

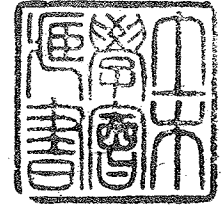
土 木 学 会 論 文 集

第 69 号 ・ 別 冊 (3-2)

広 巾 員 開 水 路 の 定 常 流

—断面形の影響について—

正 員 井 田 至 春



TRANSACTIONS
OF
THE JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS
No. 69, EXTRA PAPERS (3-2)

STEADY FLOW IN WIDE OPEN CHANNEL

—On the Effect of Shape of its Cross Section—

By Yoshiharu Ida, C.E. Member

Aug. 1960
TOKYO JAPAN

昭和 35 年 8 月

土 木 学 会

広巾員開水路の定常流

—断面形の影響について—

正員 井 田 至 春*

STEADY FLOW IN WIDE OPEN CHANNEL

—On the Effect of Shape of its Cross Section—

By Yoshiharu Ida, C.E. Member

Synopsis : In the present paper, the hydraulic effect of the sectional form of wide open channel is discussed on the assumption that the flow is a two dimensional phenomenon in a plane parallel to the direction of watercourse, taking into consideration the vertical distribution of velocity of flow. A fundamental discussion is described with respect to various sectional forms such as rectangular triangular, parabolic, and trapezoidal forms, which are geometrically simple shapes and at the same time certain considerations are given to the sectional form of actual river.

要 旨 広巾員開水路において、流れを流路の方向の鉛直面内の二次元現象と仮定し、流速の鉛直分布を考慮することによって、断面形状の水理学的効果を統一的に議論するものである。矩形、三角形、放物線形、台形、など幾何学的に簡単な断面形に対して基本的な議論を述べるとともに、実際の河川断面に対して応用考察を行なっている。

1. ま え が き

開水路の断面形は、定常流の水理にいかなる影響を与えるであろうか。

開水路定常流に対する従来の運動方程式

$$\frac{dH}{dx} + \alpha \frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g} \right) + \frac{n^2 V^2}{R^{2m}} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに H : 基準面からの水面の高さ、水位
 x : 水路床に沿い流れの方向に計られる距離
 V : 断面平均流速
 n : Manning 平均流速公式の粗度係数 (Chezy 公式の場合は $n = \frac{1}{C}$)
 α : 補正係数
 m : Manning の常数 ; $\frac{2}{3}$ (Chezy 公式 ; $\frac{1}{2}$)

について、断面形の影響を検討すれば、

第1項、水面勾配を表わし、断面形には関係しない。

第2項、 $\frac{\alpha Q^2}{2g} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{A^2} \right)$ と書き換えられ、微分は断面積に関する変化率を示すもので、断面形には関係がない。

一方、常数 α は、いわゆる流速水頭補正項 (kinetic-energy correction factor) と呼ばれるもので、流速分布によって定まる値であるから、これは当然断面形の影響を受けなければならない。

第3項、摩擦勾配を示すこの項は、

$$\text{Chezy 形式 ; } \frac{V^2}{C^2 R} \quad \text{Manning 形式 ; } \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}}$$

と書き表わされ、 C (または n) は、断面形に影響される値である事が知られている¹⁾。また径深 R は、筆者がすでに巾の広い開水路に対して論じたとおり²⁾、同様に断面形の影響を受ける値である。

開水路の定常流に対する断面形の影響は、以上のとおりであるが、それを解析的に表現する適当な方法が求められないままに、これまでの定常流解析には断面形の影響を無視して一般に次のような粗雑な取扱いを行なっている。

(1) α : 流路に沿う断面形の変動を無視して、 $\alpha=1$ ³⁾ (流速の一樣分布を仮定するもの)、あるいは $\alpha=1.1$ ⁴⁾

* 建設省東北地建, 前鳴子ダム管理所長, 現岩沼工事々務所長

程度の常数値を採用する。

(2) R : 巾の広い水路において、通常、水路巾 $B \neq$ 潤辺 S , として、径深 $R = \frac{A}{B}$, を用いる。これは、 B , A が同一であれば、断面形に関係なく同一の径深値を与えるものである。

このような断面形を無視した取扱いから、従来の定常流解析には、通常相当な誤差をふくみ、ときには、実際の現象と全く矛盾する結果さえ生じてくる⁵⁾。それで、計算者は そのつど適当な方法を用いて計算の調整を行なっている。

例えば

(1) 高水敷と低水敷が明確に分れている河川断面に対して流量計算を行なう場合は、両者の流量を分割してべつべつに計算し、その総和から総流量を求める。

(2) 上記断面形水路に対して水面解析を行なう場合は、(1)式第2項の平均流速 V は、全断面に対する値でなく、主水路 (main channel) のみの値を用いる⁶⁾。

(3) 径深に対して、断面形の影響を考慮する表現を用いる⁷⁾。

しかし、このような調整も大旨計算者の経験的判断に依存するところが大きいから、解析結果は普遍性に乏しく十分満足なものとはいえない。

以上の問題に関係して、筆者はすでに巾の広い開水路断面の二、三の問題について述べたが⁸⁾、以下では、新たに流速分布を考慮する基本運動式を誘導し、これにもつづいて断面形の持つ解析的意義を統一的に議論する。

2. 仮 定

本論文の叙述に関係する基本的な仮定をまとめると次のとおりである。

(1) 対象とする開水路は、水深にくらべて水面巾がきわめて広い場合に限定する。従って

a) 一般に、横断曲線の標高変化がきわめてかんまんて、流れの各部分は、流路の方向の鉛直面内における二次元現象と考えられるものとする。

b) 横断曲線に、標高変化の急激な部分 (例えば、高低水敷の境界部、堤防の付近等) がある場合、それによって生ずる上記二次元流れの局部的かくらんは、全断面の流れに対して規模が小さく十分無視できるものとする。

(2) 流れの内部における水圧は、すべて静水圧とする。

(3) 任意二次元要素 (図-1 (a)) における Manning 公式の n , Chezy 公式の C , は水路床の状態からのみ定められる値で、水深には関係しない。

(4) 二次元流れの流速水頭補正項 (以下 α_2 とする) は、与えられた断面を通じて、水深、潤辺の粗さの変化に関係なく一定とする。しかし、流速水頭補正項は後述のとおり摩擦係数 $f^{(1)}$, または平均流速係数 C の関数で表わされるから、この仮定は、潤辺の粗さの変動を無視するものである。

(5) 水面勾配は、断面の全巾にわたって同一とする。

3. 基本運動方程式の誘導

広巾員開水路の断面 (図-1 (a)) の一方の水際から ξ の距離にある任意の二次元要素において深さ ζ をとる流線の比エネルギーは、静水圧分布の仮定から次のように表わされる。

$$e = H_0 + h \cos i + \frac{u^2}{2g} \dots \dots (2)$$

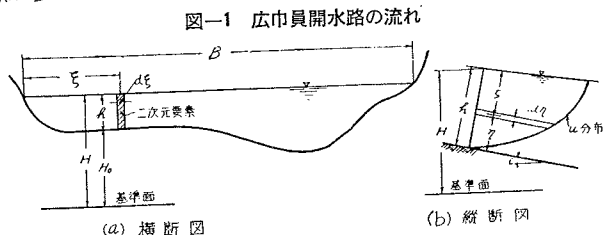
ここに e : 任意流線の比エネルギー

H : 任意二次元要素の底の標高
(基準面からの高さ)

η : $h - \zeta$

h : 水深

i : 底勾配角



w : 水の単位容積重量
 u : 任意流線の流速

任意二次元要素の単位巾流量を q として、(2) 式の両辺に、 $\frac{u \cdot d\eta}{q}$, を乗じ、水深 h にわたって積分すれば、この二次元要素の平均比エネルギーは次のように求められる。

$$\bar{e} = \int_h \frac{e u d\eta}{q} = H_0 + h \cos i + \left(\frac{v^2}{2g} \right) \int_h \frac{1}{h} \left(\frac{u}{v} \right)^3 d\eta = H + \alpha_2 \left(\frac{v^2}{2g} \right) \dots \dots (3)$$

ここに v : 任意二次元要素の平均流速 $H: H_0 + h \cos i =$ 水面の標高
 e : 任意二次元要素の平均比エネルギー $\alpha_2: \int_h \frac{1}{h} \left(\frac{u}{v}\right)^3 d\eta$

α_2 は二次元流れ、すなわちいわゆる広巾員矩形断面の流速水頭補正項を表わすもので、前述の仮定により特定の水位に対しては断面全体を通じて潤辺の粗さと、水深の変化に関係なく一定とする。なお α_2 については、さらに後で考察する。

次に、断面の総流量を Q とし、(3) 式の両辺に $\frac{qd\xi}{Q} = \left(\frac{hv \cdot d\xi}{Q}\right)$ を乗じて、断面の全巾 B にわたって積分すれば、全断面の平均比エネルギーは、次のように与えられる。

$$E = H + \alpha_2 \left(\frac{V^2}{2g}\right) \frac{\int_B h \left(\frac{v}{V}\right)^3 d\xi}{A} \dots\dots\dots (4)$$

