

開水路における定常流の一般理論について

正員 岩 佐 義 朗*

GENERAL THEORY ON STEADY BEHAVIOURS OF OPEN CHANNEL FLOWS

By Yoshiaki Iwasa, C.E. Member

Synopsis : This paper concerns with the general theory of steady behaviours of open channel flows by means of the one-dimensional method of analysis. The theory described herein is essentially formed by the transitional characteristics of steady flows in channel transitions and controls, and it can provide the unified treatment for hydraulic behaviours of gradually varied flows, which mainly treat with the determination of the surface profiles of water, and of the rapidly varied flows, which are counterpart of gradually varied flows and deal with local variations of flow behaviours occurred due to the changes in channel geometry and characteristics.

要 旨 この論文は、開水路における定常流の一般的な取扱いについて、遷移現象の水理学的特性との関連より解析したものである。したがって、ここで述べる理論は前世紀より展開されてきた定常流の水理学に関する多くの研究の基本的な概念を明らかにするとともに、漸変流および急変流現象として分類される定常流の水理学に統一的な解析法を与えようとするものである。

1. 緒 言

一定の流量の水を幾何学的形状および境界特性が一樣な開水路に流すと、水流は本質的に定常等流状態に近づくことと予想される。ところが、自然河川や人工水路では、水路それ自体あるいは各種水理構造物の設置の関係もあつて断面形状、水路勾配、粗度などが場所的に変化するため、水流はそれらの影響を受けていわゆる不等流となる。不等流の水理学は、明らかに不定流水理学の一つの特殊な場合と考えられようが、水路や水理構造物の設計では一定の設計流量に対して計算が行われるから、むしろ不定流の水理学と併立して開水路水流の水理学の最も重要な分野を形成し、前世紀よりすでに多くの研究が行なわれ、とくにその後半に至つてその発展はいちじるしいものがあつた。

近年、開水路水流現象のなかで二、三のものは、境界層理論を導入して解析されるようになってきたが¹⁾、古典的な1次元解析法による取扱いでは、不等流現象は一般につきの二つの分野に分けられて研究されている。その一つは、いわゆる漸変流の水理学であり、河道や貯水池における背水計算あるいは一般的に水面形状追跡法を主眼として前世紀の後半より多くのすぐれた研究があらわれ、一樣水路におけるその理論的展開はほぼ完成の段階にあるといえよう。ところが実際には、断面形状、勾配および粗度といった水路の特性は一定でないから、これらの研究の適用範囲はいちじるしく制限を受け、また事実、実用問題の解決にはあまりにも無力であることは、多くの技術者がしばしば経験するところである。いま一つは、水路形状や境界特性の急激な変化によつて生じる水流の局所の変動を取扱ういわゆる急変流の水理学である。ところが、急変流では現象の変化がきわめて急激であるから、その力学的関係を数学的に表わすことがむずかしい複雑な物理的要素に支配されることが多い。したがつて、急変流現象の解析には、しばしば経験的な要素がふくまれるようになる。しかしながらこのような流れに支配断面があらわれると、その点で Bélanger-Böss の定理が成立し、各種のせきあるいはフリュームによる流量測定がこの原理を応用したものにはかならないことは広く知られている。

従来の1次元解析法による取扱いでは、これら二つの分野における水理現象は全く別個に研究されてきたといつてよからう。ところが、水流が漸変流か急変流かのいずれであつても、曲線的な流体運動や離現象などの複雑な局所的要素をふくめた定常流の水面形状は、等流水深曲線および限界水深曲線によつて示される非線型方程式の解として与えられる。すなわち、これら2曲線は定常流の水理学における最も重要なパラメーターであつて、また水理構造物の設計の基本条件がそれらのもつ水理学的機能を最高度に発揮させることであるから、これら両曲線の相互関係は解析に先立ち十分に明確にされなければならない。

一樣水路では、両曲線の相対的な位置関係は一定であり、またこれらは決して交らない。ところが一般に、河

* 工学博士、京都大学助教授、工学部土木工学教室

道や水路ではその形状、勾配あるいは粗度が一樣でないから、これらの両曲線は交ることがあり、このことは水面形方程式に特異点があられることを意味している。この場合、水路の特性に従って分類される多くの水面形状は、特異点の数学的性質によつて全く異なつた水理学的特性を示すから、相当綿密に数値積分して求めた水面形状もしばしば誤つたものを表わし、またしたがつて、数学的にも水理学的にも全く無意味なものになることがある。従来研究はある程度模型化した水路における水面形状の数表化²⁾あるいは図表化³⁾に主眼がおかれていたから、水面形状そのものもつ水理学的な意義についてはほとんど顧みられなかつた。著者はさきこころした観点から水流の遷移現象を取り上げ、主として幅の変化する水路における遷移流の水理学的特性を明らかにしたが、このような考え方を応用すると、開水路における定常流の一般的な解析法を組立てることができる。

