

静的荷重を受ける 2 ヒンジ鋼アーチ橋の耐荷力について

正員倉西茂*

ULTIMATE STRENGTH OF TWO-HINGED SOLID RIB STEEL ARCH BRIDGE

By Dr. Eng., Shigeru Kuranishi, C.E. Member

Synopsis: In this paper, the author experimentally checks the load carrying capacity of plastically buckled thin steel plate and proposes an approximate calculating method of its value. Considering this behavior of thin plate the author discusses the ultimate strength of two-hinged solid rib steel arch bridge under static loads.

要旨 本論文は薄肉鋼板は塑性座屈後も一定の耐荷力を有するということを実験的に確かめるとともにその値の近似計算法を述べ、この考え方を入れて2ヒンジ鋼アーチ橋の耐荷力を論じたものである。

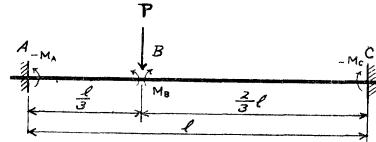
1. 序論

静的荷重を受ける構造物の耐荷力を求めるには構成部材の塑性変形まで考慮しなければならない。このように部材の塑性変形まで考慮して構造物を設計する方法は塑性設計といわれているが、これらの理論では部材の局部座屈ということに比較的注意が払っていない。われわれが使用している部材は薄肉断面をもつたものであるがこの薄肉鋼板に働く応力が降伏応力を越えると座屈を起こし、その耐荷力が減少するのが常である。いま一例とし両端固定の I-バリを考えよう。腹板の影響は無視し、材料は理想塑性体とし、縁応力が降伏点に達したときの抵抗モーメントを M_p とする。図-1 で固定点 A に最も大きな固定モーメントが生じる 1/3 点 B に荷重が載つたとき A 点の固定モーメント M_A は

图-1

$$M_A = -\frac{4}{27} \cdot l \cdot P \quad \dots \dots \dots \quad (a)$$

である。 P が増大し $M_A=M_P$ になつたとき弾性設計ではこのハリの耐荷力と定めるわけであるが、塑性変形も考慮すれば $M_A=M_P$ の状態を保ちながらハリは荷重に耐えることができる。このとき B 点と C 点の受ける曲げモーメントは



である。いま $|M_B| \geq |M_C|$ であるから次に B 点に塑性ヒンジが生じこのときの耐荷力は次式で与えられる。

さらに荷重が増大しC点でも降伏点に達するとともにハリはもはや荷重に耐えられなくなり、このとき

で与えられる。次に縁応力が降伏点に達すると同時に突縁は座屈を起こし、その耐荷力は減少し抵抗モーメントも M_P の 75%に減少するとし、その後の変形に対してはこの値を保ち続けるとしよう。するとまず A 点で降伏点に達すると同時に耐荷力は減じ $0.75 M_P$ となる。よって次に B 点が降伏する瞬前の耐荷力は

$$M_B = M_P = -\frac{1}{2} \times 0.75 M_P + \frac{14}{81} l \cdot P \quad \therefore \quad P = \frac{7.96}{l} M_P \quad \dots \dots \dots \text{(e)}$$

となる。次にB点でも突縁の座屈を越しその抵抗モーメントはやはり同じく $0.75 M_p$ となるゆえC点が降伏する瞬前では

となり (e) 式で与えた値よりも減少し、さらにC点でも座屈を起こすとハリの耐荷力は

* 東京大学工学博士、東北大学講師、工学部土木工学科教室

となってしまう(図-2 参照)。このように板の局部座屈による耐荷力の減少を考えると、崩壊変形を示しているときの荷重とその部材が耐え得る最大荷重は一致せず、それ以前に最大荷重を示す状態が生じる。いまあげた例では固定点Aの突縁が座屈し、B点の突縁応力が降伏点に達したときに最大荷重が現われ、それ以後は塑性変形を考へても耐荷力は減少する。鋼板の局部座屈を考慮すると構造物の崩壊機構は複雑となり塑性設計の眼目の一つである設計の簡易化にも反するが、一般の鋼橋では薄肉断面の部材が使用されている場合がかなり多く、溶接の進歩とともにこの傾向はさらに強くなってくると思われるが、これら薄肉鋼板に働く圧縮応力が降伏点を越せば座屈を起こすのが常であるから、その影響を考えな本論文はカバー プレートあるいはフランジアーチ橋の崩壊機構を追求しようといが道路橋示方書等で定めている断面をすべて座屈しないものとして取扱つた。また

2. 降伏点付近の応力で座屈した薄肉鋼板の耐荷力

(1) 実験的考慮

弾性領域で座屈した板の耐荷力については Kármán¹⁾, Marguerre²⁾ 等の理論, 実験式等が報告されているが鋼板が塑性座屈した後の耐荷力についての報告はほとんど見当らない。そこで筆者は道路