ここに A : 断面積 V : 断面平均流速 E : 断面平均比エネルギー

一方また、二次元要素の摩擦勾配は、通常の方法から、 $\frac{n^2 v^2}{h^{2m}}$ 、と表わされるゆえ、全断面を代表する平均摩擦勾配 S_f は、これに $\frac{q \cdot d\xi}{Q}$ を乗じ、全巾 B にわたって積分すれば、次式となる。

$$S_f = \frac{V^2 \int_B \frac{n^2}{h^{2m-1}} \left(\frac{v}{V}\right)^3 d\xi}{A} \dots\dots\dots (5)$$

(4)、(5) 式から、全断面に対する基本運動方程式は、次のように求められる。

$$\frac{dH}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g}\right) \alpha_2 \left\{ \frac{\int_B h \left(\frac{v}{V}\right)^3 d\xi}{A} \right\} + \frac{V^2 \int_B \frac{n^2}{h^{2m-1}} \left(\frac{v}{V}\right)^3 d\xi}{A} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

(6) 式にふくまれている積分項は断面の流速分布によって変わる値で、開水路の水理に対する流速分布の影響を表わしている。

次に(4)~(6) 式にふくまれる任意二次元要素の平均流速 v は、近似的に次のように表わされるものと仮定すれば、

$$v = \frac{1}{n} h^m I^{1/2} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 I : 水面勾配
 連続の条件から、

$$Q = \int_B h v d\xi = I^{1/2} \int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi$$

$$\therefore I^{1/2} = \frac{Q}{\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi} \dots\dots\dots (8)$$

(8) 式を、(7) 式に代入すれば、

$$v = \frac{1}{n} \frac{Q h^m}{\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi} \dots\dots\dots (9)$$

(9) 式を、(4)、(6) 両式に代入すれば、流速分布の効果は断面形の関数で置き換えられ、それぞれ次のようになる。

$$E = H + \left(\frac{V^2}{2g}\right) \alpha_2 \frac{A^2 \int_B \frac{h^{3m+1}}{n^3} d\xi}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi\right)^3} \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{dH}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g}\right) \alpha_2 \frac{A^2 \int_B \frac{h^{3m+1}}{n^3} d\xi}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi\right)^3} + \frac{A^2 V^2}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi\right)^2} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

(10)、(11) 両式において、潤辺の粗さが断面を通じて一定ならば n は ξ に無関係となり、

$$E = H + \left(\frac{V^2}{2g}\right) \alpha_2 \frac{A^2 \int_B h^{3m+1} d\xi}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi\right)^3} \dots\dots\dots (12)$$

$$\frac{dH}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \alpha_2 \frac{A^2 \int_B h^{3m+1} d\xi}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi \right)^3} + \frac{n^2 A^2 V^2}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi \right)^2} = 0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

(11), (13) 両式は、断面形の影響をふくむ広巾員開水路の基本運動方程式である。なお、両式を後述の(16), (23), (24) 等の各式を用いて書き換えれば

$$\frac{dH}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{V^2}{2g} \right) \cdot D + \frac{N^2 V^2}{R^{2m}} = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

となり、周知の表現形式に還元される。

4. 断面の水力特性

上に誘導した基本運動方程式にもとづいて、開水路断面の水力特性に表われてくる断面形の影響について検討する。ただし、ここにいう断面の水力特性量とは、従来慣例的に議論されているもののほか、断面において、水位の関数として表わされる水理量を総称するものとする。

(1) 断面平均流速、流量

開水路流れにおいて、流速水頭の位置による変化が、0 または無視できるような場合は、(11) 式の第2項を除外して

$$\left. \begin{aligned} -I + \frac{A^2 V^2}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right)^2} &= 0 \\ \therefore V &= \frac{\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi}{A} I^{1/2} \\ \text{潤辺の } n \text{ が一定ならば} & \\ V &= \frac{\int_B h^{m+1} d\xi}{nA} I^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

よって、また

$$\left. \begin{aligned} Q &= \int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \cdot I^{1/2} \\ n = \text{一定, ならば} & \\ Q &= \int_B h^{m+1} d\xi \cdot \frac{I^{1/2}}{n} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

(15), (16) 両式は、断面形の影響をふくむ広巾員開水路の平均流速、および流量を与えるもので、いわゆる平均流速公式の一般的表現である。

(2) D 項

(11) 式から明らかとなり、断面の流速分布を考慮すれば、断面形の影響として、第2項の流速水頭に次式で表わされる項を乗じなければならない。

$$\left. \begin{aligned} D &= \alpha_2 \frac{A^2 \int_B \frac{h^{3m+1}}{n^3} d\xi}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right)^3} \\ n = \text{一定, ならば} & \\ D &= \alpha_2 \frac{A^2 \int_B h^{3m+1} d\xi}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi \right)^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

これは、広巾員開水路に対する流速水頭補正項の解析的な構造を示すもので、従来単なる係数として用いられている α と区別する意味で、鉛直曲率を有する開水路の場合¹⁰⁾に準じて、広巾員開水路のD項と定義する。

(17) 式から、広巾員開水路のD項は、一般に断面形のほか水位、平均流速公式の形式 (m の値)、潤辺の状態 (n)、によって変わる値であることがわかる。

(3) 摩擦勾配

(11) 式の第3項より、広巾員開水路の摩擦勾配は、断面形の影響をふくんで次のように表わされる。

$$n = \text{一定, ならば} \left. \begin{aligned} S_f &= \left(\frac{AV}{\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi} \right)^2 \\ S_f &= \left(\frac{nAV}{\int_B h^{m+1} d\xi} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

断面が、 n の一定な小領域に分割される場合は、後述の (24) 式を適用すれば、(18) 式は次のように表わされる。

$$S_f = \left(\frac{Q}{\sum \frac{A_i R_i^m}{n_i}} \right)^2 \dots\dots\dots (19)$$

(19) 式は、河川の複断面のごとく断面が系統の異なる 2 種以上の図形から構成されている場合に適用できるもので、Posey が Manning 公式を用いて述べている表現¹¹⁾ と形式的に同一となる。ただしこの場合、 R_i の内容は相違する事に注意を要する。

(4) 径深、等価粗度係数

上に述べたとおり、広巾員開水路の摩擦勾配は、(18) 式で表わされるが、一方従来の方法に従って

$$S_f = \frac{N^2 V^2}{R^{2m}} \dots\dots\dots (20)$$

と表わされる。ただし

ここに R : 断面を代表する深さ、径深

N : 断面を代表する粗度係数、等価粗度係数¹²⁾

(18), (20) 式から

$$R = \left(\frac{N}{A} \int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right)^{1/m} \dots\dots\dots (21)$$

しかるに、径深 R は断面を代表する深さとして、当然潤辺の状態に関係なく、もっぱら断面の形状、すなわち幾何学的条件から定まるべきものと考えられる。(21) 式の R が、 n, N に関係なく唯一に定まるためには、

$$N \int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \equiv \int_B h^{m+1} d\xi \dots\dots\dots (22)$$

が恒等的に成立しなければならない。

すなわち
$$N = \frac{\int_B h^{m+1} d\xi}{\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi} \dots\dots\dots (23)$$

従って、
$$R = \left(\frac{1}{A} \int_B h^{m+1} d\xi \right)^{1/m} \dots\dots\dots (24)$$

(23), (24) 両式は、断面形の影響をふくむ広巾員開水路の等価粗度係数と径深を与えるもので、筆者が別途に誘導しているもの¹³⁾ と全く同一である。

断面が、 n の一定な小領域に分割されている場合は、(23) 式は (24) 式を用いて次のように表わされる。

$$N = \frac{AR^m}{\sum \frac{A_i R_i^m}{n_i}} \dots\dots\dots (25)$$

(23), (25) 両式は、一般指数公式的表現であるから、Manning 公式に対しては、 $m=2/3$ 、とにおいて簡単に表わされる。

Chezy 公式の場合は、 $m = \frac{1}{2}$ 、 $N = \frac{1}{C}$ 、 $n = \frac{1}{c}$ となり、次のように表わされる。

または
$$C = \frac{\int_B ch^{3/2} d\xi}{\int_B h^{3/2} d\xi} \left. \begin{aligned} C &= \frac{\sum C_i A_i R_i^{1/2}}{AR^{1/2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (26)$$

ここに c : 潤辺上任意の一点に対する Chezy の平均流速係数

G : 全断面に対する Chezy の平均流速係数で, Chezy の等価流速係数と定義する。

(24) 式で表わされる R の表現を用いれば, 前述の (15), (16) 式は,

$$V = \left. \begin{aligned} & \frac{\sum \frac{1}{n_i} \int_{B_i} h_i^{m+1} d\xi}{A} I^{1/2} \\ & = \frac{\sum \frac{1}{n_i} A_i R_i^m I^{1/2}}{A} \\ & = \frac{\sum A_i V_i}{A} = \frac{\sum Q_i}{A} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