本文においては、こうした解析の総合的な結論としての定常流の一般的な性質を示そうとするものである。まず第一に、定常流の水理学で最も重要な意義をもつ常流と射流の水理学的意義について考察を進める。つづいて、遷移現象の一般論について解析を加えるとともに、最大流量、最小エネルギーあるいは最小モーメントフラックスの同時生起性に関する Jaeger の一般理論⁴⁾のもつ水理学的意義を明らかにする。

以上のようにして、開水路における定常流の水理学の基本的概念を確立することができると、その水理学的特性もおのずから明らかにされ、こうした結果が本文の最後に述べる水面形状追跡法であり、また流量測定法の基本原理である。

2. 常流と射流の水理学的意義

開水路の水流は、水深が一つの未知関数であるから、水深および平均流速あるいは流量を未知量とするいわゆる1次元解析法によつて取扱われる。いま、図-1に示すようなx軸を水路床に、またy軸を直角上向きにとつた座標軸系に対して、エネルギー保存則を用いて定常流の1次元方程式を求めると、近似的にはつぎのように表わされる。

$$H_0 \doteq \frac{1}{Q} \int \left(\frac{u^2}{2g} + \frac{p}{\rho g} + y \cos \theta \right) u dA, \dots\dots\dots (1)$$

および
$$\frac{dH_0}{dx} = \sin \theta - \left(\frac{\tau}{\rho g R} \right) \left(\frac{u_b}{u_m} \right) \doteq \sin \theta - \frac{Q^2}{C^2 R A^2}, \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 H_0 は全水頭、 Q は流量、 u はx方向の流速、 u_m は断面平均流速、 u_b は底面付近の流速、 p は圧力、 τ はせん断力、 R は径深、 A は流水断面積、 C は Chézy の係数、 ρ は水の密度、 g は重力の加速度、 θ は水路床の傾斜角である。

いま、Coriolis のエネルギー補正係数 α および Jaeger の圧力補正係数 λ を導入すると、これらは

$$\alpha = \frac{1}{Q} \int \left(\frac{u}{u_m} \right)^2 u dA, \text{ および } \lambda = \frac{1}{Q h \cos \theta} \int \left(\frac{p}{\rho g} + y \cos \theta \right) u dA, \text{ であるから, (1) 式は水深 } h \text{ を用いて,}$$

$$H_0 = \frac{\alpha Q^2}{2 g A^2} + \lambda h \cos \theta, \dots\dots\dots (3)$$

となる。ここに、 α および λ は一般的に x および h の関数と考えられる。したがつて、(2) および (3) 式より水面形方程式を求めると、

$$\frac{dh}{dx} = \left(\sin \theta - \frac{Q^2}{C^2 R A^2} - \frac{\partial H_0}{\partial x} \right) / \left(\frac{\partial H_0}{\partial h} \right) = \frac{f_1(x, h)}{f_2(x, h)}, \dots\dots\dots (4)$$

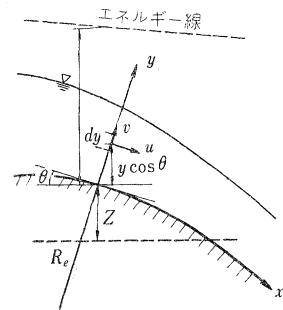
となり、ここに

$$f_1(x, h) = \sin \theta - \frac{Q^2}{C^2 R A^2} - \frac{Q^2}{2 g A^2} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial x} - h \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda h \sin \theta \frac{d\theta}{dx}, \dots\dots\dots (5)$$

$$f_2(x, h) = \lambda \cos \theta + h \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial h} + \frac{Q^2}{2 g A^2} \frac{\partial \alpha}{\partial h} - \frac{\alpha Q^2}{g A^3} \frac{\partial A}{\partial h}, \dots\dots\dots (6)$$

である。(4) 式で表わした定常流の水面形方程式において、右辺の分子が0となると、分母が同時に0でない限り水面勾配も0になる。すなわち、 $f_1(x, h) = 0$ 上の点では水面形曲線が水路床と平行になる。この曲線を Massé, P.⁵⁾ は擬似等流曲線と名付け、また、Escarrier, F.F.⁶⁾ は遷移曲線といつているが、ここでは簡単に等流水深曲線ということにする。また一方、分母が0という曲線上の点では、水面勾配は限りなく大きくなる。この曲線、すなわち $f_2(x, h) = 0$ は 限界水深曲線 といわれ、定常流の水理学では最も重要な基本的関係を表わすもので

図-1 座標軸
Fig.1 Coordinate System.



