

立体骨組構造物の解法*

正員 大 地 羊 三*

MATRIX ANALYSIS OF CUBIC FRAMED STRUCTURES

By Yohzo Ohchi, C.E. Member

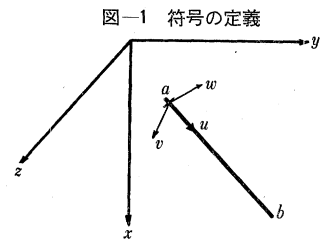
Synopsis: This report treats the matrix analysis of the cubic framed structures, and explains its relation to the plane framed structures or the cubic trusses on which the author has already reported.

要 旨 立体骨組構造物の解式を行列の形で誘導し、前に報告した平面骨組構造物および立体トラスの解式との関係をあきらかにしたものである。なおその計算過程において、格子桁等のごとく構造物のある面と外力とが直交する場合の解式を誘導した。そして最後に、各種解式の解き方について二、三の方法を紹介した。

1. 符号および記号の定義

図一のごとく空間に右手系の直交座標 $x \cdot y \cdot z$ を作り、その座標軸の正の方向を、節点および支点に作用する外力・変位の正の方向とする。また部材の両端に左右の区別をつけ、それぞれ a 端・ b 端とする（図面では a 端に + 印をつけて b 端と区別する）。部材に作用する外力・部材端の部材力および変位等はすべて部材に固定した直交座標 u, v, w の座標軸の方向を正とする。

ここで本文に使用される記号の説明をしておこう。一般的にいつて () は列ベクトルを表わし、定義された量を部材・節点または支点反力につけた番号順にたてに並べたものである。部材の a 端・ b 端・節点・支点反力の区別をする必要があるときはサフィックス $a \cdot b \cdot p \cdot r$ をつけて区別する。また対角行列は定義された量を、部材につけた番号順に、対角線上に並べた行列である。



図一 符号の定義

$(M_{au})(M_{av})(M_{aw}); (M_{bu})(M_{bv})(M_{bw})$ = 部材の a 端; b 端に作用する $u \cdot v \cdot w$ 軸まわりの曲げモーメント

$(Q_{au})(Q_{av})(Q_{aw}); (Q_{bu})(Q_{bv})(Q_{bw})$ = 部材の a 端; b 端に作用する $u \cdot v \cdot w$ 軸方向の部材力

$(\theta_{au})(\theta_{av})(\theta_{aw}); (\theta_{bu})(\theta_{bv})(\theta_{bw})$ = 部材の a 端; b 端の $u \cdot v \cdot w$ 軸まわりのたわみ角

$(y_{au})(y_{av})(y_{aw}); (y_{bu})(y_{bv})(y_{bw})$ = 部材の a 端; b 端の $u \cdot v \cdot w$ 軸方向への変位

$(M_{rx})(M_{ry})(M_{rz})$ = 支点に作用する $x \cdot y \cdot z$ 軸まわりの曲げモーメント

$(Q_{rx})(Q_{ry})(Q_{rz})$ = 支点に作用する $x \cdot y \cdot z$ 軸方向の支点反力

$(\theta_{px})(\theta_{py})(\theta_{pz})$ = 節点の $x \cdot y \cdot z$ 軸まわりのたわみ角

$(y_{px})(y_{py})(y_{pz})$ = 節点の $x \cdot y \cdot z$ 軸方向への変位

$(m_{au})(m_{av})(m_{aw})$ = 部材に作用する外力の a 端における $u \cdot v \cdot w$ 軸まわりのモーメント

$(q_u)(q_v)(q_w)$ = 部材に作用する外力の $u \cdot v \cdot w$ 軸方向の合力

$(m_{px})(m_{py})(m_{pz})$ = 節点に作用する外力の $x \cdot y \cdot z$ 軸まわりのモーメント

$(q_{px})(q_{py})(q_{pz})$ = 節点に作用する外力の $x \cdot y \cdot z$ 軸方向の分力

$(\theta_{obu})(\theta_{obv})(\theta_{obw}); (y_{obu})(y_{obv})(y_{obw})$ = 各部材ごとに a 端固定・ b 端自由とし、これに与えられた荷重を作用させた場合に、 b 端に生ずる $u \cdot v \cdot w$ 軸まわりのたわみ角および $u \cdot v \cdot w$ 軸方向のたわみ

$$= \left(\int_0^l \frac{s \cdot m_u}{GJ_d} ds \right) \left(- \int_0^l \frac{s^2 \cdot p_w}{2EJ_v} ds \right) \left(\int_0^l \frac{s^2 \cdot p_v}{2EJ_w} ds \right); \left(\int_0^l \frac{s \cdot p_u}{EA} ds \right) \left(\int_0^l \frac{(3l-s)s^2 p_v}{6EJ_w} ds \right) \left(\int_0^l \frac{(3l-s)s^2 p_w}{6EJ_v} ds \right)$$

$(m_{fau})(m_{fav})(m_{faw}); (m_{fbu})(m_{fbv})(m_{fbw})$ = 各部材を両端固定とし、これに与えられた荷重を作用させた場合に a 端; b 端に生ずる $u \cdot v \cdot w$ 軸まわりの曲げモーメント

$$= \left(- \int_0^l \frac{l-s}{l} m_u ds \right) \left(\int_0^l \frac{(l-s)^2}{l} p_w ds \right) \left(- \int_0^l \frac{(l-s)^2}{l} p_v ds \right); \left(- \int_0^l \frac{s}{l} m_u ds \right) \left(- \int_0^l \frac{(l-s)s^2}{l} p_w ds \right) \left(\int_0^l \frac{(l-s)s^2}{l} p_v ds \right)$$