また

$$Q = \left. \begin{aligned} & \sum \frac{1}{n_i} \int_{B_i} h_i^{m+1} d\xi \cdot I^{1/2} \\ & = \sum \frac{1}{n_i} A_i R_i^m I^{1/2} \\ & = \sum Q_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (28)$$

となり, 常識的表現に還元される。ただし, 添字 i は, 小領域の番号を示すものとする。

(5) 限界水位, その他

(10) 式より, $\frac{dE}{dH} = 0$, とおけば

$$\left. \begin{aligned} \frac{2g \cos i}{Q^2 \alpha_2} &= \left(\frac{1}{\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi} \right)^4 \left\{ 3(m+1) \int_B \frac{h^{3m+1}}{n^3} d\xi \cdot \int_B \frac{h^m}{n} d\xi - (3m+1) \int_B \frac{h^{3m}}{n^3} d\xi \cdot \int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right\} \\ n &= \text{一定, ならば} \\ \frac{2g \cos i}{Q^2 \alpha_2} &= \left(\frac{1}{\int_B h^{m+1} d\xi} \right)^4 \left\{ 3(m+1) \int_B h^{3m+1} d\xi \cdot \int_B h^m d\xi - (3m+1) \int_B h^{3m} d\xi \cdot \int_B h^{m+1} d\xi \right\} \end{aligned} \right\} (29)$$

(29) 式は, 断面平均比エネルギーが極小となる条件で, 常に射流の限界水位を与える。従来慣例に従えば, この水位に対する断面最深部の水深を限界水深と称する。(29) 式より, 広巾員開水路の限界水位は, 流量のほか, 断面形, 平均流速公式の形, 潤辺の状況によって変わる値であることがわかる。

(29) 式に, $Q = AV$ の関係を代入し, この場合の V には, 添字 c をつけて表わせば,

$$V_c = \left(\frac{1}{A\sqrt{F}} \right)_{H_c} \cdot \sqrt{\frac{2g \cos i}{\alpha_2}} \dots\dots\dots (30)$$

ここに F : (29) 式の右辺 H_c : 限界水位

となり, (30) 式は, 限界水位に対する流速, すなわち限界流速を与え, これはまた表面波の波速を与えるものである。(10), (29) 両式から, 流量 Q を消去し, この場合の E, H, h の各記号に添字 c をつけて表わせば,

$$\left. \begin{aligned} \frac{E_c - H_c}{\cos i} &= \frac{\int_B \frac{h_c^{3m+1}}{n^3} d\xi \int_B \frac{h_c^{m+1}}{n} d\xi}{3(m+1) \int_B \frac{h_c^{3m+1}}{n^3} d\xi \int_B \frac{h_c^m}{n} d\xi - (3m+1) \int_B \frac{h_c^{3m}}{n^3} d\xi \int_B \frac{h_c^{m+1}}{n} d\xi} \\ n &= \text{一定, ならば} \\ \frac{E_c - H_c}{\cos i} &= \frac{\int_B h_c^{3m+1} d\xi \int_B h_c^{m+1} d\xi}{3(m+1) \int_B h_c^{3m+1} d\xi \int_B h_c^m d\xi - (3m+1) \int_B h_c^{3m} d\xi \int_B h_c^{m+1} d\xi} \end{aligned} \right\} \dots\dots (31)$$

ここに, E_c : 限界エネルギー H_c : 限界水位 $= h_c + H_0$ h_c : 水位 H_c に対する ξ 点の水深

(31) 式は, 広巾員開水路の支配条件式¹⁴⁾であって, 限界状態にある流れ, すなわち支配断面において, 水位とエネルギーの関係を与える。

(6) 断面特性関数

基本運動方程式 (11) 式を数値計算する場合, 従来と全く同様にして, (11) 式から断面特性関数を誘導できる。

a) 筆者の方法

$$\left\{ \begin{aligned} \phi &= H + \alpha_2 \left(\frac{Q^2}{2g} \right) \frac{\int_B \frac{h^{3m+1}}{n^3} d\xi}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right)^3} + \frac{\Delta x_\phi}{2} \frac{Q^2}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right)^2} \\ \psi &= H + \alpha_2 \left(\frac{Q^2}{2g} \right) \frac{\int_B \frac{h^{3m+1}}{n^3} d\xi}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right)^3} - \frac{\Delta x_\psi}{2} \frac{Q^2}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

潤辺の n が一定ならば

$$\left\{ \begin{aligned} \phi &= H + \alpha_2 \left(\frac{Q^2}{2g} \right) \frac{\int_B h^{3m+1} d\xi}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi \right)^3} + \frac{\Delta x_\phi}{2} \frac{n^2 Q^2}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi \right)^2} \\ \psi &= H + \alpha_2 \left(\frac{Q^2}{2g} \right) \frac{\int_B h^{3m+1} d\xi}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi \right)^3} - \frac{\Delta x_\psi}{2} \frac{n^2 Q^2}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi \right)^2} \end{aligned} \right\}$$

ここに, Δx_ϕ : その断面から次の上流側断面までの距離

Δx_ψ : その断面から次の下流側断面までの距離

b) Escoffier の方法¹⁶⁾

$$\left\{ \begin{aligned} F_1 &= \frac{\alpha_2}{2g} \frac{\int_B \frac{h^{3m+1}}{n^3} d\xi}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right)^3} + \frac{\Delta x_1}{2} \frac{1}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right)^2} \\ F_2 &= \frac{\alpha_2}{2g} \frac{\int_B \frac{h^{3m+1}}{n^3} d\xi}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right)^3} - \frac{\Delta x_2}{2} \frac{1}{\left(\int_B \frac{h^{m+1}}{n} d\xi \right)^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

n = 一定, ならば

$$\left\{ \begin{aligned} F_1 &= \frac{\alpha_2}{2g} \frac{\int_B h^{3m+1} d\xi}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi \right)^3} + \frac{\Delta x_1}{2} \frac{n^2}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi \right)^2} \\ F_2 &= \frac{\alpha_2}{2g} \frac{\int_B h^{3m+1} d\xi}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi \right)^3} - \frac{\Delta x_2}{2} \frac{n^2}{\left(\int_B h^{m+1} d\xi \right)^2} \end{aligned} \right\}$$

ここに, Δx_1 : 上記 Δx_ϕ と同じ, Δx_2 : 上記 Δx_ψ と同じ

以上 (32) または (33) 式を用いれば, 従来と全く同様にして, 断面形の影響をふくんで広巾員開水路の水面解析を行なう事ができる。

5. α_2 の 値

二次元流れ, すなわち広矩形断面の流速水頭補正項, α_2 に対しては, Boussinesq の計算値, $\alpha_2 = 1.058^{17)}$ が知られているが, 次に開水路の流速分布として, Bazin の放物線形分布¹⁸⁾を採用すれば,

$$u = u_s - 24\sqrt{hI} \left(\frac{\zeta}{h} \right)^2 \dots\dots\dots (34)$$

ここに, u_s : 水面流速 I : 水面勾配

$$\therefore v = \frac{1}{h} \int_h u d\zeta = u_s - 8\sqrt{hI} \dots\dots\dots (35)$$

また, 一方, 平均流速公式から

$$v = C\sqrt{hI} \dots\dots\dots (36)$$

とおけるから

$$\therefore u_s = (8+C)\sqrt{hI} \dots\dots\dots (37)$$

$$u = \sqrt{hT} \left\{ 8 + C - 24 \left(\frac{\zeta}{h} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (38)$$

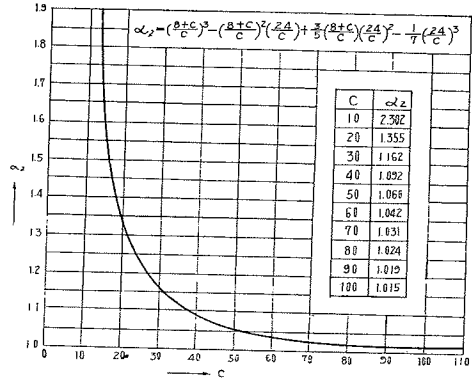
(36), (38) 両式から

$$\alpha_2 = \frac{1}{h} \int_0^h \left(\frac{u}{v} \right)^3 d\zeta = \left(\frac{8+C}{C} \right)^3 - \left(\frac{8+C}{C} \right)^2 \left(\frac{24}{C} \right) + \frac{3}{5} \left(\frac{8+C}{C} \right) \left(\frac{24}{C} \right)^2 - \frac{1}{7} \left(\frac{24}{C} \right)^3 \dots\dots\dots (39)$$

(39) 式から、 α_2 は、平均流速係数 C の関数である事がわかる。これは、すでに知られているとおり、流速の対数分布を仮定する場合に α が摩擦係数 f の関数で表わされる事¹⁹⁾と同様に、流速水頭補正項に対して潤辺の粗さが影響する事を意味している。