ある。

一般に、限界水深はつぎの4通りの方法によつて定義される。すなわち、

- (1) 上に述べたように、水面形方程式(4)の水面勾配が無限大となる水深 (Bresse),
- (2) 一定の流量に対して最小エネルギーをもつような水深 (Böss の定理),
- (3) 一定の水頭に対して最大流量をもたらす水深 (Bélanger の定理),
- (4) 微小な攪乱が伝わらなくなる水深, すなわち Froude 数が1となる時,

である。これら4通りの定義のうち、(1), (2) および (3) は定常流に対するものであり、これに反して (4) は不定流の条件より決定される。多くの文献にみられるように、平行流という仮定を用いると、これら4通りの定義は、いずれも同一の条件を表わすことは明らかであるが、水流の力学的関係に対し数学的に完全な表示がえられないので、一般的に証明することはむずかしい。

ところが、(4) 式は明らかに (1) と (2) との定義が同一であることを表わしており、また (2) と (3) との定義の同一性は後述する Jaeger の一般理論の意味するところである。したがつてここでは、(4) の不定流に関する定義が (1), (2), (3) の定常流に関するものと同じ条件を近似的に表わすことを示そう。いま取扱つている程度の近似* では、不定流のエネルギー方程式はつぎのように表わされる⁷⁾。

$$\frac{\beta}{g} \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\alpha u_m}{g} \frac{\partial u_m}{\partial x} + \left(\lambda \cos \theta + \frac{u_m^2}{2g} \frac{\partial \alpha}{\partial h} + h \cos \theta \frac{\partial \lambda}{\partial h} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u_m \partial \beta}{2g \partial h} \frac{\partial h}{\partial t} + \left\{ \frac{(\beta - \alpha) u_m}{2g} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{h \cos \theta (1 - \lambda)}{u_m A} \right\} \frac{\partial A}{\partial t} = \sin \theta \dots \dots \dots (7)$$

ここに、 β は運動量補正係数である。

いま、ある定まつた状態の流れに対して微小な攪乱 h' , u' , …… が加えられると、この攪乱の伝播する状態は(7) 式と連続式とより u' を消去したつぎの線型化方程式によつて表わされる。

$$R \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x^2} \right) + S \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial x \partial t} \right) + T \left(\frac{\partial^2 h'}{\partial t^2} \right) + \dots \dots \dots = 0 \dots \dots \dots (8)$$

ここに、

$$R = \frac{\lambda_c \cos \theta_c}{A_c^3} \left[A_c^3 \left\{ 1 + \frac{h_c}{\lambda_c} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h} \right)_c \right\} - \frac{Q^2}{\lambda_c g \cos \theta_c} \left\{ \alpha_c \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c - \frac{A_c}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial h} \right)_c \right\} \right],$$

$$S = \frac{h_c \cos \theta_c (1 - \lambda_c)}{Q} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c - (\beta_c + 3 \alpha_c) \frac{Q}{2g A_c^2} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c + \frac{Q}{2g A_c} \left(\frac{\partial \beta}{\partial h} \right)_c,$$

$$T = - \frac{\beta_c}{g A_c} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c,$$

であり、添字の c は定まつた状態のものを示している。したがつて、(8) 式が双曲型であれば、微小攪乱 h' の伝播速度 v_w は

$$v_w = \frac{(S \pm \sqrt{S^2 - 4RT})}{2T} \dots \dots \dots (9)$$

で与えられるから、上流側への攪乱の伝播が停止する条件は $R=0$ となることがわかる。すなわち、

$$A_c^3 \left\{ 1 + \frac{h_c}{\lambda_c} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h} \right)_c \right\} = \frac{Q^2}{\lambda_c g \cos \theta_c} \left\{ \alpha_c \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c - \frac{A_c}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial h} \right)_c \right\} \dots \dots \dots (10)$$

であり、この式は(6) 式であたえられる Bresse の条件と全く同一のものである。したがつて、すでに述べた4通りの方法はすべて同一の条件を規定するものと考えてよからう。同様に、運動量保存則よりも限界水深を定義することができるが、一様な水路においては、

$$A_c \left\{ \frac{\partial}{\partial h} (A \cdot y_G) \right\}_c = \frac{Q^2}{\lambda_c' g \cos \theta_c} \left\{ \frac{\beta_c}{A_c} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c - \left(\frac{\partial \beta}{\partial h} \right)_c \right\} - \frac{y_G A_c^2}{\lambda_c'} \left(\frac{\partial \lambda'}{\partial h} \right)_c \dots \dots \dots (11)$$

として与えられる⁷⁾。ここに、 y_G は自由表面より流水面積の重心までの距離であつて、また λ' は $\lambda' = \int (p/\rho g) dA/A y_G \cos \theta$ によつて表わされる Jaeger の圧力補正係数である。

いま、限界状態を表わす(10) あるいは(11) 式によつて与えられる限界水深より深い水深をもつ流れの状態を常流、また逆に浅いものを射流と定義すると、以上に述べた事実より、常流では下流の影響が上流に伝わるが射流では伝わらないことがわかる。すなわち、限界状態は微小攪乱伝播の条件を規定し、常流は下流の条件によつて支配されるいわゆる downstream control であり、逆に射流は upstream control である。このことは背水曲線などの水面形状追跡法における計算の方向を表わしている。