* 国鉄、鉄道技術研究所構造物研究室

$(q_{fau})(q_{fav})(q_{faw}); (q_{fbu})(q_{fbv})(q_{fbw})$ = 各部材を両端固定ばりとし、これに与えられた荷重を作用させた場合に、 a 端; b 端に生ずる $u \cdot v \cdot w$ 軸方向の反力

$$= \left(-\int_0^l \frac{l-s}{l} p_u ds \right) \left(-\int_0^l \frac{l(1+2s)(l-s)^2}{l^3} p_v ds \right) \left(-\int_0^l \frac{l(1+2s)(l-s)^2}{l^3} p_w ds \right); \left(-\int_0^l \frac{s}{l} p_u ds \right) \left(-\int_0^l \frac{(3l-2s)s^2}{l^3} p_v ds \right) \left(-\int_0^l \frac{(3l-2s)s^2}{l^3} p_w ds \right)$$

$[I]$ = 単位行列 $[\bar{X}] = [X]$ の行と列を入れかえた転置行列 $[X]_{\pm} = [\bar{X}]$ との積が 0 となる行列

$\begin{bmatrix} l \\ GJ_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ EA \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ EJ_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l \\ EJ_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l^2 \\ 2EJ_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l^2 \\ 2EJ_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l^3 \\ 3EJ_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l^3 \\ 3EJ_w \end{bmatrix} [I]$ 等 = 対角線に $l/GJ_d \dots l$ 等を並べた対角行列

$[C_{xu}][C_{xv}][C_{xw}]; [C_{yu}][C_{yv}][C_{yw}]; [C_{zu}][C_{zv}][C_{zw}] = u \cdot v \cdot w$ 軸の $x; y; z$ 軸に対する方向余弦を対角要素とする対角行列

$[\alpha]; [\beta] = k$ 部材の a 端; b 端が i 節点と交わるとき、 $\alpha_{ik}; \beta_{ik}$ が 1 となり、その他の場合は 0 となる行列

$[R_{mx}][R_{my}][R_{mz}]; [R_{qx}][R_{qy}][R_{qz}] = i$ 番目の反力モーメント; 反力が k 節点に作用しているとき、 ik 要素が反力モーメントの軸の方向; 反力の方向と $x \cdot y \cdot z$ 軸とがはさむ角の cosine となつている行列

複合ベクトルおよび複合行列

$$\langle M_a \rangle = \begin{pmatrix} M_{au} \\ M_{av} \\ M_{aw} \end{pmatrix} \quad \langle Q_a \rangle = \begin{pmatrix} Q_{au} \\ Q_{av} \\ Q_{aw} \end{pmatrix} \quad \langle \theta_a \rangle = \begin{pmatrix} \theta_{au} \\ \theta_{av} \\ \theta_{aw} \end{pmatrix} \quad \langle y_a \rangle = \begin{pmatrix} y_{au} \\ y_{av} \\ y_{aw} \end{pmatrix}$$

$$\langle M_b \rangle = \begin{pmatrix} M_{bu} \\ M_{bv} \\ M_{bw} \end{pmatrix} \quad \langle Q_b \rangle = \begin{pmatrix} Q_{bu} \\ Q_{bv} \\ Q_{bw} \end{pmatrix} \quad \langle \theta_b \rangle = \begin{pmatrix} \theta_{bu} \\ \theta_{bv} \\ \theta_{bw} \end{pmatrix} \quad \langle y_b \rangle = \begin{pmatrix} y_{bu} \\ y_{bv} \\ y_{bw} \end{pmatrix}$$

$$\langle M_r \rangle = \begin{pmatrix} M_{rx} \\ M_{ry} \\ M_{rz} \end{pmatrix} \quad \langle Q_r \rangle = \begin{pmatrix} Q_{rx} \\ Q_{ry} \\ Q_{rz} \end{pmatrix} \quad \langle \theta_r \rangle = \begin{pmatrix} \theta_{rx} \\ \theta_{ry} \\ \theta_{rz} \end{pmatrix} \quad \langle y_r \rangle = \begin{pmatrix} y_{rx} \\ y_{ry} \\ y_{rz} \end{pmatrix}$$

$$\langle m_a \rangle = \begin{pmatrix} m_{au} \\ m_{av} \\ m_{aw} \end{pmatrix} \quad \langle q_a \rangle = \begin{pmatrix} q_u \\ q_v \\ q_w \end{pmatrix} \quad \langle \theta_{ob} \rangle = \begin{pmatrix} \theta_{obu} \\ \theta_{obv} \\ \theta_{obw} \end{pmatrix} \quad \langle y_{ob} \rangle = \begin{pmatrix} y_{obu} \\ y_{obv} \\ y_{obw} \end{pmatrix}$$