写真-1

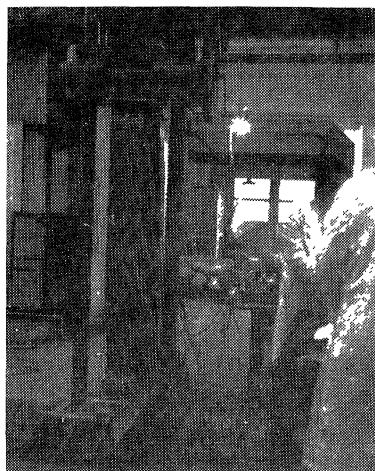


図-2 図-1 のハリの各断面の抵抗モーメントと耐荷力の関係

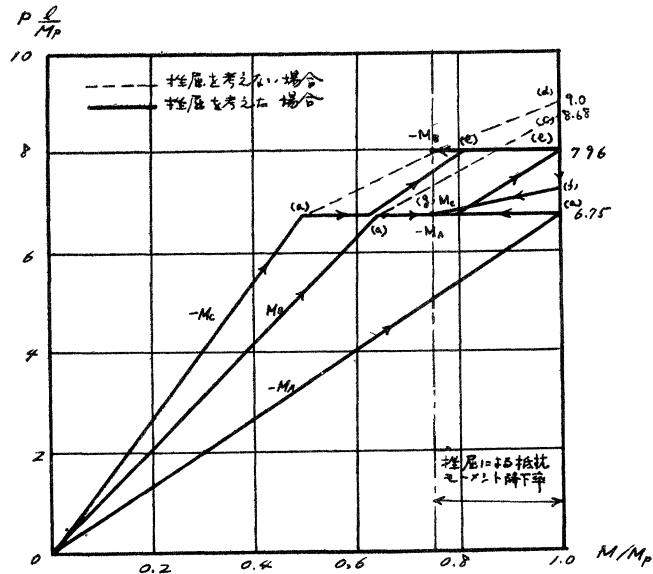
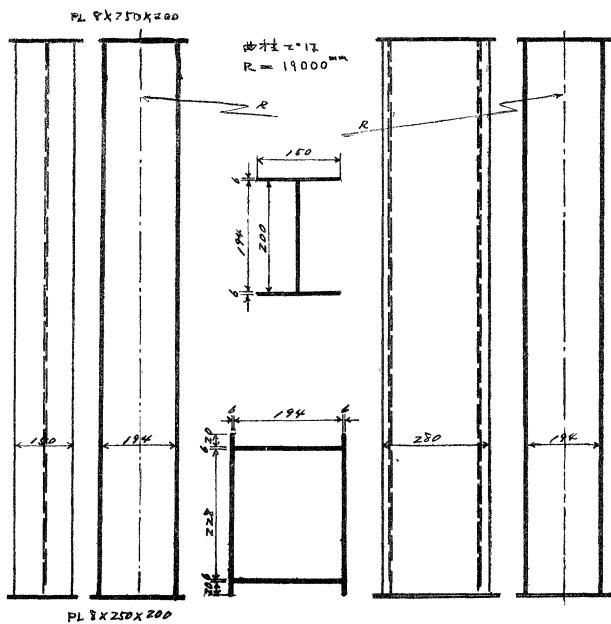


図-3 試験片寸法



橋の示方書に定められている最も大きな板厚比をもつた柱について圧縮実験を行い、板を局部的に座屈させ、その後の耐荷力と柱軸方向の変位の関係を求めた。使用した柱の断面は箱形とI形の2種で、それぞれ直柱とわざ

かに弯曲している柱とについて実験を行つた。使用試験柱の断面形状は図-3に示す。写真-1は実験中の柱を示す。柱の縦方向の変位は試験台の変位で代用した。また板の表面に電気抵抗線ヒズミ計をはりそのヒズミも測定した。荷重速度は座屈による急激な応力と変位の変化に追従できず制御できなかつた。また試験機の都合でI形と箱形では違つた試験機を使用した等十分正確な実験ではないがその定性的性質はわかると思う。図-4(a), (b) にその結果を示す。この結果を見ると直柱においては大体 3000 kg/cm^2 程度の応力で局部座屈を起こしその耐荷力は箱形断面では約 80%, I 形断面では 70% 程度に減じるが、その後はわずかな応力の増加に対しヒズミは非常に大きく、巨視的には一定の耐荷力をもつていると見て差し支えないものと思われる。曲柱においては元弯曲の影響により端部付近の凸側フランジ応力が大きくなり、直柱が座屈したときと同程度のヒズミを示したとき、その付近の板は局部座屈を起こし、つづいてその断面の他の板も座屈し柱全体としての耐荷力は弯曲による応力の増加度に比例し、箱形断面で 90%, I 形断面では 77%, と小さくなつてゐるが、座屈後の様相は直柱と変らずその耐荷力も直柱の場合とほとんど変わらない。

(2) 理論的考察

塑性領域で座屈した薄肉鋼板の耐荷力を理論的に求めるのは非常に困難な問題であるので、ここでは座屈変形を適当に仮定し、座屈により生じる中央断面での引張り塑性領域の面積と圧縮塑性領域の面積の割合より、全断面が一様に塑性変形を示した場合よりもどの程度の耐荷力の減少が見られるかを求めて見ることにする。一方の応力を受けた四辺回転自由の板が降伏点付近の応力状態で座屈し、さらに荷重を受け変形が増大した場合を考えよう。 x 軸を板の中央面内で応力を受けている長手方向の端縁にそつてとり、 y 軸を同じ面内で x 軸に直角にとり、 z 軸をこれらに垂直に図-5に示したよう

にとれば、板中的一点の変位 u, v, w のうち w が特に大きい場合には座屈により生じる板内のヒズミは近似的に次式で与えられる。ここでは u, v, w は座屈を起こす瞬前の状態よりはかり、それぞれ x, y, z 軸の正方向に向うものを正とする。

$$\bar{\epsilon}_x = \bar{\epsilon}_x - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \bar{\epsilon}_y = \bar{\epsilon}_y - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad r_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここで $\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y$ は中央面に生じるヒズミである。

$$\text{いま} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \bar{\epsilon}_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \bar{\epsilon}_y \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{なる関係があり、座屈変形を} \quad w = f \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \quad \dots \dots \dots (3)$$

