平衡曲線の変化の状態を知ることが目的としているから、基準点を上流 No. 148 にとり下流へ向かって No. 84 まで計算する場合を示そう。

砂礫の粒度分析から求めた  $d_s$  と  $x$ ,  $d_{65}$  と  $x$ ,  $d_{s \max}$  と  $x$ ,  $\lambda' d_s$  と  $x$  の関係を表-1 に、 $d_s$  と  $x$ ,  $d_{s \max}$  と  $x$  の関係を 図-3 に、 $\lambda' d_s$  と  $x$  および  $d_{65}$  と  $x$  の関係を 図-4 に示す。 $c$  および  $a'$ ,  $b'$  の値は、 $(d_s/d_{s0}) = e^{-cx}$  と (34) 式を用いて最小自乗法により求めればよい。われわれの場合は  $c' = 0.11 \text{ km}^{-1}$ ,  $a' = 25$ ,  $b' = 18$  をえた。計算は、すべて指数計算が便利なように  $\text{km}$  単位で行なう。計算に必要な諸量は

$$I_0 = 0.005263, \quad Q = 1.2 \times 10^6 \text{ km}^3/\text{sec}, \quad h_0 = 0.00203 \text{ km}, \quad B_0 = 0.178 \text{ km}, \quad z_0 = 0.03060 \text{ km}, \quad c = 0.11 \text{ km}^{-1},$$

表-1

No.	$x$ (km)	$d_s$ (mm)	$d_{65}$ (mm)	$d_{s \max}$ (mm)	$\lambda'$	$\lambda' d_s$ (mm)
145	0.3000	33.8	40	167.5	0.675	22.8
134	1.4160	33.3	39	165.0	0.653	21.7
124	2.3090	27.5	30	125.0	0.608	16.7
112	3.5665	24.6	27	135.0	0.600	14.8
103	4.4285	19.9	23	105.0	0.613	12.2
91	5.6285	23.4	26	95.0	0.623	14.6
83	6.4355	18.3	20	105.0	0.582	10.7

図-3

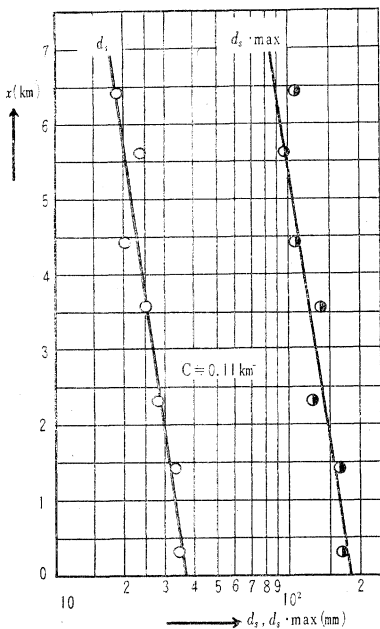
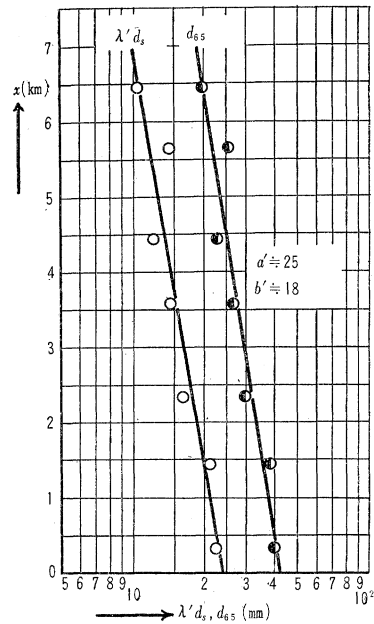


図-4



$c' = 3 \quad c = 0.33 \text{ km}^{-1}, \quad b' = 18$

(1) 物部博士の式による計算

(30) 式および (31) 式に, 計算に必要な諸量を代入してそれぞれ次式をうる。

$i = 0.005263 e^{-0.165x} + 0.000112 e^{0.055x} \dots\dots\dots (40)$

$z = 0.03060 - 0.031897(1 - e^{-0.165x}) - 0.002203(e^{0.055x} - 1) \dots\dots\dots (41)$

(2) 安芸博士の式による計算

(38)' 式および (39) 式に必要な諸量を代入してそれぞれ次式をうる。

$i = 0.005263 e^{-0.183x} + 0.000111 e^{0.055x} \dots\dots\dots (42)$

$z = 0.03060 - 0.028807(1 - e^{-0.183x}) - 0.002203(e^{0.055x} - 1) \dots\dots\dots (43)$

(3) 著者らの式による計算

a) 静的平衡の場合  $d_s > 3 \text{ mm}$  であるから  $(a_c/a_{co}) = 1$  であり (28) 式より  $l = 9/7, \lambda = 2/7$  である。  
 $cl = (0.11 \times 9)/7 = 0.141, \quad c\lambda = (0.11 \times 2)/7 = 0.031, \quad h_{co}^3/h_o^2 = 0.001127.$