$$\langle m_{fa} \rangle = \begin{pmatrix} m_{fau} \\ m_{fav} \\ m_{faw} \end{pmatrix} \quad \langle q_{fa} \rangle = \begin{pmatrix} q_{fau} \\ q_{fav} \\ q_{faw} \end{pmatrix} \quad \langle m_p \rangle = \begin{pmatrix} m_{px} \\ m_{py} \\ m_{pz} \end{pmatrix} \quad \langle q_p \rangle = \begin{pmatrix} q_{px} \\ q_{py} \\ q_{pz} \end{pmatrix}$$

$$\langle m_{fb} \rangle = \begin{pmatrix} m_{fbu} \\ m_{fbv} \\ m_{fbw} \end{pmatrix} \quad \langle q_{fb} \rangle = \begin{pmatrix} q_{fbu} \\ q_{fbv} \\ q_{fbw} \end{pmatrix} \quad \left[\lambda - \bar{\mu} \frac{1}{v} \mu \right] = \begin{bmatrix} GJ_d/l & & \\ & EJ_v/l & \\ & & EJ_w/l \end{bmatrix}$$

$$[\xi] = \begin{bmatrix} l/GJ_d & & \\ & l/EJ_v & \\ & & l/EJ_w \end{bmatrix} \quad [\eta] = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & l^2/2 EJ_v & \\ & & l^2/2 EJ_w \end{bmatrix} \quad [\zeta] = \begin{bmatrix} l/EA & & \\ & l^3/3 EJ_w & \\ & & l^3/3 EJ_v \end{bmatrix}$$

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} GJ_d/l & & \\ & 4 EJ_v/l & \\ & & 4 EJ_w/l \end{bmatrix} \quad [\mu] = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 6 EJ_v/l^2 & \\ & & -6 EJ_w/l^2 \end{bmatrix} \quad [\nu] = \begin{bmatrix} EA/l & & \\ & 12 EJ_w/l^3 & \\ & & 12 EJ_v/l^3 \end{bmatrix}$$

$$[L] = \begin{bmatrix} 0 & \\ & -l \end{bmatrix} \quad [C] = \begin{bmatrix} C_{xu} & C_{xv} & C_{xw} \\ C_{yu} & C_{yv} & C_{yw} \\ C_{zu} & C_{zv} & C_{zw} \end{bmatrix} \quad [\alpha^*] = \begin{bmatrix} \alpha & \\ & \alpha \end{bmatrix}$$

$$[\beta^*] = \begin{bmatrix} \beta & \\ & \beta & \\ & & \beta \end{bmatrix} \quad [R_m] = [R_{mx} R_{my} R_{mz}] \quad [R_q] = [R_{qx} R_{qy} R_{qz}]$$

$$[A_m] = [R_{m\pm}][\alpha^*][C] \quad [B_m] = [R_{m\pm}][\beta^*][C]$$

$$[A_q] = [R_{q\pm}][\alpha^*][C] \quad [B_q] = [R_{q\pm}][\beta^*][C]$$

2. 解式の誘導

前節で定義した記号を用いて、部材に作用する力の釣合条件を求めると次のごとくなる。

$$\begin{pmatrix} M_a \\ Q_a \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} I & L \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_b \\ Q_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_a \\ q_a \end{pmatrix} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

また部材の a, b 両端の変位の間には次の関係が成り立つ¹⁾。

$$\begin{pmatrix} \theta_b \\ y_b \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} I & 0 \\ L & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \eta \\ \gamma & \zeta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_b \\ Q_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ y_{ob} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (2)$$

一方節点で力の釣合条件を立てると

$$-\begin{bmatrix} \alpha^*C \\ \alpha^*C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_a \\ Q_a \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} \beta^*C \\ \beta^*C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_b \\ Q_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_p \\ q_p \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{R}_m \\ \bar{R}_q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_r \\ Q_r \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

が得られる。また部材はすべて剛結されているものとする、「各節点に集まる部材の変位が相等しい」という条件より次の二式が得られる。

$$\begin{pmatrix} \theta_a \\ y_a \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^*C \\ \alpha^*C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_p \\ y_p \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \theta_b \\ y_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^*C \\ \beta^*C \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_p \\ y_p \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (4), (5)$$

最後に「支点反力の方向の変位は0である」という条件より

$$\begin{bmatrix} R_m \\ R_q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_p \\ y_p \end{pmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

が得られる。以上 (1)~(6) 式を連立させて解けば良いわけであるが、これでは方程式の数が多すぎて不便である。次にこれらの式を適当に組合わせて解りやすい形に変形しよう。

まず (6) 式より次式が得られる²⁾。

$$\begin{pmatrix} \theta_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_{m\perp} \\ R_{q\perp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{m\perp} \cdot \bar{R}_{m\perp} \\ R_{q\perp} \cdot \bar{R}_{q\perp} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R_{m\perp} \\ R_{q\perp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_p \\ y_p \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{R}_{m\perp} \\ \bar{R}_{q\perp} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_p^* \\ y_p^* \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (7)$$

この (7) 式を (4), (5) 式に代入し、さらにそれらを (2) 式に代入して移項すると

$$\begin{bmatrix} \xi & \eta \\ \eta & \zeta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_b \\ Q_b \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{A}_m - \bar{B}_m & 0 \\ \bar{L} \cdot \bar{A}_m & \bar{A}_q - \bar{B}_q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_p^* \\ y_p^* \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \theta_{ob} \\ y_{ob} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。一方 (3) 式の左より $\begin{bmatrix} R_{m\perp} \\ R_{q\perp} \end{bmatrix}$ をかけて $\begin{pmatrix} M_r \\ Q_r \end{pmatrix}$ の項を消却し、(1) 式より $\begin{pmatrix} M_a \\ M_b \end{pmatrix}$ を求めて代入すると

$$\begin{bmatrix} A_m - B_m & A_m L \\ 0 & A_q - B_q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_b \\ Q_b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R_{m\perp} m_p + A_m a \\ R_{q\perp} q_p + A_q a \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (9)$$