と仮定すれば

図-4 (a) 局部座屈を起こした柱の平均応力とヒズミの関係

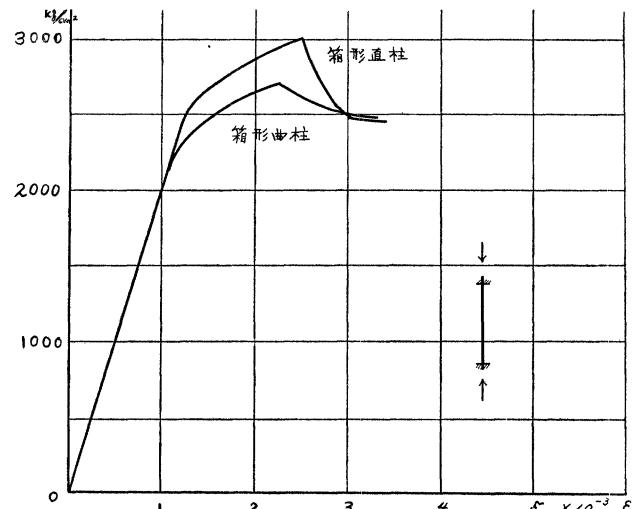
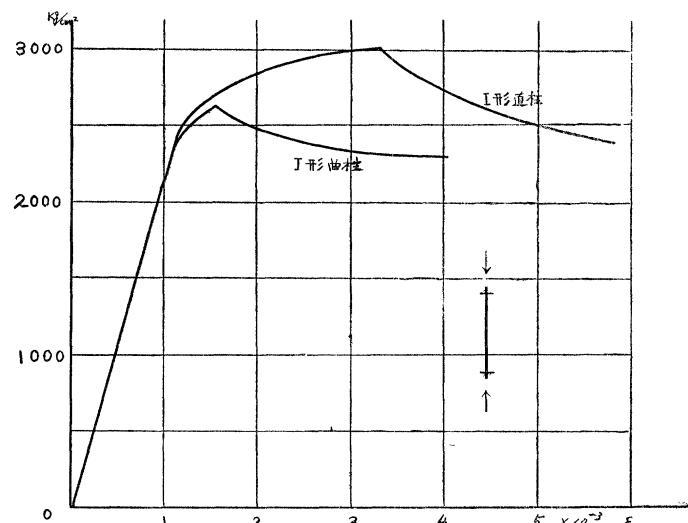


図-4 (b) 局部座屈を起こした柱の平均応力とヒズミの関係



$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{f^2 \pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{\pi}{a} x \sin^2 \frac{\pi}{b} y + \bar{\epsilon}_x \dots \dots \dots (4)$$

$x=a$ での板端の変位を u_a とし、 $\bar{\epsilon}_x = X \cdot Y$ なる x と y のみの関数で $\bar{\epsilon}_x$ は表わされるものとすれば u_a は $x=a$ で一定とし

$$Y = \frac{u_a}{X_a} + \frac{f^2 \pi^2}{4 a X_a} - \frac{f^2 \pi^2}{4 a X_a} \cos^2 \frac{\pi}{b} y \dots \dots \dots (5)$$

をうる。ここで $\bar{X}_a = \int_0^a X dx$ である。

いま求めようとしているのは中央断面 ($x=a/2$) での応力分布であり X の形はそれほど重要でないが適當な x の関

数として $X = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi}{a} x$ をとれば $\bar{X}_a = \frac{1}{2} \int_0^a \sin^2 \frac{\pi}{a} x dx = \frac{a}{4}$ (6)

であり、また中央面にヒズミが生ぜずにたわみ変形をするものとすれば $u_a = -\frac{f^2 \pi^2}{4 a^2}$ が得られる。この仮定は変形がかなり大きくなれば十分近似的に成立するものと思われる。すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{f^2 \pi^2}{a^2} \left(\cos^2 \frac{\pi}{a} x \sin^2 \frac{\pi}{b} y + \sin^2 \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi}{b} y \right) \dots \dots \dots (7) \quad \bar{\epsilon}_x = -\frac{1}{2} \frac{f^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi}{b} y \dots \dots \dots (8)$$

いま $\bar{\epsilon}_y = \nu \bar{\epsilon}_x$ とすれば $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{f^2 \pi^2}{4 ab} \sin \frac{2 \pi}{a} \cos \frac{2 \pi}{b} y$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\pi}{4 a} \left(\frac{f^2 \pi^2}{b^2} + \nu \frac{f^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin \frac{2 \pi}{a} x \left(y + \frac{b}{2 \pi} \sin \frac{2 \pi}{b} y \right)$$

をうる。いま座屈するとき生じている x 軸方向のヒズミ ϵ_k にこれらのヒズミが加わるものとすれば、座屈変形を起こし荷重を受けている板のヒズミは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} e_x &= -\epsilon_k - \frac{1}{2} \frac{f^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi}{b} y + z \frac{f^2 \pi^2}{a^2} \sin \frac{\pi}{b} y \sin \frac{\pi}{a} x \\ e_y &= \nu \epsilon_k + \frac{\nu}{2} \frac{f^2 \pi^2}{a^2} \sin^2 \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi}{b} y + z \frac{f^2 \pi^2}{b^2} \sin \frac{\pi}{b} y \sin \frac{\pi}{a} y \\ r_{xy} &= -\frac{f^2 \pi^2}{4 ab} \sin \frac{2 \pi}{a} x \cos \frac{2 \pi}{b} y - \frac{1}{4} \frac{\pi}{a} \left(\frac{f^2 \pi^2}{b^2} - \nu \frac{f^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin \frac{2 \pi}{a} x \\ &\times \left(y + \frac{b}{2 \pi} \sin \frac{\pi}{b} y \right) - 2 z \frac{f^2 \pi^2}{ab} \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

いま $x=a/2$ なる中央断面では

$$e_x = -\epsilon_k - 2 \epsilon_0 \cos^2 \frac{\pi}{b} y + \frac{2 \pi \epsilon_0^{1/2}}{a} z \sin \frac{\pi}{b} y, \quad e_y = \nu \epsilon_k + 2 \nu \epsilon_0 \cos^2 \frac{\pi}{b} y + \frac{2 k \pi \epsilon_0^{1/2}}{b} z \sin \frac{\pi}{b} y, \quad r_{xy} = 0 \dots \dots \dots (10)$$

ここで $\epsilon_0 = -\frac{u_a}{a} = \frac{f^2 \pi^2}{4 a^2}$, $k = \frac{a}{b}$ である。このような変形を起こしたとき Henky, Mises³⁾ の条件式に従い塑性領域に入るものとすれば $\frac{3}{4} e_i \leq e_x^2 + e_y^2 + e_x e_y - \frac{r_{xy}}{4}$