(39) 式の α_2 を C に対して計算して図示すれば、図-2 のとおりである。図-2 から、前記 Boussinesq の値はほぼ $C=50$ に対応する値である事がわかる。

図-2 α_2 の値



以上は Chezy の流速公式に対して α_2 を論じたが、Manning 公式に対しても、 $C = \frac{h^{1/6}}{n}$ の関係を適用すれば、

(39) 式、または 図-2 の関係がそのまま利用できる。

ただし、この場合は、 α_2 は粗度 n のほか、水深 h によって変わる値となる。

上述の α_2 の値を本論文の各式に用いる場合は、始めの仮定から α_2 は、断面の一水位において水深と潤辺の粗さの変化に関係しない事を必要とするから、Chezy 公式を用いる場合は、(26) 式の等価粗度係数、また Manning 公式の場合は、(23) 式の等価係数、および、(24) 式の径深、等によって、与えられた水位に対して、断面を通じて、ただ一個の α_2 を選択しなければならない。

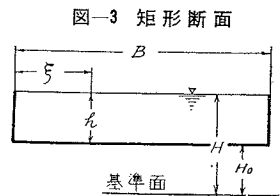
6. 簡単な断面形に対する応用的考察

上に述べた理論を適用して、幾何学的に簡単な断面の水利特性を誘導し、従来の方法による値と比較して、本理論の意味を具体的に考察する。ただし、この場合、条件を簡単にするため、潤辺の n は一定とする。また次に考察する各断面は、本理論の制約上、当然巾員が水深にくらべてきわめて大きいものとする。

(1) 矩形断面

図-3 の矩形断面において、 ξ に対して h は一定であるから

$$\left. \begin{aligned} \int_B h d\xi &= h \cdot B \\ \int_B h^m d\xi &= h^m \cdot B \\ \int_B h^{m+1} d\xi &= h^{m+1} \cdot B \\ \int_B h^{3m} d\xi &= h^{3m} \cdot B \\ \int_B h^{3m+1} d\xi &= h^{3m+1} \cdot B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$



よって、(15) ないし (31) の各式から

$$V = \frac{1}{n} h^m I^{1/2} \dots\dots\dots (41)$$

$$Q = \frac{B}{n} h^{m+1} I^{1/2} \dots\dots\dots (42)$$

$$D = \alpha_2 \dots\dots\dots (43)$$

$$S_f = \left(\frac{nV}{h^m} \right)^2 \dots\dots\dots (44)$$

$$R = h \dots\dots\dots (45)$$

$$h_c = \left(\frac{\alpha_2 Q^2}{g B^2 \cos i} \right)^{1/3} \dots\dots\dots (46)$$

$$V_c = \sqrt{\frac{\cos i}{\alpha^2}} \sqrt{g h_c} \dots\dots\dots (47)$$

$$E_c - H_0 = \frac{3}{2} h_c \cdot \cos i \dots\dots\dots (48)$$

以上から、矩形断面の水利特性は、従来の方法による表現と全く一致している。

(2) 三角形断面

図-4 の三角形断面において

巾 B_1 の領域; $h = \frac{h_0}{B_1} \xi$ 巾 B_2 の領域; $h = \frac{h_0}{B_2} \xi$

$$\left. \begin{aligned} \int_B h d\xi &= \frac{B_1 h_0}{2} + \frac{B_2 h_0}{2} = \frac{B h_0}{2} \\ \int_B h^m d\xi &= \frac{B_1 h_0^m}{m+1} + \frac{B_2 h_0^m}{m+1} = \frac{B h_0^m}{m+1} \\ \int_B h^{m+1} d\xi &= \frac{B_1 h_0^{m+1}}{m+2} + \frac{B_2 h_0^{m+1}}{m+2} = \frac{B h_0^{m+1}}{m+2} \\ \int_B h^{3m} d\xi &= \frac{B_1 h_0^{3m}}{3m+1} + \frac{B_2 h_0^{3m}}{3m+1} = \frac{B h_0^{3m}}{3m+1} \\ \int_B h^{3m+1} d\xi &= \frac{B_1 h_0^{3m+1}}{3m+2} + \frac{B_2 h_0^{3m+1}}{3m+2} = \frac{B h_0^{3m+1}}{3m+2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

よって、(15) ないし (31) 式から、各水理特性量を求め比較のため、従来の表現と並記すれば、次のとおりとなる。ただし、以下においては、従来の方法による表現には、すべて V' , Q' , 等のごとく ' を付して表わす。また、上述の理論、ならびに従来の方法のそれぞれによる表現の共通部分にかかる係数を、 V に対しては、 K_V , $K_{V'}$, また Q に対しては、 K_Q , $K_{Q'}$, 等とおくものとする。

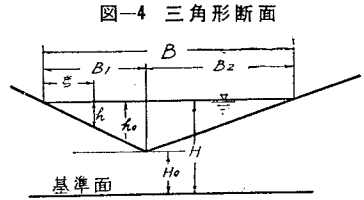


図-4 三角形断面

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{2}{m+2} \frac{1}{n} h_0^m I^{1/2} \\ V' &= \left(\frac{1}{2}\right)^m \frac{1}{n} h_0^m I^{1/2} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &K_V \\ &K_{V'} \end{aligned} \right\} \times \frac{1}{n} h_0^m I^{1/2} \dots\dots\dots (50)$$

ここに $K_V = \frac{2}{m+2}$, $K_{V'} = \left(\frac{1}{2}\right)^m$

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{1}{m+2} \frac{B}{n} h_0^{m+1} I^{1/2} \\ Q' &= \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1} \frac{B}{n} h_0^{m+1} I^{1/2} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &K_Q \\ &K_{Q'} \end{aligned} \right\} \times \frac{B}{n} h_0^{m+1} I^{1/2} \dots\dots\dots (51)$$

ここに $K_Q = \frac{1}{m+2}$, $K_{Q'} = \left(\frac{1}{2}\right)^{m+1}$

$$\left. \begin{aligned} D &= \alpha_2 \frac{(m+2)^3}{4(3m+2)} \\ D' &= \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

$$\left. \begin{aligned} S_f &= \left(\frac{m+2}{2}\right)^2 \left(\frac{nV}{h_0^m}\right)^2 \\ S_{f'} &= 2^{2m} \left(\frac{nV}{h_0^m}\right)^2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &K_{S_f} \\ &K_{S_{f'}} \end{aligned} \right\} \times \left(\frac{nV}{h_0^m}\right)^2 \dots\dots\dots (53)$$

ここに $K_{S_f} = \left(\frac{m+2}{2}\right)^2$, $K_{S_{f'}} = 2^{2m}$

$$\left. \begin{aligned} R &= \left(\frac{2}{m+2}\right)^{1/m} h_0 \\ R' &= \frac{1}{2} h_0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &K_R \\ &K_{R'} \end{aligned} \right\} \times h_0 \dots\dots\dots (54)$$

ここに $K_R = \left(\frac{2}{m+2}\right)^{1/m}$, $K_{R'} = \frac{1}{2}$

$$\left. \begin{aligned} h_c &= 2 \left(\frac{DQ^2}{gB^2 \cos i}\right)^{1/3} \\ h_{c'} &= 2 \left(\frac{\alpha Q^2}{gB^2 \cos i}\right)^{1/3} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &D^{1/3} \\ &\alpha^{1/3} \end{aligned} \right\} \times 2 \left(\frac{Q^2}{gB^2 \cos i}\right)^{1/3} \dots\dots\dots (55)$$

$$\left. \begin{aligned} V_c &= \sqrt{\frac{\cos i}{2D}} \sqrt{g h_c} \\ V_{c'} &= \sqrt{\frac{\cos i}{2\alpha}} \sqrt{2 h_{c'}} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &\sqrt{\frac{h_c}{D}} \\ &\sqrt{\frac{h_{c'}}{\alpha}} \end{aligned} \right\} \times \sqrt{\frac{g \cos i}{2}} \dots\dots\dots (56)$$

$$\left. \begin{aligned} E_c - H_0 &= \frac{5}{4} h_c \cos i \\ E_c' - H_0 &= \frac{5}{4} h_c' \cos i \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} h_c \\ h_c' \end{aligned} \right\} \times \frac{5}{4} \cos i \dots\dots\dots (57)$$

(50) ないし (54) 式から、各係数の値を Chezy 公式 ($m = \frac{1}{2}$), Manning 公式 ($m = \frac{2}{3}$), のそれぞれに対して計算し²⁰⁾, 比較表示すれば、表-1 のとおりである。

表-1 三角形断面の係数値

		K_V or K_V'	K_Q or K_Q'	K_{Sf} or K_{Sf}'	K_R or K_R'
Chezy 公式 ($m = \frac{1}{2}$)	筆者の値	0.8	0.4	1.5625	0.64
	既往の値	0.7071	0.3536	2	0.5
Manning 公式 ($m = \frac{2}{3}$)	筆者の値	0.75	0.375	1.7778	0.6495
	既往の値	0.6300	0.315	2.5198	0.5