(23) 式および (24) 式に必要な諸量を代入してそれぞれ次式をうる

$i = 0.005263 e^{-0.141x} + 0.000063 e^{0.031x} - 0.000035 e^{-0.062x} \dots\dots\dots (44)$

$z = 0.03060 - 0.037326(1 - e^{-0.141x}) - 0.002203(e^{0.031x} - 1) + 0.000564(1 - e^{-0.062x}) \dots\dots\dots (45)$

b) 動的平衡の場合 参考のために動的平衡の場合も計算して比較しよう。前論文において述べたごとく<sup>1)</sup>, 巾が一定な場合の  $i$  および  $z$  に関する式はそれぞれ次式で与えられる。

$i = I_0 e^{-cfx} + cjh_0 e^{-cix} - \frac{h_{co}^3}{h_o^2} cje^{-2cix} \dots\dots\dots (46)$

$z = z_0 + \frac{I_0}{cf} [e^{-cfx} - 1] - h_0 [e^{-cix} - 1] - \frac{h_{co}^3}{2h_o^2} [e^{-2cix} - 1] \dots\dots\dots (47)$

ここに,  $f = (3m + 15)/35, j = (3m + 1)/35$  この場合  $m = 2$  を使用することによれば<sup>1)</sup>  $f = 3/5, i = 1/5$  である。  
 $f = (0.11 \times 3)/5 = 0.066 \text{ km}^{-1}, \quad cj = (0.11 \times 1)/5 = 0.022 \text{ km}^{-1}, \quad h_{co}^3/h_o^2 = 0.001127. (46) \text{ 式および } (47) \text{ 式に}$   
 必要な諸量を代入してそれぞれ次式をうる。

$i = 0.005263 e^{-0.066x} + 0.000045 e^{0.022x} - 0.000025 e^{-0.044x} \dots\dots\dots (46)'$

$z = 0.03060 - 0.079742(1 - e^{-0.066x}) - 0.002203(e^{0.022x} - 1) + 0.000564(1 - e^{-0.044x}) \dots\dots\dots (47)'$

(40), (41), (42), (43), (44), (45), (46)', (47)' の諸式による計算結果を 表-2 に示す。河床高  $z$  と距離  $x$  との関係および実際河川の河床高  $z_p$  と距離  $x$  との関係を図-5 に示す。

表-2

No.	x (km)	物部公式		安芸公式		著者の式				実際河川の河床高 $z_p$ (km)
		z (km)	i	z (km)	i	静的平衡		動的平衡		
						z (km)	i	z (km)	i	
148	0.	0.03060	0.005263	0.03060	0.005263	0.03060	0.005263	0.03060	0.005263	0.03060
140	0.8230	0.02645	0.004711	0.02647	0.004641	0.02649	0.004719	0.02616	0.004993	0.02576
132	1.5865	0.02306	0.004172	0.02317	0.004059	0.02306	0.004241	0.02262	0.004762	0.02182
124	2.3090	0.02022	0.003723	0.02039	0.003574	0.02015	0.003837	0.01931	0.004545	0.01892
116	3.1525	0.01728	0.003262	0.01759	0.003038	0.01708	0.003413	0.01542	0.004292	0.01388
108	3.9305	0.01488	0.002889	0.01534	0.002702	0.01458	0.003068	0.01232	0.004091	0.01049
100	4.7285	0.01272	0.002558	0.01332	0.002360	0.01225	0.002748	0.00912	0.003882	0.00844
92	5.5285	0.01080	0.002266	0.01154	0.002063	0.01016	0.002463	0.00580	0.003666	0.00678
84	6.3325	0.00908	0.002010	0.00999	0.001809	0.00830	0.002208	0.00309	0.003491	0.00458