が得られる。(8) 式と (9) 式より $\begin{pmatrix} M_b \\ Q_b \end{pmatrix}$ を消却し、第一節の定義および $\begin{bmatrix} \xi & \eta \\ \eta & \zeta \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & \bar{\mu} \\ \mu & \nu \end{bmatrix}$ を考慮しながら変形する

と次の (10) 式が得られる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_m - B_m & A_m L \\ 0 & A_q - B_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \bar{\mu} \\ \mu & \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_m - \bar{B}_m & 0 \\ \bar{L} \bar{A}_m & \bar{A}_q - \bar{B}_q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_p^* \\ y_p^* \end{pmatrix} \\ & = \left\{ \begin{bmatrix} [A_m - B_m][\lambda - \bar{\mu} \frac{1}{\nu}] [\bar{A}_m - \bar{B}_m], 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{A_m + B_m}{2} L \\ [A_q - B_q] \end{bmatrix} [\nu] \begin{bmatrix} \bar{L} [\frac{\bar{A}_m + \bar{B}_m}{2}] \\ [\bar{A}_q - \bar{B}_q] \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \theta_p^* \\ y_p^* \end{pmatrix} \\ & = \left\{ \begin{pmatrix} R_{m\perp} m_p \\ R_{q\perp} q_p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_m m_{fa} + B_m m_{fb} \\ A_q q_{fa} + B_q q_{fb} \end{pmatrix} \right\} \quad \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

これが解かなければならない解式である。

本文では撓角撓度法の流義にしたがつて解式を求めた。同じような手段で Bleich の 4 連モーメント定理にしたがつた解式を求めることもできる。しかし問題を複雑にするだけであるから、ここではその方法についてふれない事にする。

3. 部材端の変形および部材力

解式 (10) の解き方はあとで述べることにしてこれが解けたものとする、その解 $(\theta_p^*), (y_p^*)$ を使って、部材端の変形および部材力は次のごとく求めることができる。

(4), (5), (6) 式より

$$\begin{pmatrix} \theta_{au} \\ \theta_{av} \\ \theta_{aw} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xu} C_{yu} C_{zu} \\ C_{xv} C_{yv} C_{zv} \\ C_{xw} C_{yw} C_{zw} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}_{mx} \\ \bar{R}_{my} \\ \bar{R}_{mz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{px}^* \\ \theta_{py}^* \\ \theta_{pz}^* \end{pmatrix} \quad \dots\dots (11) \quad \begin{pmatrix} \theta_{bu} \\ \theta_{bv} \\ \theta_{bw} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{b} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}_{mx} \\ \bar{R}_{my} \\ \bar{R}_{mz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{px}^* \\ \theta_{py}^* \\ \theta_{pz}^* \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} y_{au} \\ y_{av} \\ y_{aw} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} \\ \bar{a} \\ \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}_{qx} \\ \bar{R}_{qy} \\ \bar{R}_{qz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{px}^* \\ y_{py}^* \\ y_{pz}^* \end{pmatrix} \quad \dots\dots (13) \quad \begin{pmatrix} y_{bu} \\ y_{bv} \\ y_{bw} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b} \\ \bar{b} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}_{qx} \\ \bar{R}_{qy} \\ \bar{R}_{qz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{px}^* \\ y_{py}^* \\ y_{pz}^* \end{pmatrix} \quad (14)$$

また (1), (2) 式を変形し (11)~(14) 式を考慮すると

$$\begin{pmatrix} M_{au} \\ M_{av} \\ M_{aw} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} GJ_d/l \\ EJ_v/l \\ EJ_w/l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{au} - \theta_{bu} \\ 4\theta_{av} + 2\theta_{bv} + \frac{6}{l}(-y_{av} + y_{bv}) \\ 4\theta_{aw} + 2\theta_{bw} - \frac{6}{l}(-y_{av} + y_{bv}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{fa} \\ m_{fa} \\ m_{fa} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$\begin{pmatrix} M_{bu} \\ M_{bv} \\ M_{bw} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} GJ_d/l \\ EJ_v/l \\ EJ_w/l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -\theta_{au} + \theta_{bu} \\ 2\theta_{av} + 4\theta_{bv} + \frac{6}{l}(-y_{av} + y_{bv}) \\ 2\theta_{aw} + 4\theta_{bw} - \frac{6}{l}(-y_{av} + y_{bv}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{fbu} \\ m_{fbv} \\ m_{fbw} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (16)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{au} \\ Q_{av} \\ Q_{aw} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} EA/l \\ 12EJ_w/l^3 \\ 12EJ_v/l^3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{au} - y_{bu} \\ y_{av} - y_{bv} + \frac{l}{2}(\theta_{aw} + \theta_{bw}) \\ y_{aw} - y_{bw} - \frac{l}{2}(\theta_{av} + \theta_{bv}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{fau} \\ q_{fav} \\ q_{faw} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{bu} \\ Q_{bv} \\ Q_{bw} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -y_{av} + y_{bu} \\ -y_{av} + y_{bv} - \frac{l}{2}(\theta_{aw} + \theta_{bw}) \\ -y_{aw} + y_{bw} + \frac{l}{2}(\theta_{av} + \theta_{bv}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_{fbu} \\ q_{fbv} \\ q_{fbw} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