上式に (10) 式を代入し整理すれば

$$e_x^2 + e_y^2 + e_x e_y = A_1 \xi^2 \sin^2 \frac{\pi}{b} y + A_2 \xi \sin \frac{\pi}{b} y + A_3 \dots \dots \dots (11)$$

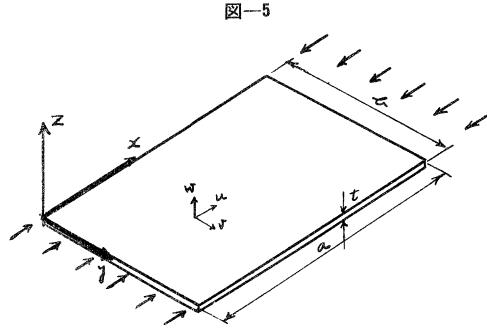
ここで $\xi = z/b$

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= 4 \pi^2 \epsilon_0 \left(\frac{1}{k^2} + k^2 + 1 \right) \\ A_2 &= -\pi \epsilon_0^{3/2} \left(\frac{8 \pi}{k} - 8 \pi k \nu + 4 \pi k - \frac{4 \pi}{k} \nu \right) \cos^2 \frac{\pi}{b} y - \frac{4 \pi}{k} \epsilon_k \epsilon_0^{1/2} + 4 \pi k \nu \epsilon_k \epsilon_0^{1/2} - 2 \pi \epsilon_k \epsilon_0^{1/2} \\ A_3 &= \epsilon_k^2 + 4 \epsilon_k \epsilon_0 (1 - \nu + \nu^2) \cos^2 \frac{\pi}{b} y + 4 \epsilon_0^2 (1 - \nu + \nu^2) \cos^4 \frac{\pi}{b} y - 4 \epsilon_k^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

いま $k=1$, $\nu=0.5$ とすれば

$$A_1 = 12 \pi^2 \epsilon_0, \quad A_2 = -6 \pi \epsilon_0^{3/2} \cos^2 \frac{\pi}{b} y - 3 \pi \epsilon_0^{1/2} \epsilon_k, \quad A_3 = 3 \epsilon_0^2 \cos^4 \frac{\pi}{b} y + 3 \epsilon_k \epsilon_0 \cos^2 \frac{\pi}{b} y + \frac{3}{4} \epsilon_k^2 \dots \dots \dots (12-a)$$

をうる。よつて $\frac{3}{4} e_i^2 \leq A_1 \xi^2 \sin^2 \frac{\pi}{b} y + A_2 \xi \sin \frac{\pi}{b} y + A_3 \dots \dots \dots (13)$



$$\text{より } \zeta = \frac{-A_2 \pm \sqrt{D}}{A_1 \sin \frac{\pi}{b} y} \quad (13-a) \quad \text{ここで } D = 9 \varepsilon_i^3 \pi^2 \mu \left(-12 \mu^2 \cos^4 \frac{\pi}{b} y - 12 \mu r \cos^2 \frac{\pi}{b} y - 3 r^2 + 4 \right) \quad (14)$$

$\varepsilon_0 = \mu \varepsilon_i$, $\varepsilon_k = \gamma \varepsilon_i$ である。

(13-a) 式で $2 \times \sqrt{D/A_1} \sin \frac{\pi}{b} y$ は弾性領域にある部分の厚さを表わす。 $D < 0$ では弾性領域ではなく直接引張り、圧縮の塑性変形を示す部分が接することになる。(14) 式で $\epsilon_s = 1.5 \times 10^{-3}$, $r = 1$, $\mu = 2$, 板厚比を $1/40$ とすれば板の中央での弾性領域にある部分の厚さは板厚の35%程度となりさらに変形が進めばその平方根に比例してその厚さは減ずる(図-6 参照)。ヒズミ硬化、ヒズミ速度モーメントの平衡等を考えず単に与えられた変形による応力状態が引張り側にあるか圧縮側にあるかを決し、圧縮領域の面積から引張り領域の面積を減じた面積を有効断面積として板の耐荷力を求ることにする。いま引張りと圧縮領域の境界線は弾性領域の中央を通っているものとし、すなわち (13-a) 式にて $D = 0$ とし

なる曲線で表わされるものとすれば (12-a) 式を (15) 式に代入し整理すれば次式をうる。

$$\zeta = \frac{\mu^{1/2} \epsilon_1^{-1/2}}{8\pi} \left\{ (2 + r\mu^{-1})/\sin \frac{\pi}{b} y - 2 \sin \frac{\pi}{b} y \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

が与えられる。よって引張り領域にある部分の面積は

いま $r=1$, $\varepsilon_i=1.5 \times 10^{-3}$ とし, $\beta=40, 33$ の場合について, μ を $\mu=1, 2, 3, 4$ にとつて計算すると表-1をうる。この値をみると降伏応力付近の応力で座屈した板のヒズミを(9)式のように仮定すると、変形がかなり進んでも板は一定の耐荷力を有することがわかる。いま得られた値 0.84 と実験値の 0.82 と比較すると計算値の方が少々大きくなっているが、これは残留ヒズミの影響で引張り応力の範囲が広くなる、完全に降伏応力に達する前に板が座屈を起こしている、仮定変形が近似的である、等の影響と思われる。ここでは箱形断面の場合について行なつたが、I形断面でも同様な取扱いができると思われるが、その変形を正弦曲線で近似させるのは誤差が大きいものと思われる。実験値も少なく試験機試験法も完全なものではないが、降伏点付近の応力で座屈した板は座屈を示さずに塑性変形を示す耐荷力より減少はするが、なお一定の耐荷力を有するものと考えられる。そこで本論文では、いま計算した有効断面積の代りにその板に働く平均応力が減少するものとして図-7に示したような応力-ヒズミ曲線を画くものとして取扱うこととする。しかし実際には実験値からもわかる通り、直線的に降伏応力に達して座屈を起こすのではなく、それまでに材料自身もかなりの塑性変形を示すし、また材料自身が理想塑性体であつても、板が降伏応力に達したあとも塑性変形を示すことが理論的にも考えられる。いま Ilyushin^⑨ が座屈した板の凹側は、Huber, Mises, Hencky の仮説に従つて塑性状態に入り、凸側は弾性的変形をするものとして立てた平衡式を Stowell^⑩ が Shanley^⑪ の概念に従い座屈変形が起きても荷重は同時に増大し板のどの部分でも除荷が起らぬものとして改善した座屈した板の平衡式により計算すると