また、(52) 式から三角形断面の D の値は、

$$\left. \begin{aligned} \text{Chezy 公式 } \left(m = \frac{1}{2}\right); \quad D &= \frac{125}{112} \alpha_2 = 1.1161 \alpha_2 \\ \text{Manning 公式 } \left(m = \frac{2}{3}\right); \quad D &= \frac{32}{27} \alpha_2 = 1.1852 \alpha_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (58)$$

α_2 の値は、前述のとおり、(39) 式または 図-2 から与えられるが、Boussinesq の値、 $\alpha_2 = 1.058$, に対しては、

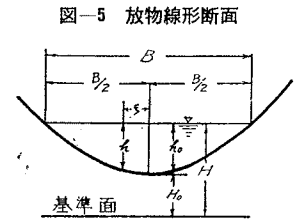
$$\left. \begin{aligned} \text{Chezy 公式} &; \quad D = 1.181 \\ \text{Manning 公式} &; \quad D = 1.254 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (59)$$

となる。

以上に対して、従来、三角形断面の α としては、理論値が与えられていない。

(3) 放物線形断面

図-5 の放物線形断面に対して、



$$\left. \begin{aligned} h &= h_0 \left(1 - \frac{4\xi^2}{B^2}\right) \\ \int_B h d\xi &= \frac{2}{3} h_0 B \\ \int_B h^m d\xi &= h_0^m B \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma\left(m+1+\frac{1}{2}\right)} \\ \int_B h^{m+1} d\xi &= h_0^{m+1} B \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma\left(m+2+\frac{1}{2}\right)} \\ \int_B h^{3m} d\xi &= h_0^{3m} B \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{\Gamma(3m+1)}{\Gamma\left(3m+1+\frac{1}{2}\right)} \\ \int_B h^{3m+1} d\xi &= h_0^{3m+1} B \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{\Gamma(3m+2)}{\Gamma\left(3m+2+\frac{1}{2}\right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

よって、(15) ないし (31) 式から

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{3}{4} \pi^{1/2} \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma\left(m+2+\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{n} h_0^m I^{1/2} \\ V' &= \left(\frac{2}{3}\right)^m \frac{1}{n} h_0^m I^{1/2} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} K_V \\ K_V' \end{aligned} \right\} \times \frac{1}{n} h_0^m I^{1/2} \dots\dots\dots (61)$$

ここに $K_V = \frac{3}{4} \pi^{1/2} \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma\left(m+2+\frac{1}{2}\right)}$, $K_V' = \left(\frac{2}{3}\right)^m$

$$Q = \frac{1}{2} \pi^{1/2} \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+2+\frac{1}{2})} \frac{B}{n} h_0^{m+1} I^{1/2} \left. \begin{matrix} K_Q \\ K_{Q'} \end{matrix} \right\} \times \frac{B}{n} h_0^{m+1} I^{1/2} \dots \dots \dots (62)$$

$$Q' = \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1} \frac{B}{n} h_0^{m+1} I^{1/2}$$

ここに $K_Q = \frac{1}{2} \pi^{1/2} \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+2+\frac{1}{2})}$, $K_{Q'} = \left(\frac{2}{3}\right)^{m+1}$

$$D = \alpha_2 \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma(3m+2)\Gamma(m+2+\frac{1}{2})^3}{\Gamma(3m+2+\frac{1}{2})\Gamma(m+2)^3} \left. \begin{matrix} D \\ D' = \alpha \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (63)$$

$$S_f = \left(\frac{4}{3\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(m+2+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+2)}\right)^2 \left(\frac{nV}{h_0^m}\right)^2 \left. \begin{matrix} K_{S_f} \\ K_{S_f'} \end{matrix} \right\} \times \left(\frac{nV}{h_0^m}\right)^2 \dots \dots \dots (64)$$

$$S_f' = \left(\frac{3}{2}\right)^{2m} \left(\frac{nV}{h_0^m}\right)^2$$

ここに $K_{S_f} = \left(\frac{4}{3\pi^{1/2}} \frac{\Gamma(m+2+\frac{1}{2})}{\Gamma(m+2)}\right)^2$, $K_{S_f'} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2m}$

$$R = \left(\frac{3\pi^{1/2}}{4} \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+2+\frac{1}{2})}\right)^{1/m} h_0 \left. \begin{matrix} K_R \\ K_{R'} \end{matrix} \right\} \times h_0 \dots \dots \dots (65)$$

$$R' = \frac{2}{3} h_0$$

ここに $K_R = \left(\frac{3\pi^{1/2}}{4} \frac{\Gamma(m+2)}{\Gamma(m+2+\frac{1}{2})}\right)^{1/m}$, $K_{R'} = \frac{2}{3}$,

$$h_c = \frac{3}{2} \left(\frac{DQ^2}{gB^2 \cos i}\right)^{1/3} \left. \begin{matrix} D^{1/3} \\ \alpha^{1/3} \end{matrix} \right\} \times \frac{3}{2} \left(\frac{Q^2}{gB^2 \cos i}\right)^{1/3} \dots \dots \dots (66)$$

$$h_c' = \frac{3}{2} \left(\frac{\alpha Q^2}{gB^2 \cos i}\right)^{1/3}$$

$$V_c = \sqrt{\frac{2 \cos i}{3D}} \sqrt{g h_c} \left. \begin{matrix} \sqrt{\frac{h_c}{D}} \\ \sqrt{\frac{h_c'}{\alpha}} \end{matrix} \right\} \times \sqrt{\frac{2g \cos i}{3}} \dots \dots \dots (67)$$

$$V_c' = \sqrt{\frac{2 \cos i}{3\alpha}} \sqrt{g h_c'}$$

$$E_c - H_0 = \frac{4}{3} h_c \cos i \left. \begin{matrix} h_c \\ h_c' \end{matrix} \right\} \times \frac{4}{3} \cos i \dots \dots \dots (68)$$

$$E_c' - H_0 = \frac{4}{3} h_c' \cos i$$

(61) ないし (65) 式から、各係数の値を、Chezy 公式と Manning 公式に対して計算し²¹⁾、比較表示すれば、表-2 のとおりである。

また (63) 式から、放物線形断面の D の値は、

表-2 放物線形断面の係数值

		K_V or $K_{V'}$	K_Q or $K_{Q'}$	K_{S_f} or $K_{S_f'}$	K_R or $K_{R'}$
Chezy 公式 ($m = \frac{1}{2}$)	筆者の値	0.8836	0.5890	1.2809	0.7807
	既往の値	0.8165	0.5443	1.5	0.6667
Manning 公式 ($m = \frac{2}{3}$)	筆者の値	0.8529	0.5686	1.3747	0.7877
	既往の値	0.7631	0.5088	1.7171	0.6667

$$\left. \begin{matrix} \text{Chezy 公式} & ; & D=1.0674 \alpha_2 \\ \text{Manning 公式} & ; & D=1.1052 \alpha_2 \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (69)$$

α_2 の値は、一般に (39) 式、または 図-2 から与えられるが、Boussinesq の値に対しては、

$$\left. \begin{matrix} \text{Chezy 公式} & ; & D=1.129 \\ \text{Manning 公式} & ; & D=1.169 \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (70)$$

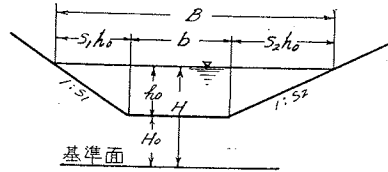
となる。

以上に対して、これまで、放物線形断面の α として、理論値が与えられていない。

(4) 台形断面

図-6 の台形断面に対して

図-6 台形断面



$$\left. \begin{aligned} \int_B h d\xi &= b h_0 \left(1 + \frac{S}{2} \frac{h_0}{b}\right) = b h_0 \left(1 + \frac{t}{2}\right) \\ \int_B h^m d\xi &= b h_0 \left(1 + \frac{S}{m+1} \frac{h_0}{b}\right) = b h_0^m \left(1 + \frac{t}{m+1}\right) \\ \int_B h^{m+1} d\xi &= b h_0 \left(1 + \frac{S}{m+2} \frac{h_0}{b}\right) = b h_0^{m+1} \left(1 + \frac{t}{m+2}\right) \\ \int_B h^{3m} d\xi &= b h_0^{3m} \left(1 + \frac{S}{3m+1} \frac{h_0}{b}\right) = b h_0^{3m} \left(1 + \frac{t}{3m+1}\right) \\ \int_B h^{3m+1} d\xi &= b h_0^{3m+1} \left(1 + \frac{S}{3m+2} \frac{h_0}{b}\right) = b h_0^{3m+1} \left(1 + \frac{t}{3m+2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (71)$$

ここに、 $S=S_1+S_2$, $t=\frac{S h_0}{b}$

よって、(15) ないし (31) 式から

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{1 + \frac{t}{m+2}}{1 + \frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{n} \cdot h_0^m \cdot I^{1/2} \\ V' &= \left(\frac{1 + \frac{t}{2}}{1 + t}\right)^m \cdot \frac{1}{n} \cdot h_0^m I^{1/2} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &K_V \\ &K_{V'} \end{aligned} \right\} \times \frac{1}{n} h_0^m I^{1/2} \dots\dots\dots (72)$$