4. 特別な場合

(1) トラス

$GJ_d/l = EJ_v/l = EJ_w/l = 0$ とし、外力は節点だけに作用するものとする (10)~(18) 式は次のごとく簡易化される³⁾。

$$\begin{aligned} [R_{qx} R_{qy} R_{qz}] \pm \begin{bmatrix} \alpha - \beta & C_{xu} \\ \alpha - \beta & C_{yu} \\ \alpha - \beta & C_{zu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} EA \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{xu}[\bar{\alpha} - \bar{\beta}] \\ C_{yu}[\bar{\alpha} - \bar{\beta}] \\ C_{zu}[\bar{\alpha} - \bar{\beta}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R}_{qx} \\ \bar{R}_{qy} \\ \bar{R}_{qz} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} y_{px}^* \\ y_{py}^* \\ y_{pz}^* \end{pmatrix} \\ = [R_{qx} R_{qy} R_{qz}] \begin{pmatrix} q_{px} \\ q_{py} \\ q_{pz} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} y_{au} \\ y_{av} \\ y_{aw} \end{pmatrix} = (13) \text{式}, \quad \begin{pmatrix} y_{bu} \\ y_{bv} \\ y_{bw} \end{pmatrix} = (14) \text{式}$$

$$(Q_{au}) = \begin{bmatrix} EA \\ l \end{bmatrix} (y_{au} - y_{bu}) = -(Q_{bu}) \dots\dots\dots (20)$$

(2) 平面構造物

構造物は x - y 平面内にあるものとし、 z 軸と w 軸を一致させると

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{xu} & C_{xv} & 0 \\ C_{yv} & C_{yv} & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

となる。また支点は面内あるいは z 軸方向に変位し、 x - y 面内にふくまれる軸あるいは z 軸のまわりに回転するものとする

$$[R_m] = \begin{bmatrix} R'_{mx} & R'_{my} & 0 \\ 0 & 0 & R'_{mz} \end{bmatrix}, \quad [R_q] = \begin{bmatrix} R'_{qx} & R'_{qy} & 0 \\ 0 & 0 & R'_{qz} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22), (23)$$

と書ける。この (21)~(23) 式を (10) 式に代入して変形し、変数の順序をかえると、次の 2 式が得られる。

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{bmatrix} [A_{mz} - B_{mz}] \begin{bmatrix} EJ_w \\ l \end{bmatrix} [\bar{A}_{mz} - \bar{B}_{mz}], 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{mz} + B_{mz} \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{mz} + \bar{B}_{mz} \\ 2 \end{bmatrix}, [\bar{A}_{qz} - \bar{B}_{qz}] \end{bmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \theta_{pz}^* \\ y_{pz}^* \end{pmatrix} \\ = \left\{ \begin{pmatrix} R'_{mz} \pm m_{pz} \\ R'_{qz} \pm q_{pz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{mz} m_{fa2} + B_{mz} m_{fb2} \\ A_{qz} q_{faz} + B_{qz} q_{fbz} \end{pmatrix} \right\} \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{bmatrix} [A_{mz} - B_{mz}] \begin{bmatrix} \lambda - \bar{\mu} \frac{1}{\nu} \mu \\ \nu \end{bmatrix} [\bar{A}_{mz} - \bar{B}_{mz}], 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{mz} + B_{mz} \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12EJ_v \\ l^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, -l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{mz} + \bar{B}_{mz} \\ 2 \end{bmatrix}, [\bar{A}_{qz} - \bar{B}_{qz}] \end{bmatrix} \right\} \\ \begin{pmatrix} \theta_{pz}^* \\ y_{pz}^* \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} R'_{mz} \pm m_{pz} \\ R'_{qz} \pm q_{pz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{mz} m_{fa2} + B_{mz} m_{fb2} \\ A_{qz} q_{faz} + B_{qz} q_{fbz} \end{pmatrix} \right\} \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ただしサフィックス 2 は第 1 節その他で定義した複合ベクトルや複合行列で、第 3 行および第 3 列をのぞいたものであり、サフィックス $\bar{\nu}$ は同じく第 1, 2 行および第 1, 2 列をのぞいたものである。

(24) 式はいわゆる平面構造物の解式⁴⁾であつて、構造物・荷重ともに x - y 平面内にある場合であり、(25) 式は格子桁等のごとく、構造物は x - y 平面内にあり、荷重は z 軸方向から作用する場合の解式である。

5. 解式の解き方

前節までに述べたとおり、立体骨組構造物を解くには(10)式の解を求めることが先決問題である。しかしこの(10)式を解くことはなかなか容易でない。以下その二、三の方法についてのべる。

(1) 直接法

まず(10)式を次のごとく簡単化して表わすことにする。

$$\begin{bmatrix} D & \bar{F} \\ F & G \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_p^* \\ y_p^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_m \\ P_q \end{pmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