表-1 r の値

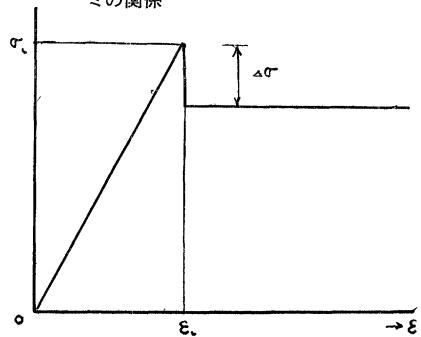
| $\frac{\mu}{\beta}$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|
| 33 | 0.841 | 0.841 | 0.841 | 0.841 |
| 40 | 0.841 | 0.841 | 0.841 | 0.841 |

図-7 本論文で仮定している平均応力とヒズミの関係

表-1 r の値

| $\frac{\mu}{\beta}$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|
| 33 | 0.841 | 0.841 | 0.841 | 0.841 |
| 40 | 0.841 | 0.841 | 0.841 | 0.841 |

図-7 本論文で仮定している平均応力とヒズミの関係



$$\varepsilon_i + \bar{\varepsilon} = -\frac{36}{17\pi^2} \left(\frac{b}{t}\right)^2 \quad \dots \dots \dots (22)$$

に達したとき板は撓屈し、耐荷力は $A/\epsilon_t + \bar{\epsilon}$ の形で減少する。いま $b/t=40$ の場合を計算すると $\epsilon_b = 2.9 \times 10^{-3}$ となり比較的実験で得られた値に近い値となる。たとえ理想塑性体であると考えても板の長軸方向の平均ヒズミは図-8のごとく降伏応力である程度の変形を示すことが予想される。その変形の最中にその構造物、特に不静定の場合は、最大耐荷力を示すことも考えられるが、そのような状態はかなり不安定であることが予想されそれを数量的に取り入れることは困難なので本論文では無視することにした。

3. 静荷重を受けるアーチの耐荷力

(1) アーチの崩壊機構はその荷重分布の形によつてかなりその様相が異なつてくる。
 そこで

- アーチ リブに直応力のみが働いている場合
- アーチ リブに主として直応力が働きそれに若干の曲げモーメントが加わつている場合
- アーチ リブに主として曲げモーメントが働き直応力の影響が小さい場合

の3コの場合について考えて見ることにする。なおここで取扱うアーチは薄肉断面のソリッド リブ2ヒンジ鋼アーチ橋で変形もアーチ面内に限定した。

(2) アーチ リブに直応力のみが働いている場合

この場合は放物線アーチに等分布荷重が載荷されたときに生じ、アーチの崩壊は主として全体としての座屈により起こる。アーチの座屈についての研究は古くから行われ多くの理論値や実験値が与えられている。一般的にいって放物線アーチの限界水平反力は

で与えられる。ここで l は支間、 J はアーチ リブの断面 2 次モーメント、 α はアーチの形状支持条件によって与えられる値である。今まで研究されてきたのはおもに弾性座屈の場合であるが、塑性座屈の場合はアーチにも Shanley の概念が適用されるものとすれば、 E の代りに接線弾性係数 E_t を用いればよい。

(3) アーチ リブに主として直応力が働きそれに若干の曲げモーメントが加わっている場合

放物線アーチに等分布荷重と若干の半載荷重等が載荷された場合にこのような応力状態となる。もちろんこの場合もアーチ リブ全体としての座屈ということを考えなくてはならないが、Deutsch,E.⁸⁾の研究に従えばアーチが載荷し得る分布荷重の強度はほとんど一定であることが報告されている。これも弾性範囲での研究で塑性領域まで拡張することはできないが、ここではアーチ軸線の変形による影響は無視する。

いま図-9に示したような箱形断面のハリの突縁応力が降伏点を越え座屈し、その突縁に働く応力の平均値は σ より $\sigma - 4\sigma = \bar{\sigma}$ に突然変化したとしよう。腹板に働く応力も突縁の座屈の影響を受けて突縁

図-9

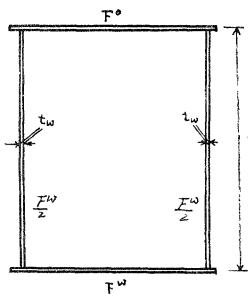
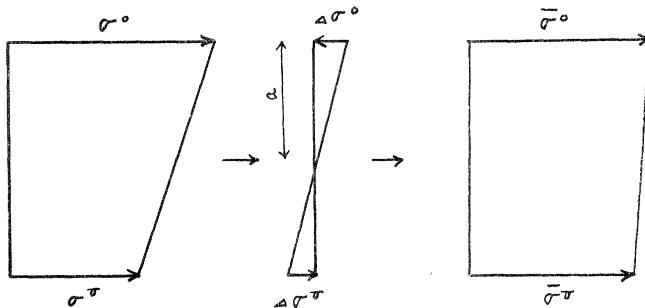


図-10 座屈による応力分布の変化



と接する点で突縁と同じ σ となり直線的に腹板内で変化するものとする。すなわち座屈により図-10に示したような応力分布となるものとする。 F^o を上突縁の断面積 F^u を下突縁の断面積 a を応力変化が0である点から上突縁までの距離とし引張り応力を正とする。上記の応力変化による直応力の変化 ΔN は次式で与えられる。

$$\Delta N = F^0 \cdot \Delta \sigma^0 + F^u \cdot \Delta \sigma^u + \frac{t_w h}{2} \left(\frac{\sigma^{02}}{\Delta \sigma^0 \Delta \sigma^u} - \frac{\Delta \sigma^{u2}}{\Delta \sigma^0 - \Delta \sigma^u} \right) \dots \dots \dots \quad (24)$$