ここに $K_V = \frac{1 + \frac{t}{m+2}}{1 + \frac{t}{2}}$, $K_{V'} = \left(\frac{1 + \frac{t}{2}}{1 + t}\right)^m$

$$\left. \begin{aligned} Q &= \left(1 + \frac{t}{m+2}\right) \frac{b}{n} \cdot h_0^{m+1} I^{1/2} \\ Q' &= \frac{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{m+1}}{(1+t)^m} \cdot \frac{b}{n} \cdot h_0^{m+1} I^{1/2} \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &K_Q \\ &K_{Q'} \end{aligned} \right\} \times \frac{b}{n} h_0^{m+1} I^{1/2} \dots\dots\dots (73)$$

ここに $K_Q = \left(1 + \frac{t}{m+2}\right)$, $K_{Q'} = \frac{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^{m+1}}{(1+t)^m}$

$$\left. \begin{aligned} D &= \alpha_2 \frac{\left(1 + \frac{t}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{t}{3m+2}\right)}{\left(1 + \frac{t}{m+2}\right)^3} \\ D' &= \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (74)$$

$$\left. \begin{aligned} S_f &= \left(\frac{1 + \frac{t}{2}}{1 + \frac{t}{m+2}}\right)^2 \left(\frac{nV}{h_0^m}\right)^2 \\ S_{f'} &= \left(\frac{1+t}{1 + \frac{t}{2}}\right)^{2m} \left(\frac{nV}{h_0^m}\right)^2 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} &K_{Sf} \\ &K_{Sf'} \end{aligned} \right\} \times \left(\frac{nV}{h_0^m}\right)^2 \dots\dots\dots (75)$$

ここに $K_{Sf} = \left(\frac{1 + \frac{t}{2}}{1 + \frac{t}{m+2}} \right)^2$, $K_{Sf}' = \left(\frac{1+t}{1 + \frac{t}{2}} \right)^{2m}$

$$R = \left(\frac{1 + \frac{t}{m+2}}{1 + \frac{t}{2}} \right)^{1/m} h_0 \left. \begin{array}{l} K_R \\ K_R' \end{array} \right\} \times h_0 \dots\dots\dots (76)$$

$$R' = \left(\frac{1 + \frac{t}{2}}{1+t} \right) h_0$$

ここに $K_R = \left(\frac{1 + \frac{t}{m+2}}{1 + \frac{t}{2}} \right)^{1/m}$, $K_R' = \left(\frac{1 + \frac{t}{2}}{1+t} \right)$

$$h_c = \left\{ \frac{3(m+1) \left(1 + \frac{t_c}{3m+2}\right) \left(1 + \frac{t_c}{m+1}\right) - (3m+1) \left(1 + \frac{t_c}{3m+1}\right) \left(1 + \frac{t_c}{m+2}\right)}{2 \left(1 + \frac{t_c}{m+2}\right)^4} \right\} \left(\frac{\alpha_2 Q^2}{g b^2 \cos i} \right)^{1/3}$$

$$h_c' = \frac{(1+t_c')^{1/3}}{1 + \frac{t_c'}{2}} \left(\frac{\alpha Q^2}{g b^2 \cos i} \right)^{1/3}$$

..... (77)

ここに $t_c = \frac{Sh_c}{b}$, $t_c' = \frac{Sh_c'}{b}$

$$V_c = \frac{\sqrt{2} \left(1 + \frac{t_c}{m+2}\right)^2}{\left(1 + \frac{t_c}{2}\right) \left\{ 3(m+1) \left(1 + \frac{t_c}{m+2}\right) \left(1 + \frac{t_c}{m+1}\right) - (3m+1) \left(1 + \frac{t_c}{3m+1}\right) \left(1 + \frac{t_c}{m+2}\right) \right\}} \sqrt{\frac{\cos i}{\alpha_2}} \sqrt{g h_c}$$

$$V_c' = \sqrt{\frac{1 + \frac{t_c'}{2}}{1+t_c'}} \sqrt{\frac{\cos i}{\alpha}} \sqrt{g h_c'}$$

..... (78)

$$E_c - H_0 = \left\{ 1 + \frac{\left(1 + \frac{t_c}{3m+2}\right) \left(1 + \frac{t_c}{m+2}\right)}{3(m+1) \left(1 + \frac{t_c}{3m+2}\right) \left(1 + \frac{t_c}{m+1}\right) - (3m+1) \left(1 + \frac{t_c}{3m+1}\right) \left(1 + \frac{t_c}{m+2}\right)} \right\} h_c \cos i$$

$$E_c' - H_0 = \frac{3 + \frac{5}{2} t_c'}{2(1+t_c')} h_c' \cos i$$

..... (79)

(72) ないし (76) 式から、 t に対する各係数の値を計算して²³⁾、比較図示すれば、図-1 のとおりである。

図-1 (a) 台形断面の K_V, K_V'

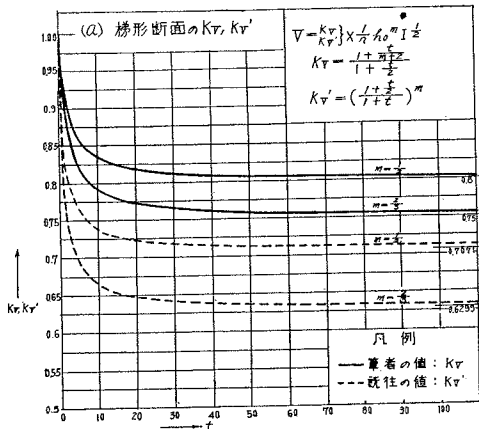


図-1 (b) 台形断面の K_a, K_a'

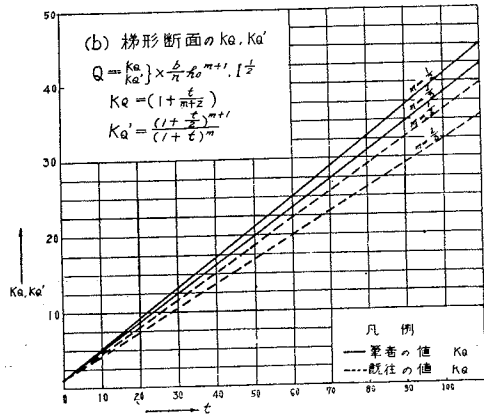


図-7(c) 台形断面の K_{Sf}, K_{Sf}'

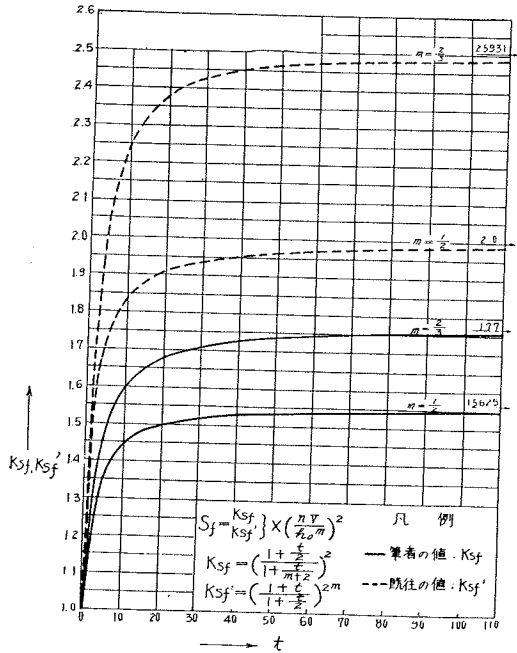


図-7(d) 台形断面の K_R, K_R'

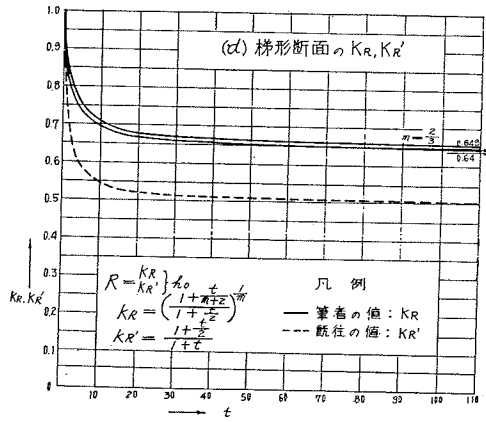
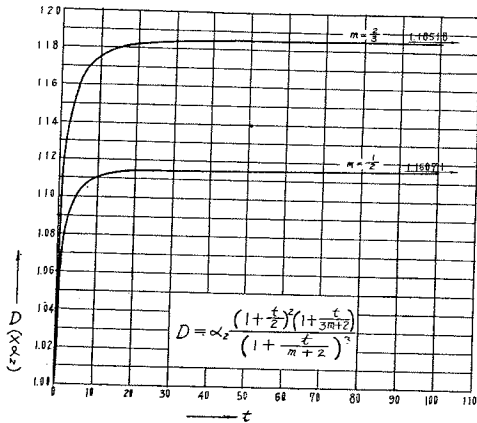