(26)式の左辺の係数行列の逆行列は次のごとくなる⁵⁾。

$$\begin{bmatrix} D & \bar{F} \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D^{-1}\bar{F} \\ -I \end{bmatrix} [H_q]^{-1} [FD^{-1}, -I] \dots\dots\dots (27)$$

$$\text{または} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -I \\ G^{-1}F \end{bmatrix} [H_m]^{-1} [-I, \bar{F}G^{-1}] \dots\dots\dots (28)$$

ただし $[H_q]^{-1} = [G - FD^{-1}\bar{F}]^{-1}$, $[H_m]^{-1} = [D - \bar{F}G^{-1}F]^{-1}$

(27)または(28)式の計算ができれば(26)式は解けたことになる。しかしこの計算には、節点の数の約3倍の元数を持った行列(平面構造物の場合は約2倍)の逆行列を求めなければならない。したがって電子計算機にたよる場合以外には、実用性はない。

(2) イテラチオン法

(26)式のD,Gを対角線要素のみをふくむ行列D₁,G₁と、その他の要素をふくむ行列D₂,G₂とに分けて次のごとく表わす⁶⁾。

$$\begin{bmatrix} D & \bar{F} \\ F & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & G_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_2 & \bar{F} \\ F & G_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (29)$$

(29)式の逆行列は

$$\begin{bmatrix} D & \bar{F} \\ F & G \end{bmatrix}^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} D_1^{-1}D_2 & D_1^{-1}\bar{F} \\ G_1^{-1}F & G_1^{-1}G_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1^{-1}D_2 & D_1^{-1}\bar{F} \\ G_1^{-1}F & G_1^{-1}G_2 \end{bmatrix}^2 - \dots\dots \right\} \begin{bmatrix} D_1^{-1} & 0 \\ 0 & G_1^{-1} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (30)$$

と書けるから、(26)式の解は終局次のごとくなる。

$$\begin{pmatrix} \theta_p^* \\ y_p^* \end{pmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} r_i \\ \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \varepsilon_i \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} P_m \\ P_q \end{pmatrix} \dots\dots\dots (31)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし} \quad [r_{i+1}] &= [D_1^{-1}D_2][r_i] + [D_1^{-1}\bar{F}][\varepsilon_i] & [r_1] &= [D_1^{-1}] \\ [\varepsilon_{i+1}] &= [G_1^{-1}F][r_i] + [G_1^{-1}G_2][\varepsilon_i] & [\varepsilon_1] &= [0] \\ [\bar{\varepsilon}_{i+1}] &= [\varepsilon_{i+1}] \text{の転置行列} & [\bar{\varepsilon}_1] &= [0] \\ [\delta_{i+1}] &= [G_1^{-1}F][\bar{\varepsilon}_i] + [G_1^{-1}G_2][\delta_i] & [\delta_i] &= [G_1^{-1}] \end{aligned}$$

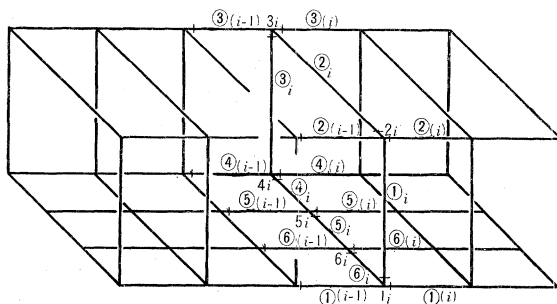
ゆえにただし書に示した漸化式によつて、必要な精度まで[r_i]……[δ_i]を計算し、その結果を(31)式に代入すれば(θ_p^{*})(y_p^{*})を求める事ができる。

(3) 係数行列を小行列に分割する方法

例えば図-2のごとく一つの平面に平行な多数の枠組に分割できる場合、あるいは橋梁のごとく二つの主構と縦桁とに分割できる場合等は、節点や部材の番号を適当につけ、未知数や方程式の順序を適当に変更することによつて、解式(10)の係数行列を小行列に分割することができる。このようにすると、あとは元数の少ない小行列間の演算によつて(10)式の解を求めることができる。しかしこの分割の方法は個々の構造物の形に依存するところが多いので、一般的に議論することはやめて、図-2の例について説明しよう。

枠組iについて(10)式をつくると(その前後の枠組との間を結ぶ部材の部材力は外力にふくめる)。

図-2 枠組が平行連続する構造物



$$\begin{bmatrix} A_m - B_m & A_m L \\ A_q - B_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \bar{\mu} \\ \mu \nu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_m - \bar{B}_m \\ \bar{L} \bar{A}_m, \bar{A}_q - \bar{B}_q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_p^* \\ y_p^* \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} R_{m \perp} m_p \\ R_{q \perp} q_p \end{pmatrix}_i - \begin{pmatrix} A_m m_{fa} + B_m m_{fb} \\ A_q q_{fa} + B_q q_{fb} \end{pmatrix}_i \\ - \left[\begin{matrix} R_{m \perp} \\ R_{q \perp} \end{matrix} \right]_i \left\{ \begin{matrix} \beta^* C \\ \beta^* C \end{matrix} \right\}_{(i-1)} \begin{pmatrix} M_b \\ Q_b \end{pmatrix}_{(i-1)} + \left[\begin{matrix} \alpha^* C \\ \alpha^* C \end{matrix} \right]_{(i)} \begin{pmatrix} M_a \\ Q_a \end{pmatrix}_{(i)} \}$$