抵抗曲げモーメントの変化 ΔM は a 点まわりで考え

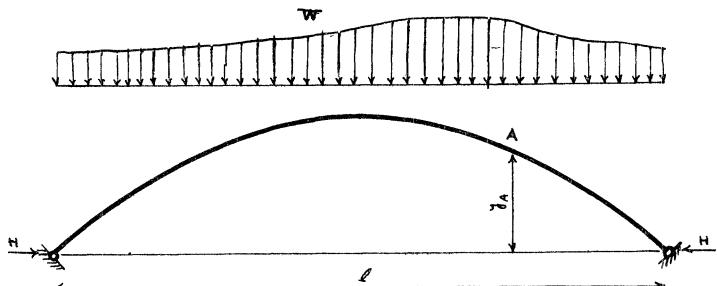
$$-\Delta M = F^0 \Delta \sigma^0 \cdot a + \frac{t_w h}{2} \cdot \frac{\Delta \sigma^{02}}{\Delta \sigma^0 \Delta \sigma^u} \cdot \frac{2}{3} a - F^u \Delta \sigma^u (h-a) + \frac{t_w h}{2} \cdot \frac{\Delta \sigma^{u2}}{\Delta \sigma^0 - \Delta \sigma^u} \cdot \frac{2(h-a)}{3}$$

$$a = h \frac{\sigma^0}{\sigma^0 - \sigma^u} \quad \text{で与えられるゆえ上式に代入して}$$

$$-\Delta M = F^0 h \frac{\Delta\sigma^{02}}{\Delta\sigma^0 - \Delta\sigma^u} + F^u h \frac{\Delta\sigma^{u2}}{\Delta\sigma^0 - \Delta\sigma^u} + \frac{t_w h^2}{3} \left\{ \frac{\Delta\sigma^{03}}{(\Delta\sigma^0 - \Delta\sigma^u)^2} - \frac{\Delta\sigma^{u3}}{(\Delta\sigma^0 - \Delta\sigma^u)} \right\} \quad \dots \dots \dots (25)$$

が得られる。いまある荷重状態にあるアーチのA点が最も大きな応力を受けていとし、荷重が増大するとともにA点の上突縁応力が降伏点に達し座屈を起こした場合を考えよう。近似的にA点に働く直応力は θ_A をA点でアーチ軸線が水平線となす角度とし $-N = H \sec \theta_A$ で与えられるとする。A点でのこの荷重状態による単純バリとしての曲げモーメントを

图-11



(27) 式に (24), (25) 式を代入すれば

$$F^0 h \frac{d\sigma^{02}}{d\sigma^0 - d\sigma^u} + F^u h \frac{d\sigma^{u2}}{d\sigma^0 - d\sigma^u} + \frac{t_w h^2}{3} \left\{ \frac{d\sigma^{03} - d\sigma^{u3}}{(d\sigma^0 - d\sigma^u)^2} \right\} = -y_A \cos \theta_A \times \left\{ F^0 d\sigma^0 + F^u \cdot d\sigma^u + \frac{t_w h}{2} \left(\frac{d\sigma^{02} - d\sigma^{u2}}{d\sigma^0 - d\sigma^u} \right) \right\}$$

を得る。これを整理して書き改めると

$$\text{ここで } C_1 = F^u h + \frac{F_w}{3} h - \left(F^u + \frac{F_w}{2} \right) y_A \cos \theta_A, \quad C_2 = -F^u h + \left(F^o + 2 F^u + \frac{F_w}{2} \right) y_A \cos \theta_A$$

$$C_3 = F^0 h - \left(2F^0 - F^u + \frac{F_w}{2} \right) y_A \cos \theta_A , \quad C_4 = F^0 h + \frac{F_w}{3} h + \left(F^0 + \frac{F_w}{2} \right) y_A \cos \theta_A$$

F_w は腹板の断面積

平衡条件式を立てるとき断面中心と a 点の位置のずれは省略したが、断面として対称に近いものを考えておりまたそのずれの値は y_A の値に比して小さいので無視した。(28) 式を置けば $\Delta\sigma^o$ と $\Delta\sigma^u$ の関係が得られるがいま近似的に

とおけば m は 1 より小とし 2 乗以上の項を省略すると

$$m = \frac{-\left(3 F^0 + F^u + \frac{5}{6} F_w\right)h + (4 F^u - F^0)y_A \cos \theta}{(3 F^0 + 3 F^u + F_w)h - (8 F^u - 4 F^0 + 2 F_w)y_A \cos \theta} \quad \dots \quad (30-a)$$

を得る。いま $F^0 = F^u = F_w$ とすれば

$$\frac{h}{\gamma_A \cos \theta_A} = \frac{1}{10} \quad \text{のとき} \quad m = 0.091, \quad \frac{h}{\gamma_A \cos \theta_A} = \frac{1}{5} \quad \text{のとき} \quad m = 0.21$$

となり m は 1 よりかなり小さな値を示すことが予想される。A 点で上突縁が座屈を起こす瞬前の下突縁の応力を $\bar{\sigma}''$ とし

$$\bar{\sigma}^u \geq \sigma_i - 4\sigma^u \quad \dots \dots \dots \quad (31)$$

であれば、上突縁の座屈とともに下突縁も降伏応力 σ_y を越えて座屈を起こしアーチはもはや荷重に耐えること

はできない。このような崩壊変形を示す曲げモーメントの値 M_c は

で与えられる。ここで $W_u W_u$ は上下突縁に対する断面係数であり、 $\Delta \sigma^u$ は $\Delta \sigma^u = (1-r) \kappa \sigma_i$ で与えられる。