* ここで取扱つている近似とは、 x 方向の流速 u が y 方向の流速にくらべて大きく、かつ水路床の変動がゆるやかであることを意味している。

常流では、全水頭のうち運動エネルギーによる水頭がきわめて小さいが、限界状態に近づくに従いこの水頭が漸次大きくなり、また、鉛直加速度による2次の影響としての表面波状が顕著になることも容易に説明される⁷⁾。これに反して、射流では運動エネルギーが大きく、常流と全く異なつた性質があらわれ、衝撃波、転波などの現象がみられることはいうまでもない。

3. 遷移現象の一般理論

前節においては、水面形方程式(4)の分子あるいは分母が0になる場合について取扱い、それぞれ等流水深および限界水深と定義した。ところが、すでに述べたように、河道や水路ではしばしば分子と分母が同時に0となることがある。このような点は明らかに(4)式の特異点であつて、著者らはこの特異点によつて生じる水面形状の変化とその水理学的意義をあわせて水流の遷移現象と定義し、水路の特性との関連において解析を進めてきた。ここでは、このような遷移現象の一般的な特性について述べよう。

水面形方程式(4)の分母および分子が点 (x_c, h_c) で同時に0になるとすると、この点に座標軸の原点を移動させるとき、(4)式は特異点である原点の近傍ではつぎのような同次方程式によつて表わされる。

$$\frac{dh}{dx} = \frac{cx + dh + Q(x, h)}{ax + bh + P(x, h)}, \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 x, h は特異点よりの微小変動量を表わし、 P および Q は x, h に関する高次の項である。また、係数 a, b, c, d はそれぞれ

$$\begin{aligned} a &= -\lambda_c \sin \theta_c \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_c + \cos \theta_c \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)_c - h_c \sin \theta_c \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_c \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h} \right)_c + h_c \cos \theta_c \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial h} \right)_c \\ &\quad - \frac{Q^2}{gA_c^3} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial h} \right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_c - \frac{Q^2}{gA_c^3} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c + \frac{Q^2}{2gA_c^2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial h} \right)_c + \frac{3\alpha_c Q^2}{gA_c^4} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_c - \frac{\alpha_c Q^2}{gA_c^3} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial h} \right)_c, \\ b &= 2 \cos \theta_c \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h} \right)_c + h_c \cos \theta_c \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial h^2} \right)_c + \frac{Q^2}{2gA_c^2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial h^2} \right)_c - \frac{2Q^2}{gA_c^3} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial h} \right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c + \frac{3\alpha_c Q^2}{gA_c^4} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c^2 \\ &\quad - \frac{\alpha_c Q^2}{gA_c^3} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial h^2} \right)_c, \\ c &= \cos \theta_c \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_c + h_c \lambda_c \cos \theta_c \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_c^2 + h_c \lambda_c \sin \theta_c \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)_c + 2 h_c \sin \theta_c \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_c \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)_c - h_c \cos \theta_c \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} \right)_c \\ &\quad + \frac{2Q^2}{gA_c^3} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_c - \frac{Q^2}{2gA_c^2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right)_c + \frac{2Q^2}{C_c^3 R_c A_c^2} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)_c + \frac{Q^2}{C_c^2 R_c^2 A_c^2} \left(\frac{\partial R}{\partial x} \right)_c + \frac{2Q^2}{C_c^2 R_c A_c^3} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_c \\ &\quad + \frac{\alpha_c Q^2}{gA_c^3} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right)_c - \frac{3\alpha_c Q^2}{gA_c^4} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_c^2, \\ d &= -\cos \theta_c \left(\frac{\partial \lambda}{\partial x} \right)_c + \lambda_c \sin \theta_c \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_c + h_c \sin \theta_c \left(\frac{d\theta}{dx} \right)_c \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h} \right)_c - h_c \cos \theta_c \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x \partial h} \right)_c + \frac{Q^2}{gA_c^3} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c \\ &\quad + \frac{Q^2}{gA_c^3} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial h} \right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_c - \frac{Q^2}{2gA_c^2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial h} \right)_c + \frac{2Q^2}{C_c^3 R_c A_c^2} \left(\frac{\partial C}{\partial h} \right)_c + \frac{Q^2}{C_c^2 R_c^2 A_c^2} \left(\frac{\partial R}{\partial h} \right)_c + \frac{2Q^2}{C_c^2 R_c A_c^3} \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c \\ &\quad - \frac{3\alpha_c Q^2}{gA_c^4} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right)_c + \frac{\alpha_c Q^2}{gA_c^3} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x \partial h} \right)_c, \end{aligned}$$