が得られる。(1), (2), (4), (5), (7) 式を用いて、上辺右辺の $\begin{pmatrix} M_a \\ Q_a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M_b \\ Q_b \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} \theta_p^* \\ y_p^* \end{pmatrix}$ におきかえ、式を整理する

$$\begin{aligned} & \text{と} \quad \begin{bmatrix} B_m \\ B_q \end{bmatrix}_{(i-1)} \begin{bmatrix} \lambda \bar{\mu} \\ \mu \nu \end{bmatrix}_{(i-1)} \begin{bmatrix} \bar{A}_m \\ \bar{L} \bar{A}_m, \bar{A}_q \end{bmatrix}_{(i-1)} \begin{pmatrix} \theta_p^* \\ y_p^* \end{pmatrix}_{i-1} + \left\{ \begin{matrix} A_m - B_m, A_m L \\ A_q - B_q \end{matrix} \right\}_{(i)} \begin{bmatrix} \lambda \bar{\mu} \\ \mu \nu \end{bmatrix}_{(i)} \begin{bmatrix} \bar{A}_m - \bar{B}_m \\ \bar{L} \bar{A}_m, \bar{A}_q - \bar{B}_q \end{bmatrix}_{(i)} \\ & + \begin{bmatrix} B_m \\ B_q \end{bmatrix}_{(i-1)} \begin{bmatrix} \lambda \bar{\mu} \\ \mu \nu \end{bmatrix}_{(i-1)} \begin{bmatrix} \bar{B}_m \\ \bar{B}_q \end{bmatrix}_{(i-1)} + \begin{bmatrix} A_m, A_m L \\ A_q \end{bmatrix}_{(i)} \begin{bmatrix} \lambda \bar{\mu} \\ \mu \nu \end{bmatrix}_{(i)} \begin{bmatrix} \bar{A}_m \\ \bar{L} \bar{A}_m, \bar{A}_q \end{bmatrix}_{(i)} \left\{ \begin{matrix} \theta_p^* \\ y_p^* \end{matrix} \right\}_i \\ & + \begin{bmatrix} A_m, A_m L \\ A_b \end{bmatrix}_{(i)} \begin{bmatrix} \lambda \bar{\mu} \\ \mu \nu \end{bmatrix}_{(i)} \begin{bmatrix} \bar{B}_m \\ \bar{B}_q \end{bmatrix}_{(i)} \begin{pmatrix} \theta_p^* \\ y_p^* \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} R_{m \perp} m_p \\ R_{q \perp} q_p \end{pmatrix}_i - \begin{pmatrix} A_m m_{fa} + B_m m_{fb} \\ A_q q_{fa} + B_q q_{fb} \end{pmatrix}_i \\ & - \begin{pmatrix} B_m m_{fb} \\ B_q q_{fb} \end{pmatrix}_{(i-1)} - \begin{pmatrix} A_m m_{fa} \\ A_q q_{fa} \end{pmatrix}_{(i)} \dots \dots \dots (32) \end{aligned}$$

となる。ただしサフィックス i は枠組 i に関する量であることを示し、 (i) は枠組 i と枠組 $i+1$ を結ぶ部材に関する量であることを示す。なお $A_{m(i)}, B_{m(i)}$ 等は次のごとく定義する。

$$\begin{aligned} [A_m]_{(i)} &= [R_{m \perp}]_i [\alpha^*]_{(i)} [C]_{(i)} & [B_m]_{(i)} &= [R_{m \perp}]_{i+1} [\beta^*]_{(i)} [C]_{(i)} \\ [A_q]_{(i)} &= [R_{q \perp}]_i [\alpha^*]_{(i)} [C]_{(i)} & [B_q]_{(i)} &= [R_{q \perp}]_{i+1} [\beta^*]_{(i)} [C]_{(i)} \end{aligned}$$

各枠組について(32)式を作り、それらを連立させて解けばよい。これは一見複雑なように見えるが、連立方程式の左辺にてくる係数行列は、一般化された Continuant Matrix であり、逆行列はその中にふくまれる小行列間の演算によつて求めることができる⁷⁾。ゆえに鉄塔・高層建築・橋梁等同じような形の枠組が連続する場合にこの方法を適用すると有利である。著者は鉄道橋の床組構造が主構に与える影響を調べるため、この方法を採用して計算を行なっている(二つの縦桁と二つの主構に分割した)。その結果については別の機会に発表する予定である。

6. 例 題

図-3 および図-4 に簡単な例題をのせておいた。図-3 は立体門形ラーメンである。この場合のように支点がすべて固定端である場合は R_m と R_q の形が同じになる(従つて A_m と A_q, B_m と B_q も同じ形になる)。解式の係数行列は 24 元となり、これをそのまま図示するとあまりに紙面を取りすぎると思われるので省略した。