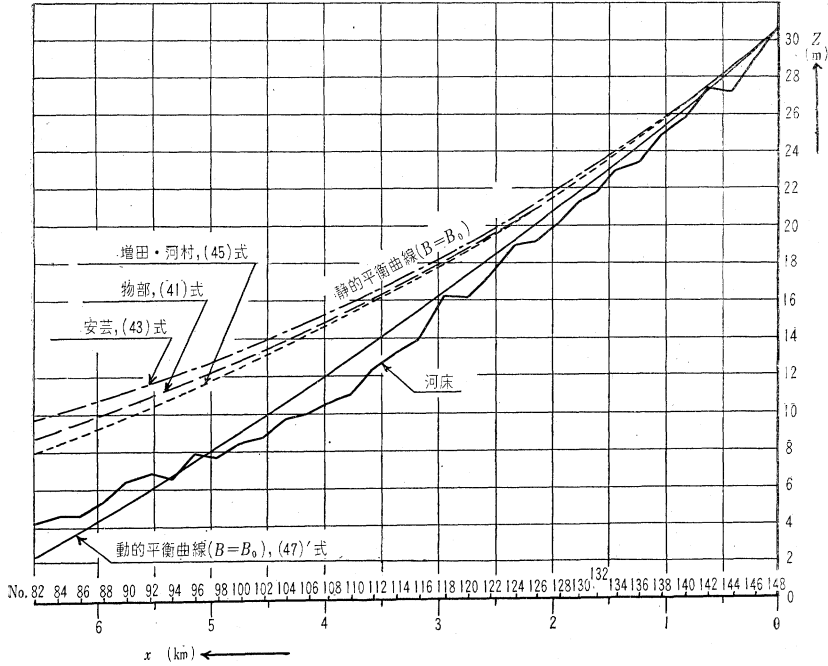
(4) 計算結果に関する考察

図-5 からわかるように, 安芸博士の式, 物部博士の式, 著者らの式と順次急になっているが, 安芸博士の式, 物部博士の式および著者らの式は近似的に等しいと見なしてもよいであろう。安芸博士の式が多少ゆるやかであるのは, (34) 式における砂礫の混合係数  $\lambda'$  の影響によるものである。 $d_s > \lambda' d_s$  であるから安芸博士の式は,  $d_s$  よりも小さい粒径について計算していることになり, 結局, ゆるい勾配を与える結果となる。動的平衡の条件を与えて求められた (46)', (47)' 式は最も急な勾配を与えている。このことは, 概念的にも最初から予想されていることであり, 限界掃流力からえられた条件と, 動的平衡の条件の差異にもとづくものである。

すなわち, 限界掃流力の条件は, 砂礫が移動せず, 洗掘も堆積も生じない限界の条件であるから当然ゆるやかな勾配となり, 変化率の大きい平衡曲線を与える。一方, 動的平衡の条件は, 流砂があっても, その流砂を洗掘



図-5



も堆積も生ぜしめず流送するための条件であるから当然、急な勾配となり、変化率の小さい平衡曲線をとるものである。静的平衡勾配は、一番ゆるい上の限界を与え、動的平衡勾配は、一番急な下の限界を与えるものである。

### 11. 結 言

(1) 限界掃流力の条件を与えて、不等速定流の運動方程式を解くことにより誘導された静的平衡勾配  $i$  の基礎方程式は、 $a_c(x)$ ,  $B(x)$ ,  $d_s(x)$  の関数形が与えられれば、静的平衡勾配  $i$  および河床高  $z$  を求めることができる。この静的平衡勾配は、土砂礫の流送をなるべくさげなければならぬ開水路（農業および工業用水路、排水路、運河など）の設計に役立つであろう。

(2) 著者らの式（巾が一定な場合）と物部博士の式、安芸博士の式と比較して物部博士の式および安芸博士の式は不等速定流の運動方程式において慣性項を省略し、摩擦項のみから求めた静的平衡勾配の式に近似的に等しいことが明らかとなった。

(3) 静的平衡勾配における  $m$  の値（(6)式における  $m$ ）は、 $d_s \geq 3 \text{ mm}$  では静的平衡勾配  $i$  および河床高  $z$  に全然影響を与えない。 $d_s < 3 \text{ mm}$  では、 $m=0$  または  $m=1$  をとればよい。 $d_s \leq 3 \text{ mm}$  では、 $a_c(x)$  の変化が静的平衡勾配  $i$  および河床高  $z$  にかかりの影響を与えるから注意せねばならない。

最後に、この研究にあたり終始御指導をいただいた京都大学防災研究所 石原安雄博士および種々御討議をいただいた京都大学工学部長 石原博士、防災研究所 矢野博士、岩垣博士、足立助教授に深く感謝するとともに多大の御援助を頂いた前岐阜県河川課長 片岡 武氏（千葉県土木部長）、宮崎虎太郎氏（大阪府河川課長）ならびに河川課の関係各位に謝意を表する次第である。

### 参 考 文 献

- 1) 増田重臣・河村三郎：流砂ある河川における平衡勾配について，土木学会論文集第 70 号，昭和 35 年 9 月
- 2) 物部長穂：水理学，岩波書店，pp. 260~262，1950
- 3) 安芸成一：河相論，主として河相と河川工法との関聯性についての研究，其の 2，土木学会誌，第 27 卷，11 号，昭和 16 年 11 月，pp. 1049~1062
- 4) 岩垣雄一：限界掃流力に関する基礎的研究，土木学会論文集第 41 号，1956
- 5) Liu, H.K.: Mechanics of Sediment-Ripple Formation, Proc. A.S.C.E., Vol. 83, No. HY 2, April, 1957
- 6) Albertson, M.L., Simons, D.B. and Richardson, E.V.: Discussion of "Mechanics of Sediment-Ripple Formation" by Liu, H.K. Proc. A.S.C.E., Vol. 84, HY 1, February, 1958

(原稿受付：昭.35.4.1)