である。したがつて、特異点の近傍における水面形状は(12)式の特性方程式

$$S^2 - (a+d)S + (ad-bc) = 0, \dots\dots\dots (13)$$

の性質によつて分類され、一般的にはつぎのように表わされる。すなわち、(13)式の判別式を D とすると、

(1) $D > 0, ad - bc < 0$; 特異点は鞍形点となり、この点を通る積分曲線はただ2個であり、そのうちの1つが遷移水面形曲線となる。

(2) $D > 0, ad - bc > 0$; 特異点は結節点となり、この点を通るすべての積分曲線は同一勾配をもっている。

(3) $D < 0, ad - bc > 0$; 特異点は渦状点であつて、積分曲線は対数螺線を描く。

a) 鞍形点の水理学的意義 特性方程式の正根を S_2 、負根を S_1 とすると、鞍形点を通る2個の水面形の水面勾配はそれぞれつぎのように与えられる。

$$\left(\frac{dh}{dx} \right)_{c1} = -\frac{c}{S_2 - a}, \quad \text{および} \quad \left(\frac{dh}{dx} \right)_{c2} = -\frac{c}{S_1 - a}, \dots\dots\dots (14)$$

また限界水深曲線の勾配は特異点の近傍で、次のようである。

$$s_2 = -(a/b), \dots\dots\dots (15)$$

いま、(14)式の初めの関係によつて表わされる曲線を C1- 曲線、後者のものを C2- 曲線とすると、(14)

および (15) 式より $(dh/dx)_{ci=1,2-s_2}$ を作れば、 b の正值に対して C1- 曲線は常流より射流への遷移水面形曲線を、また C2- 曲線は射流より常流へのものを表わすことがわかる。これに反して、 b が負の場合には、C1- および C2- 曲線は逆の遷移状態を表わす。一方において前節に述べたことから、常流では下流より追跡しなければならないこと、さらにまたこれらの曲線が他のすべての積分曲線の漸近線であることから、 b が正の場合には C1- 曲線が求める遷移水面形状を表わし、また負の b に対しては C2- 曲線が求めるものになることがわかる。すなわち、 b の正負にかかわらず鞍形点によって水流は常流より射流へと遷移し、その水面形状は b の正負に対応してそれぞれ C1- および C2- 曲線として与えられる。したがって、鞍形点は水面形追跡の出発点となり、またこの点で水流の水理学的特性は一義的に決定されるから、支配断面となることも明らかである。以上のことから、一様断面水路における水面形状は、緩勾配のものは鞍形点が $+\infty$ に、また逆に急勾配のものは $-\infty$ にあるときのものであることも理解できよう。

b) 結節点の水理学的意義 特性方程式は同符号の 2 根をもっているが、絶対値の大きい方を S_2 とすると、結節点ではすべての積分曲線は同一の水面勾配

$$\left(\frac{dh}{dx}\right) = -\frac{c}{S_2 - a}, \dots\dots\dots (16)$$

をもっている。この場合、鞍形点の特性を求めたようにして考察を進めると、 S_1 と b とが同符号であるか、あるいは異符号であるかに従って、流れの状態は射流から常流へとあるいは逆に常流から射流へと変化することがわかり、また前者は水面形追跡の終点を、後者は出発点を表わしている。ところが、結節点が水面形追跡に当って出発点となれば、求める遷移水面形曲線は一義的に決定されない。したがって、前者の場合にのみ追跡法は確立されることになる。これらのことは係数 a, b, c, d の多様性から適確に表示することが不可能であるが、係数を変化させて図示すると容易に理解できる。したがって、結節点は水面形追跡の終点となつて、水流は射流より常流に遷移し、また b と S_2 とは異符号ではありえないということもできる。結節点の水理学的意義のなかできわめて重要なことは、与えられた水路の特性および流量によつて、水流は射流より常流へと滑かに遷移することも可能であるという事実である。しかしながら、実際にはその可能な領域はきわめて限られ、また事実波状跳水となるような領域であるから、ここで述べたような近似では流体の運動現象を十分に表わすことができない。一般には結節点をふくむ上・下流側水位が共軛関係になつたところで局所的跳水現象があらわれ、結節点は実質上遷移点とならないことが多い。

e) 渦状点の水理学的意義 すでに述べたように、渦状点の近傍ではすべての積分曲線は対数螺旋線となり、一定の方向をもっていない。このような水面形状は実際には存在しない。すなわち、上・下流側よりそれぞれ追跡された水面形状が運動量保存則を満足する共軛関係に達したところで水流は急激に遷移し、局所的な跳水現象を通して流れの状態は射流より常流に移ることになる。したがって、渦状点を通過する水面形状はなく、また実質上の遷移点ではない。

以上は 3 種類の特異点とその水理学的意義について述べたが、水面形方程式にあらわれる特異点によつて水面形状がどのように変化するかを一般的にみることはむずかしい。しかしながら、鞍形点によつて 6 種類の図形がえられ、おのおのの図形に対して C1- および C2- 曲線を遷移曲線とするものがあることがみられる。また、結節点によつて 5 種類、渦状点によつて 4 種類の図形がえられる。これらの水面形状のうち、河床の変動の影響は高次項で表わされ、実用上あらわれるものは鞍形点に対して 9 種類、結節点に対して 5 種類、渦状点に対して 4 種類⁷⁾ である。