図-8 台形断面の D

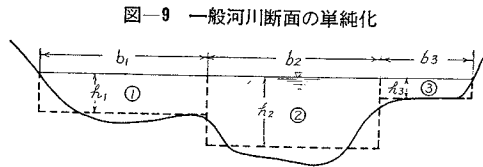


また (74) 式から、台形断面の D を計算すれば 図-8 のとおりである。これに対して、これまで台形断面の α として理論値が与えられていない事は、前述の場合と同様である。

7. 一般河川断面に対する応用的考察

一般河川断面は、不規則な起伏を有するばかりでなく、上述の簡単な幾何学的図形の場合と異なって、全断面を単純な曲線式で表わす事ができない。それで、上述の理論をこれに適用する場合、(15) ないし (33) の各式にふくまれる積分を求積法によって推行できないから、実用上適当な数値積分によらなければならない。この数値積分の扱い方によっていろいろの方法が考えられるが、次に実用上簡単な方法を述べる。

与えられる河川断面を、頭に系統が異なっている数個の区間（例えば、洪水数と低水数）に分割して、各区間をそれぞれの平均水深を水深とする矩形と置き換える（図-9 参照）。ただし、ここにいう平均水深は、区間断面積を水面巾で割った値とする。この場合、断面積と水面巾（≒潤辺）で平均水深（径深）を表わす従来の方法は、全断面をただ一つの矩形に置き換えている事に注意しなければならない。



上記の置き換え断面に対して、(15) ないし (33) 式を適用すれば

$$V = \frac{\sum \frac{b_i}{n_i} h_i^{m+1}}{\sum b_i h_i} I^{1/2} = \frac{1}{N} \frac{\sum b_i h_i^{m+1}}{\sum b_i h_i} I^{1/2} \dots (80)$$

$$Q = \left(\frac{\sum \frac{b_i}{n_i} h_i^{m+1}}{\sum b_i h_i} \right) I^{1/2} = \frac{1}{N} \left(\sum b_i h_i^{m+1} \right) I^{1/2} \dots (81)$$

$$D = \alpha_2 \frac{(\sum b_i h_i)^2 \sum \frac{b_i h_i^{3m+1}}{n_i^3}}{\left(\sum \frac{b_i h_i^{m+1}}{n_i} \right)^3} \dots (82)$$

$$S_f = \left(\frac{Q}{\sum \frac{b_i}{n_i} h_i^{m+1}} \right)^2 = \left(\frac{NQ}{\sum b_i h_i^{m+1}} \right)^2 \dots (83)$$

$$N = \frac{\sum b_i h_i^{m+1}}{\sum \frac{b_i h_i^{m+1}}{n_i}} \dots\dots\dots (84)$$

$$R = \left(\frac{\sum b_i h_i^{m+1}}{\sum b_i h_i} \right)^{1/m} \dots\dots\dots (85)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi &= H + \left(\frac{Q^2}{2g} \right) \frac{D}{(\sum b_i h_i)^2} + \frac{\Delta x_\phi}{2} S_f \\ \psi &= H + \left(\frac{Q^2}{2g} \right) \frac{D}{(\sum b_i h_i)^2} - \frac{\Delta x_\psi}{2} S_f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (86)$$

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{D}{2g(\sum b_i h_i)^2} + \frac{\Delta x_1}{2Q^2} S_f \\ F_2 &= \frac{D}{2g(\sum b_i h_i)^2} - \frac{\Delta x_2}{2Q^2} S_f \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (87)$$

(80) ないし (87) 式を実際の河川断面に対して検討するため、北上川上流部 27.2 km (図-10 参照) に適用して、数値計算し、従来の方法による値と比較図示すれば、図-11~図-18 の通りである。ただし、この数値計算には、次の値を採用している。

- $n_1 = n_3 = 0.035$ (高水敷粗度)
- $n_2 = 0.025$ (低水敷粗度)
- $m = \frac{2}{3}$ (Manning の値)
- $\alpha_2 = 1$
- $Q = 6300 \text{ m}^3/\text{sec}$ (計画洪水流量)
- $\Delta x_\phi = \Delta x_\psi = \Delta x_1 = \Delta x_2 = 200 \text{ m}$

図-10 北上川上流部 27.2 km 横断面図

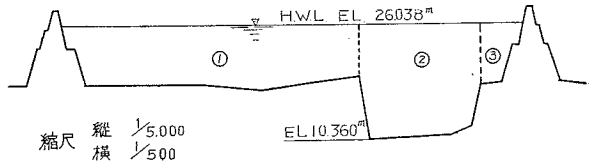


図-11~図-18 より次の事がわかる。

(1) (図-11 参照) 平均流速は、水位が高水敷を越えると (標高 17 m), 筆者の方法による値は従来の方法による値と差異を生じ、水位の上昇とともに異なる差異が増大し、極大値となり (この場合は標高 19 m 付近) 以後水位の上昇とともに異なる、その差はやや減少するが、ほとんど一定の差に漸近する。筆者の値は従来の値にくらべて常に大きい。

(2) (図-12 参照) 水位流量曲線は、平均流速と全く同様に、水位が高水敷を越えると両者の差異が発生し、その差異は、水位の上昇とともに極大となる以外次第に一定値に漸近する。筆者の値は従来の値にくらべて常に大きい。

図-11 H-V 曲線 (北上川上流部 27.2 km)

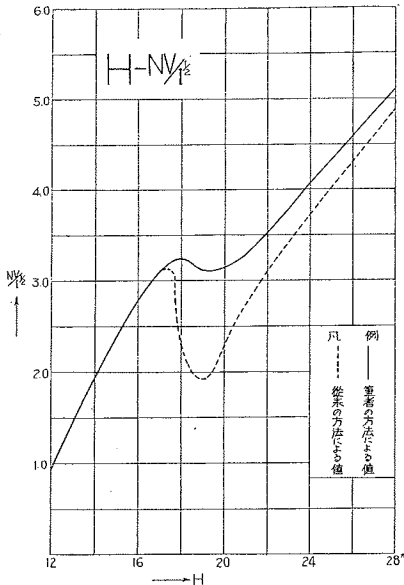
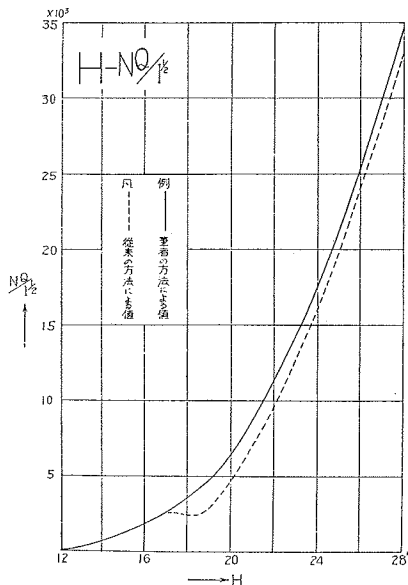


図-12 H-Q 曲線 (北上川上流部 27.2 km)



(3) (図-13 参照) D の値は、高水敷を越えるまでは一定値を保つが、水位の上昇とともにその差異が急激に増大し、極大値 (この場合標高 21m における $D/\alpha_2=1.64$) に達し、以後漸次減少する。従来の開水路の水理計算において、 $\alpha=1.1$ 程度を採用している点から考えて、この値はきわめて大きく、断面形の効果の重要性を示すものといえよう。

(4) (図-14 参照) 摩擦勾配, S_f は、同様に高水敷を越える点から両者の差異を発生し、水位の上昇とともに、その差異が極大に達し (この場合標高 18 m 付近)、以後は漸次減少し、標高 24 m 以上においては、実用上同一となる。筆者の値は低、高水敷を通じて、滑らかに変化する。

(5) (図-15 参照) 等価粗度, N は、高水敷を越えるまでは低水敷の粗度 (この場合 0.025) を保つが、それより水位の上昇とともに急激に増大し、一定値に漸近する。すなわちこの場合の収斂値は、(84) 式より

$$N_{lim} \left. \begin{matrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{matrix} \right\} \rightarrow \infty = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{\frac{b_1}{n_1} + \frac{b_2}{n_2} + \frac{b_3}{n_3}}$$

図-13 $H-D$ 曲線 (北上川上流部 27.2 km)

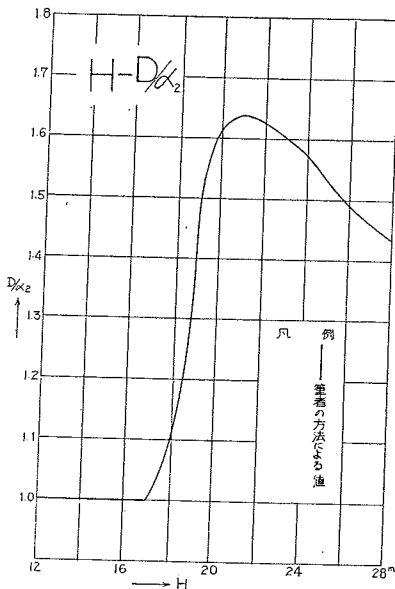


図-14 $H-S_f$ 曲線 (北上川上流部 27.2 km)