図-3 (a) 例題 I

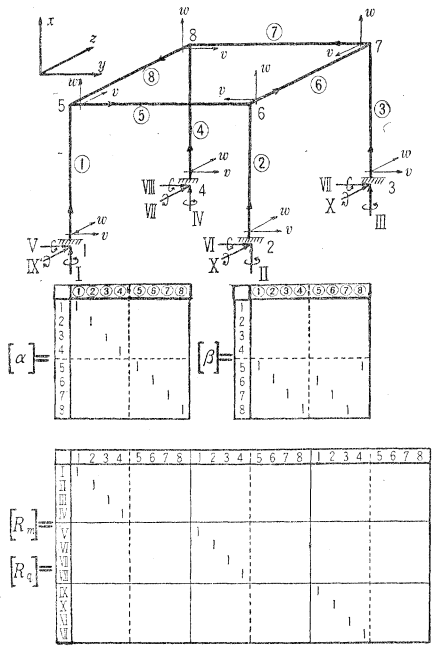


図-3 (b) 例題 II

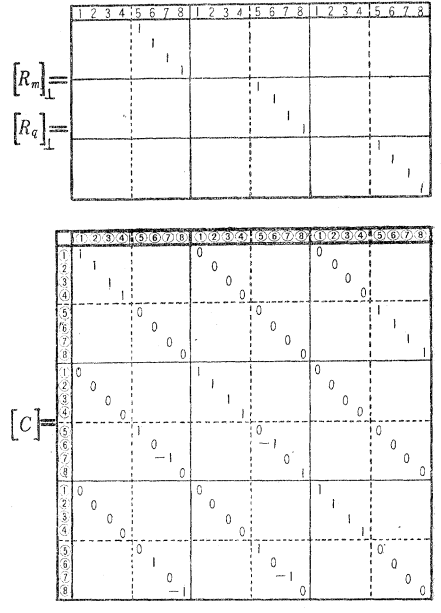


図-4 は格子桁の例題である。この場合は 4. (2) の議論が当てはまる。図の最後に (25) 式に相当する解式をあげておいた。この解式はその方程式の順序および未知数の順序を

5, 6; 1, 2, 7, 8, 13, 14; 3, 4, 9, 10, 15, 16; 11, 12
 の順に並べかえると, 5. (3) の議論で節点を 1, 2; 3, 4;
 5, 6; 7, 8 の 4 つに分割した場合に相当する。また
 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15; 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16
 の順に並べかえると, 節点を 1, 3, 5, 7, ; 2, 4, 6, 8 の 2 つに分割した場合になる。

図-3 (c) 例題 I

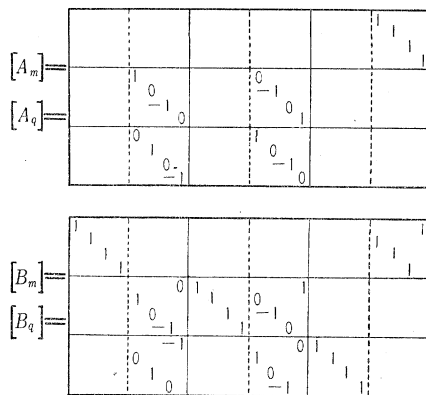


図-4 (a) 例題 II

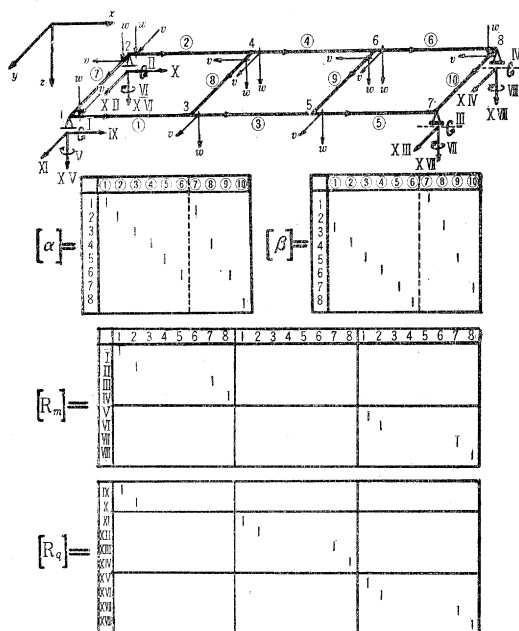


図-4 (b) 例題 II

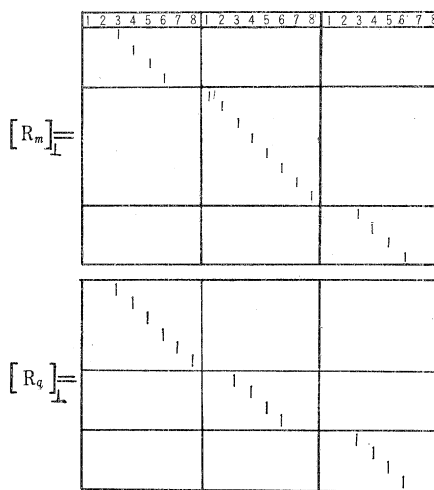


図-4 (c) 例題 II

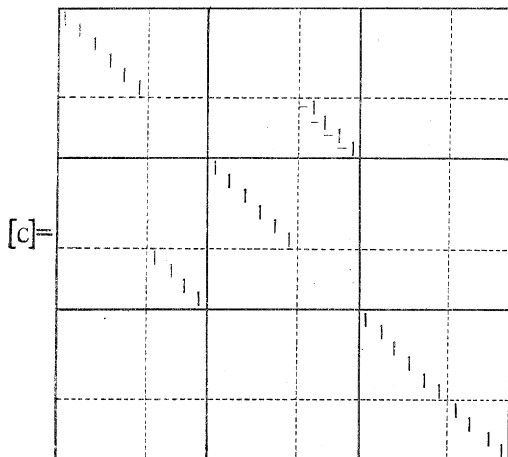


図-4 (d) 例題 II