4. Bélanger-Böss の定理に関する Jaeger の一般理論とその水理学的意義

1849 年、Ch. Bélanger, J.B.⁸⁾ は広頂せき上の流れを計算するに当つて、一定の水頭では流量は最大になるように流れるという条件を用いたが、今日この条件は Bélanger の定理として広く知られている。また 1919 年、Böss, P.⁹⁾ はエネルギー水頭が最小となつたところで限界水深があらわれ、かつ流れの状態は常流より射流へと遷移することを知つた。

開水路水流の第一近似理論として用いられる平行流では、これらの定理が同一の条件を示すことはよく知られており一般に限界水深の定義として用いられる。これらの定理の同時生起性を表わしたものがいわゆる Jaeger⁹⁾ の一般理論であり、したがって、この概念はいわゆる支配断面の水理学的根本原理を形成するものであり、またせきやフリュームによる流量測定法はこの理論の応用であることも理解される。

ところが、Jaeger の一般理論は支配断面の位置およびその生起にもなる水流の遷移現象には何ら言及していないから、実際には調節構造物のもつ水理学的機能を明確にすることはできない。したがって、この理論は一点測

定による流量測定法の水理学的意義を与えるにすぎない。本節においては、このような観点から Jaeger の一般理論と遷移流の水理学的特性とを結びつけ、従来の意味における Bélanger-Böss の定理のもつ水理学的意義を明らかにしよう。このことは、多くの経験的な流量公式に用いられる流量係数の物理的解釈を与えることになる。

Jaeger の一般理論にあらわれる Bélanger の定理と Böss の定理の同時生起性はつぎのように説明されている。

全水頭 H_0 は (1) 式に示すように、流量、水深および水路の特性の関数として与えられるから、一般的には

$$F(H_0, Q, h, A, \theta, \dots) = 0, \dots \dots \dots (17)$$

として定義される。したがって、(17)式より Böss の定理は

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial h}\right)_c = - \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_c + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_c + \dots \right\} / \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial H_0}\right)_c + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial H_0}\right)_c + \dots \right\} = 0, \dots \dots (18)$$

とかくことができる。ところが、流体が存在する限り、(18)式の分母は 0 でないから、結局 Böss の定理は

$$\left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_c + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_c + \dots = 0, \dots \dots \dots (19)$$

となる。同様に、Bélanger の定理は

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)_c = - \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial h}\right)_c + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_c + \dots \right\} / \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial Q}\right)_c + \left(\frac{\partial F}{\partial A}\right)_c \left(\frac{\partial A}{\partial Q}\right)_c + \dots \right\} = 0, \dots \dots (20)$$

であるから、水流の存在を前提として (19) 式が成立する。したがって、(18) および (20) 式より、

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)_c = \left(\frac{\partial H_0}{\partial h}\right)_c = 0 \dots \dots \dots (21)$$

となり、Bélanger の定理と Böss の定理の同時生起性が示されることになる。

一方において、遷移流の水理学的特性より明らかなように、Böss の定理が連続した水流で成立するところは鞍形点であり、例外的には結節点の場合もありうる。しかしながら、結節点においては射流から常流へと遷移するので、下流水位によって水面形状は影響されやすく、一般には跳水現象となることが普通である。すなわち、開水路水流の力学的関係を 1 次元解析法に従って表わす限り、Bélanger-Böss の定理の同時生起点は水面形方程式 (4) の鞍形点に相当し、したがって、水流は滑かに常流より射流へと遷移する。鞍形点では、水流の水理学的特性は一義的に決定され、流量と水位の関係は (10) 式より

$$Q^2 = \lambda_c g \cos \theta_c A_c^3 \left\{ 1 + \frac{h_c}{\lambda_c} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h}\right)_c \right\} / \left\{ \alpha_c \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_c - \frac{A_c}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial h}\right)_c \right\}, \dots \dots \dots (22)$$

となる。(22)式はせきあるいはフリュームなどのような支配構造物による流量測定の基本原理解であるが、流量の変化に対応して (5) 式によつて与えられる鞍形点の位置も変わるから、実際には上流側の一定点における水位と流量の関係に変換しなければならない。しかしながら、鞍形点より上・下流の流れの状態はすべて予知されるから、各種の支配構造物のもつ水理学的機能、すなわち実用的には、流量係数の物理的意義を理論的に解明することができる。

以上はエネルギー的な考察に従つて Jaeger の一般理論のもつ水理学的意義を明らかにしたのであるが、運動量的解析法を用いると、断面が一様な水路では、最大流量と最小モーメント・フラックスの同時生起性が支配断面で成立することが証明される。ところが、エネルギー方程式と運動量方程式とはその力学的な取扱いが異なっているから、ここで考察を進めている程度の近似理論では、最大流量、最小エネルギーおよび最小モーメント・フラックスの同時生起性を論ずることはできない。