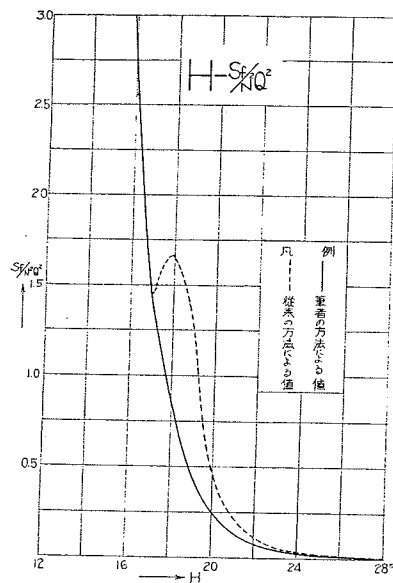


図-15 $H-N$ 曲線 (北上川上流部 27.2 km)

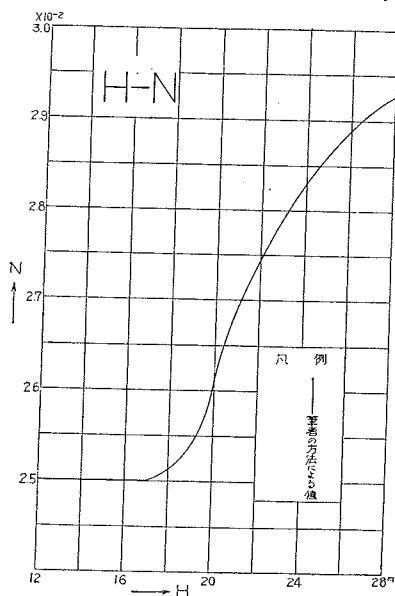


図-16 $H-R$ 曲線 (北上川上流部 27.2 km)

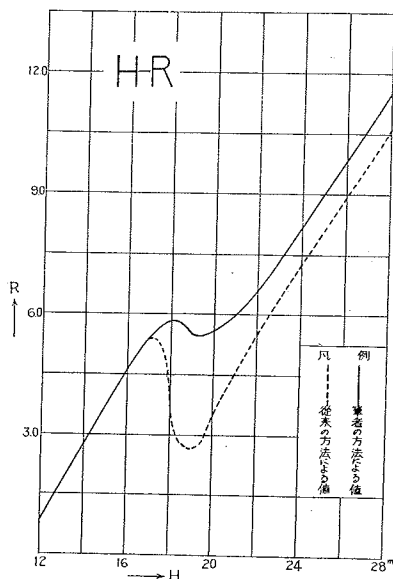


図-17 $H-\left\{\frac{\phi}{\psi}\right\}$ 曲線 (北上川上流部 27.2 km)

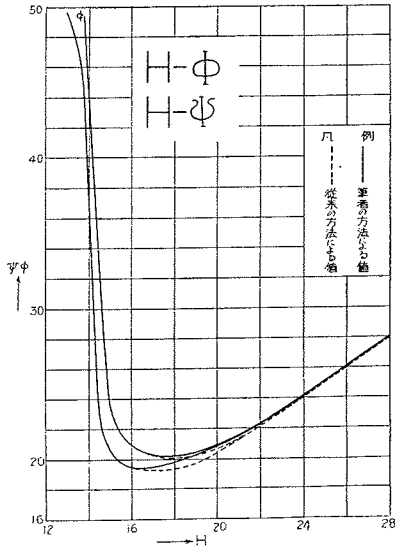
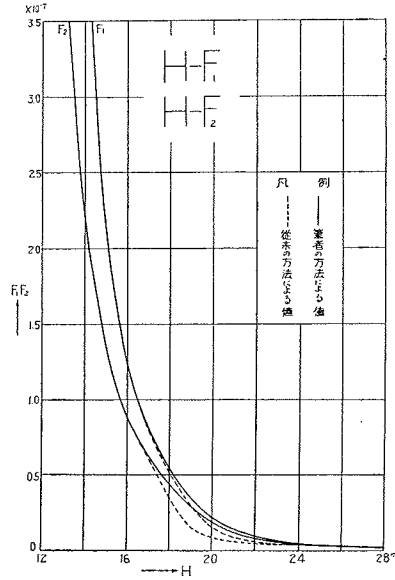


図-18 $H-\left\{\frac{F_1}{F_2}\right\}$ 曲線 (北上川上流部 27.2 km)



ここに、 b_1, b_2, b_3 は 図-10 に示す各数の水面巾、 n_1, n_2, n_3 は粗度を表わすものとする。

なお、この場合は、HWL (標高 26.038 m) における値は約 0.029 となる。

(6) (図-16 参照) 径深 R は、前述の、 V, Q 、と同様の傾向を取り、高水敷から両者の差異が発生し、標高 19 m 付近でそれが極大となり、以後次第に減少し、一定差に漸近する。なお、径深は、高水敷を越えてから少しの間は、水位の上昇にともない減少する。ただしこの傾向は、従来の値にくらべて、筆者の値の方が小さい。

(7) (図-17 参照) 断面特性関数、 ϕ, ψ は、前述の各値と同様、高水敷から両者の差異を生じ、それが、標高 19 m 付近で極大となり、以後漸減して、水位の高い部分に対しては実用的に同一の値となる。

(8) (図-18 参照) Escoffier の関数、 F_1, F_2 は、 ϕ, ψ の場合と同様の傾向を取り、標高 19 m 付近で差異が最大となる。

連続する各断面の ϕ, ψ または F_1, F_2 を用いれば定常流の水面曲線が求められるわけであるが、(7)、(8) の結論から、当然筆者の方法と従来の方法の差異のはなはだしい標高に水位がある場合には、求められる水面曲線の差異もはなはだしく、従って、断面形状の効果が最も顕となる事がわかる。一般河川断面においては、この標高は洪水敷より、やや水位が上昇したあたりにある。

8. あとがき

以上の議論から、従来の開水路定常流解析に考慮できなかった断面形の影響、断面内の粗度の変化を取扱う事ができる。またここで述べた所は、定常流のみについてであるが、そのまま、洪水波などの非定常流にも適用できるものと考ええる。

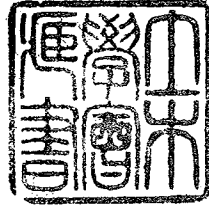
終りに、本論文の出版は、社団法人 復興建設技術協会東北支部の研究奨励金の援助に負うものであり、前同支部長 鶴見一之氏ならびに、現支部長 戸津光也氏の御好意に感謝すると共に、取りまとめに当り計算と作図の一部に対して、北海道大学学生 佐々木賢一君の御協力を得た事を述べ厚く御礼申し上げる。

参考文献

- 1) 石原・本間：応用水理学，p. 97
- 2) 筆者：「水理計算に依る河川の計画」，東北地建第 2 回技術研究会論文集（1956 年 1 月）p. 181
- 3) 例えば，Engineering Hydraulics, edited by Hunter Rouse, Chapter IX (by C.J. Posey)
- 4) 本間 仁：水理学（技術者の為の流体の力学）p. 144
- 5) 前出 2) p. 185
- 6) 前出 3) p. 628
- 7) 前出 2) p. 187 または 前出 3) p. 627
- 8) 前出 2)

- 9) 前出 1) p. 76 または、前出 3) p. 401
 10) 筆者：「鉛直曲率を有する任意断面形開水路流れ」土木学会論文集，第39号（昭和31年12月）
 11) 前出 3) p. 627
 12) 前出 2) p. 194
 13) 前出 2) p. 187, p. 194
 14) 前出 10) p. 25
 15) 土木学会水理公式集（昭和32年8月）p. 22, または前出 2)
 16) 前出 1) p. 111 または前出 15) p. 23
 17) 例えば、前出 4) p. 129
 18) 前出 15) p. 1
 19) 前出 1) p. 76 または前出 3) p. 401
 20) 森北出版社訳：Barlows' Tables
 21) 弥永・矢野訳：万能数値表，(Marcel Ball, "Tables Numeriques Universelles") および 前出 20)
 22) 前出 20)

(原稿受付：昭.34.10.9)



昭和35年8月25日印刷

昭和35年8月30日発行

土木学会論文集第69号・別冊(3-2) 定価100円(〒10円)

著者	建設省東北地建岩沼工事々務所長	井田至春
編集兼発行者	東京都新宿区四谷一丁目	社団法人土木学会 末森猛雄
印刷者	東京都港区赤坂溜池5番地	株式会社技報堂 大沼正吉

発行所 社団法人土木学会 振替東京16828番
 東京都新宿郵便局区内 新宿区四谷一丁目 電話(351)5138番