この M_c を受けて上突縁は降伏応力に達しているのであるから

なる直応力がこの断面に働いている。ここで F_A は A 点での全断面積を表わす。

直応力の着力点が断面中心より e_c 以内にあれば全断面にわたって板は局部座屈を起こす可能性を生じることになる。(34)式で与える条件は必要条件であつて必ずしも e_c 以内に直応力が働いていても、アーチにおいては一般に働く正負の曲げモーメントの値は近い値をもつており、局部座屈による水平反力の増大により他の断面で降伏応力を生じる場合も生じる。しかしここでは一応直応力の偏心量が e_c 以内であれば全断面は座屈を起こすものとし、他の断面で降伏応力を越す場合については次節で取扱う。

(4) アーチ リブに主として曲げモーメントが働き直応力の影響が小さい場合

等分布荷重のほかに半載荷重や集中荷重が載荷されているときこのような応力状態になる。前節では圧縮突縁応力の最も大きい断面でその突縁が座屈することにより一方の突縁の応力の増加をきたしその突縁も座屈する場合を述べたが、ここでは一方の突縁はもとの形状を保つている場合について述べることにする。

いま最も応力の大きい断面Aで一突縁が座屈することにより、その断面の抵抗モーメントは $A M_k$ だけ低下したとすれば水平反力は

だけ増加する。ここで M の値は (25) 式に (29) 式を代入して得られる。すなわち次式で与えられる。

$$\Delta M_k = \left\{ \frac{F^0 + \kappa F^u}{1 + \kappa} + \frac{F_w}{3} - \frac{(1 + \kappa^3)}{(1 + \kappa)^2} \right\} h(1 - r)\sigma_t \quad \dots \dots \dots \quad (36)$$

この水平反力の増加により他の断面の圧縮縁応力が降伏点を越すとその突縁も座屈を起こし抵抗モーメントは減少するゆえアーチは崩壊する。もしA断面の一突縁が座屈したのみで他のどの断面でも降伏応力を越さないならばA点で塑性ヒンジを持つ3ヒンジアーチとして以後の応力を計算することができる。(24),(25)式において $\Delta\sigma^0=0$ とおけば

$$\Delta N_1 = \left(F^u + \frac{F_w}{2} \right) \sigma^u \dots \dots \dots \quad (37-a)$$

が得られるゆえ以後の水平反力の増加を H_1 、単純バリとしての曲げモーメントの増加を M_{A1} とすれば

(37-a), (38-b) 式を (38) 式に代入すれば $-4N_1 \cos \theta_A = N_1$ より

$$H_1 = \frac{\mathfrak{M}_{A_1}}{F^u + \frac{F_w}{2}} \quad \dots \dots \dots \quad (39)$$

$$M_B = \mathfrak{M}_B - y_B(H_0 + 4H_k + H_1) \quad \dots \dots \dots \quad (40)$$

と書き表わされる。この曲げモーメントの最も大きな断面が次に突縁の座屈を起こす点となる。その圧縮応力が降伏点に達したときアーチは最も大きな耐荷力を示す。しかしこのときA断面はヒンジの状態を保つていなければならず、そのためには座屈を起こさなかつた突縁は座屈により $\kappa(1-r)\sigma_0$ だけ応力を増し以後の水平反力の増加に対しては(37-a)式で与えられる突縁応力の増加を示す。その応力が降伏点を越せば(3)の場合と同様A断面は全断面座屈を起こしアーチは崩壊する。図-12にアーチの崩壊変形の形を示す。

計算例：いま 図-13 に示したように

$$l=6 \times 10^3 \text{ cm} , \quad f=1.0 \times 10^3 \text{ cm} , \quad h=1.0 \times 10^2 \text{ cm} , \quad F^0=F^w=F^u=200 \text{ cm}^2$$

$$J = 1.167 \times 10^6 \text{ cm}^4, \quad W^0 = W^u = 2.333 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

図-12 鋼アーチの崩壊変形

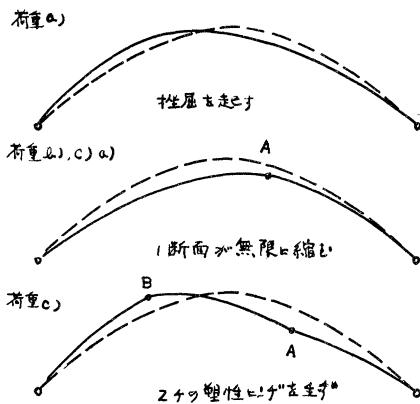
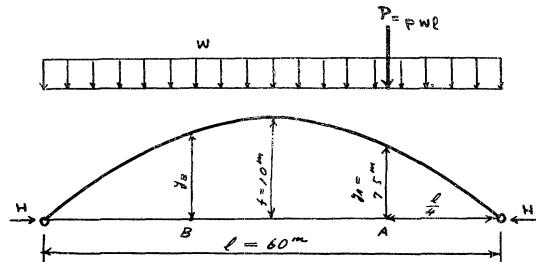


図-13 荷重状態



なる形状をもつた鋼放物線アーチに等分布荷重とその $1/4$ 点に集中荷重が載っている場合を考えよう。集中荷重の値は w を等分荷重強度として
 $P = pwL, p = 0.2$

で与えられるとし、鋼材の降伏応力 σ_f は $3 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ とし、座屈による平均応力の降下率は 0.2 とする。水

$$H = \frac{wl^2}{8} + \frac{5}{8} \frac{l}{f} \left(\left(\frac{x}{l} \right)^4 - 2 \left(\frac{x}{l} \right)^3 + \left(\frac{x}{l} \right) \right) P, \quad x = 0.25$$

で与えられるものとする。上突縁の座屈による下突縁の増加率は (30-a) より $m = 0.136$ を得るゆえ $\kappa = 1.136$ である。この荷重状態での水平反力は
 $H = (0.75 + 0.167)wl = 0.917 wl$

で与えられる。曲げモーメントは集中荷重による水平反力を H_p とすれば等分布荷重によつては曲げモーメントを生じないので
 $M_A = P \frac{l}{4} x - 4fx(1-x)H_p$ より $x = 0.75$ を代入して $M_A = 99.75w$ をうる。 $\sec \theta_A = 1.055$ であるから
 $N_A = 0.9674 wl$ で与えられる。A点の上突縁が降伏応力に達する wl の値は

$$-\sigma_f = -\frac{N_A}{F_A} - \frac{M_A}{W}$$

より $w_0l = 5,096 \times 10^5 \text{ kg}$ が得られ、そのときの応力も

$$P_0 = 1,019 \times 10^6 \text{ kg}, M_{A0} = 5,083 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{cm}, H_0 = 4,659 \times 10^5 \text{ kg}, N_{A0} = 4,930 \times 10^5 \text{ kg}$$