5. 水面形状追跡法

河道、水路あるいは各種の水理構造物の水理設計は、設計流量に対する水面形状の決定ということである。したがって水面形状追跡は水工事業における水理設計の最も重要な要素であり、前世紀より多くの研究が重ねられてきた。しかしながら実際には、その重要な意義が完全に理解されていないようであり、しばしば略算の方法により不完全な計画がなされることがある。

実際の河道や水路では、水路の特性が場所的に複雑な変化を示すから、水面形状もこれらの境界特性の変化にともなう遷移現象に支配され、複雑な形状を示すことはすでに前論文において図示^{7), 10)}したとおりである。

こうした観点より、つぎのようにして水面形状を計算すれば、求める形状を正しく推定することができるであろう。

(1) 与えられた水路形状および設計流量に対して、(5) および (6) 式で表わされる等流水深曲線と限界水深

曲線を十分の精度で算定する。この場合、水面形状を求める流れは一般に漸変流とみなされることが多いから、 $\alpha=\lambda=1$ と仮定され、比較的簡単に (5) および (6) 式が追跡される。

(2) 水面形状を追跡すべき領域のなかで、等流水深曲線と限界水深曲線とが交らないとき、すなわち、この領域内で特異点があらわれないとき、水面形状は常流では下流より、また射流では上流より計算するという原則によつて追跡される。この場合、多くの数表あるいは図表を応用すれば簡単になる。

(3) 特異点があらわれると、これらの点の水理学的意義を明らかにしなければならない。もし特異点が鞍形点であれば、この点は支配断面であり、また水面形状追跡の出発点となり、その初期値は (14) 式によつて与えられる。また特異点が結節点あるいは渦状点であれば、水流は一般に局所的跳水現象によつて急激に変化するから、上・下流の支配断面より追跡した水面形について、運動量保存則によつて共軛関係が満足されるかどうかを検討しながら計算を進めなければならない。

(4) とくに特異点の近傍では計算の進め方に綿密な注意を払う必要がある。

断面形状がほぼ一様な水路や河道では水面形状の計算は比較的容易であるが、断面や粗度あるいは勾配が変化すると、すなわち、感潮河川の河口部、水門、せきなどの構造物周辺、あるいは貯水池の上流端部では、計算は十分の注意を払つて行なわねばならないこと、またしたがつて、このような綿密な計算によつて初めて正しい水面形状が推定されることも、以上の各節において考察を加えたことから理解されるであろう。

6. 流量測定法の基本原理

一定の水路を流れる水流の状態が常に完全な定常等流状態であれば、Chézy あるいは Manning などの平均流速公式が水流の力学的関係の解を表わすから、流量と水深の関係は一義的に定義される。ところが、このような理想的な状態はなかなか実現されないから、流量を測定するためには、断面形状、勾配、粗度などの水路の特性を変化させてえられる水位変化を利用しなければならない。

いま、このような水路の遷移部を通過する水流の状態が変化しないと、流量は水位の 2 点測定によつて求められ、このような例がベンチュリー・フリュームである。これに反して、遷移部に支配断面があらわれると、この点で水流の水理学的特性はすべて決定され、またこの点より上・下流の流れの状態はそれぞれ独立したものであるから、水位の 1 点測定によつて流量が求められる。鋭縁せき、円形せきなどの各種のせき、あるいは Parshall, Inglis, De Marchi などのフリュームは構造物を支配構造物として用いたものであつて、これら構造物を流下する水流には必ず鞍形点が存在するはずである。また、流量は (22) 式によつて与えられ、とくに矩形断面水路では単位幅当りの流量が

$$q = (\lambda c g \cos \theta_c)^{1/2} h_c^{3/2} \left\{ 1 + \frac{h_c}{\lambda c} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h} \right)_c \right\}^{1/2} \left\{ \alpha_c - \frac{h_c}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial h} \right)_c \right\}^{-1/2}, \quad \dots \dots \dots (23)$$

となる。いま、流量係数 C_d を、上流の水位 h を用いて、

$$C_d = q \left/ \left(\frac{2 \sqrt{2} g \cos \theta}{3} \right) h^{3/2} \right., \quad \dots \dots \dots (24)$$

と定義すると、(23) および (24) 式より

$$C_d = \frac{3}{2 \sqrt{2}} \lambda_c^{1/2} \left(\frac{\cos \theta_c}{\cos \theta} \right)^{1/2} \left(\frac{h_c}{h} \right)^{3/2} \left\{ 1 + \frac{h_c}{\lambda c} \left(\frac{\partial \lambda}{\partial h} \right)_c \right\}^{1/2} \left\{ \alpha_c - \frac{h_c}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial h} \right)_c \right\}^{-1/2}, \quad \dots \dots \dots (25)$$

である。ここに θ は測点における水路傾斜角である。

(25) 式より明らかなように、 α, λ などの量は水深の関数と考えられるから、多くのせきあるいはフリュームにみられるように、流量係数は水深の増加とともに変化するのである。しかしながら、漸変流と考えられるフリューム内の流れや曲線運動をなす円形せき上の流れでは、 α および λ は水深の関数として一義的に決定されるから流量係数も理論的に推定でき⁷⁾、これらの詳細は別の機会に明らかにしたいと考えている。Parshall その他のフリュームは幾何学的形状が不連続的に変化するから、(4) 式によつて与えた水流の力学的関係は近似の程度が大となり、また鞍形点の位置も正確に決定することができない。しかしながら、不連続的に変化する等流水深曲線と限界水深曲線との交点を特異点とみなし、水面形状を追跡して理論的な流量係数を推定すれば、多くの模型で実験値と近似的に一致することがみられる。

支配構造物のなかで最も複雑な流況を示すものが、鋭縁せきあるいは広頂せきなどのように断面形状の変化が急激なものである。これらの構造物の水理学的機能は、水流の力学的関係が十分に数式を用いて表現されないから、解析されないし、このことは多くの研究にもかかわらず経験公式の範囲を出ないことから理解されよう。

したがつて、支配構造物によつて流量を測定するためには、測定すべき流量の範囲内で鞍形点があらわれるこ

とが必要であるが、水流の幾何学的形状としてなるべく形状抵抗が小さく、また水流の運動機構を数学的に表示しうるようなものを用いれば、水流の水理学的特性、したがって流量係数も十分の精度が予知され、流量測定は簡単に行なうことができるはずである。

7. 結 論

本研究は、開水路における定常流の水理学的取扱いを水深あるいは平均流速を未知数とするいわゆる1次元解析法によつて明らかにしたものである。

まず第一に、開水路水流における常流と射流のもつ水理学的意義を明らかにするとともに、水面形状追跡法の基本的原則を確かめた。ついで定常流の遷移現象の一般論を明らかにし、またこれを応用して水面形状の計算に当つて注意すべき諸点を示した。

さらに、支配断面において成立する Bélanger-Böss の定理あるいは Jaeger の一般理論のもつ水理学的意義を明らかにするとともに、流量測定法に対するこれらの理論の重要性について考察を加えた。

このような解析の結果、遷移現象の水理学的特性を導入すれば、従来より漸変流および急変流の現象として分類されていた定常流の水理学は統一的に論議されることがわかつた。しかしながら、形状抵抗などの要素はいまだ十分に解明されていないから、ここで述べた理論は完全なものとはいえない。このような未解決の要素が水理学的に究明されれば、さらにまた発展すべき手がかりがえられるであろう。

最後に本研究を遂行するに当り、絶えず御懇篤な指導を賜つた石原藤次郎教授に厚く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) Iwasa, Y. : Contributions of Boundary Layer Theory to Flows in Open Channels, 水力学・水理学における境界層理論の応用に関するソソボウム, 前刷, 昭 34.4.
- 2) Chow, V.T. : Integrating the Equation of Gradually Varied Flow, Proc. ASCE, Separate Paper 838, Nov. 1955.
- 3) Silber, R. : Étude et tracé des écoulements permanents en canaux et rivières, Dunod, Paris, 1954.
- 4) Jaeger, C. : Contribution à l'étude des courants liquides à surface libre, Rev. gen. Hydraulique, Nos. 33-34, 1934.
- 5) Massé, P. : Ressaut et ligne d'eau dans les cours d'eau à pente variable, Rev. gen. Hydraulique, Nos. 19-20, 1938.
- 6) Escoffier, F.F. : Transition Profiles in Non-Uniform Channels, Jour. Hyd. Division, Proc. ASCE, HY 3, June 1956.
- 7) Iwasa, Y. : Basic Studies of Hydraulic Essentials of Open Channel Flows Contributive to Hydraulic Design of Channel Structures, Thesis, June 1959.
- 8) Bélanger, J.B. Ch. : Notes sur le cours d'hydraulique, Mém., École nat. Ponts et Chaussées, Paris, 1849~50.
- 9) Böss, P. : Berechnung der Wasserspiegellage beim Wechsel des Fliesszustandes, Springer, Berlin, 1919.
- 10) 岩佐義明 : 幅の漸変する水路における水流の遷移現象と境界特性との関連に関する理論的研究, 土木学会論文集, 第 59 号・別冊 (3-1), 昭 33.11. (原稿受付: 昭.34.10.5)

正 誤 表

Correction regarding "On the motion of the flood-flow running down through the river", Transactions J.S.C.E. No. 63, July 1959, p. 57.

Takeo Kinoshita

The quotation which the writer made on Dr. T. Hayashi's paper on the intumescence should have been replaced by that on the same author's paper on the flood wave (Trans. J.S.C.E. No. 18), where the assumption of the infinitesimally small amplitude was removed.