を得る。A点での座屈による抵抗モーメントの降下は (36) 式より $\Delta M_k = 1.286 \times 10^7 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ このときの水平反力の増加は

$$\Delta H_k = \frac{\Delta M_k}{y_A} = 1,714 \times 10^4 \text{ kg}$$

以後の荷重の増加を w_1l とすれば

$$M_{A1} = \frac{3l}{16} P_1 + \frac{w_1l^2}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}$$

$$= 7,875 \times 10^2 w_1l$$

水平反力の増加は

$$H_1 = \frac{M_{A1}}{F^u + \frac{1}{2} F^w}$$

$$\bar{y}_A = \frac{1}{F^u + \frac{1}{3} F^w} h \sec \theta$$

$$= 1.111 w_1l$$

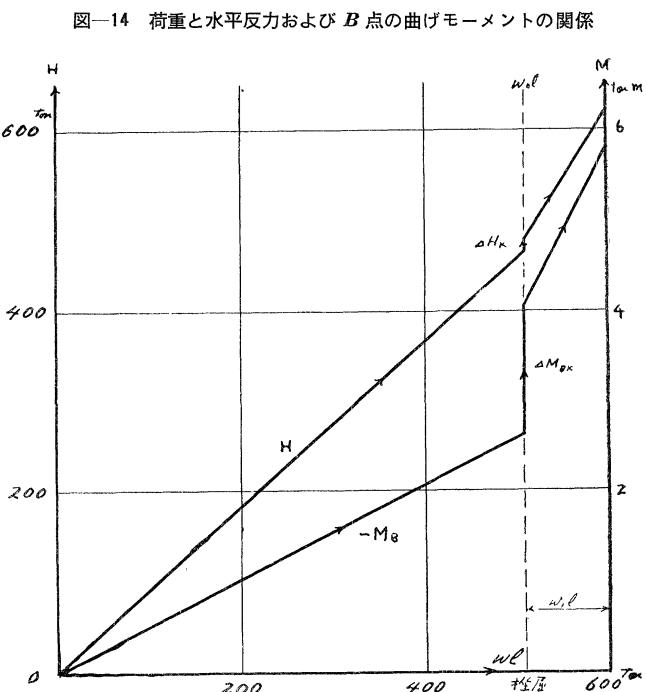
である。よつてアーチの受ける曲げモーメントは

$$M_B = \frac{lx}{4} (P_0 + P_1) + \frac{1}{2} w_1l^2 x(1-x)$$

$$- y_B (H_{p0} + 4H + H_1)$$

$$M_\theta \text{ の極大値は } \frac{\partial M_B}{\partial x} = 0 \text{ より}$$

$$x = \frac{1,943 \times 10^8 + 1,144 \times 10^8 w_1l}{6,955 \times 10^8 + 2,888 \times 10^8 w_1l}$$



この値を M_B を与える式に代入して突縁応力が降伏点に達する w_1l の値を求めればよいのであるが、この値は x の値の変化に対しそれほど大きく影響されないゆえ近似値として $x=0.3$ を用いて求めると $\cos \theta_B = 1.033$ より、

$$-\sigma_i = \frac{(H_0 + 4H_k + H_1)\cos \theta_B}{F_B} + \frac{M_B}{W}$$

それぞれの値を代入し、

$$w_1l = 8.690 \times 10^4 \text{ kg}$$

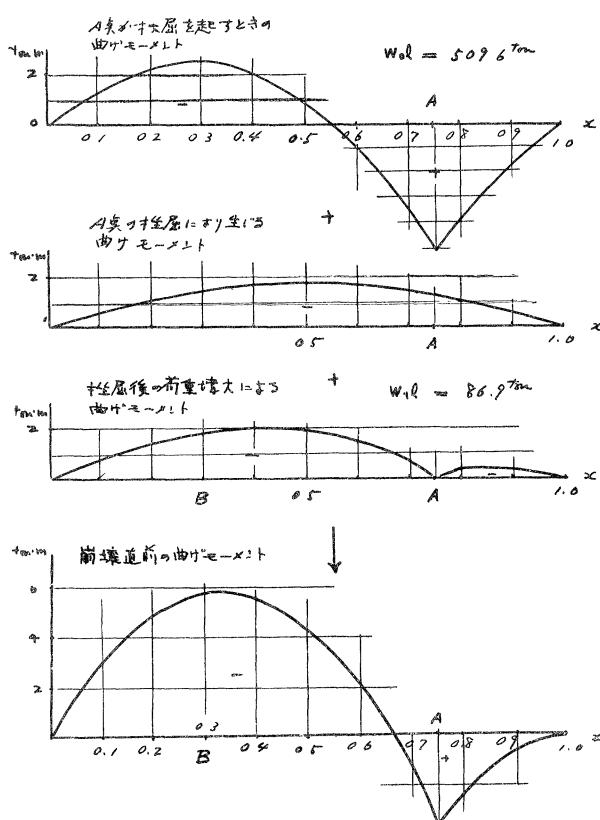
を得る。よつてこのアーチの耐えられる荷重は

$$wl = w_0l + w_1l = 5.965 \times 10^5 \text{ kg}$$

$$P = 0.2wl = 1.193 \times 10^5 \text{ kg}$$

である。荷重に対するこのアーチに働く応力の変化のようすは 図-14, 15 に示す。

図-15 荷重の各段階で生じる曲げモーメント図



6. 結 言

本論文で行なつた実験はかなり定性的なものであるが、薄鋼板は棒と異なり塑性座屈を起こしても急激に耐荷力を失わずにある一定の値の低下以後は一定の耐荷力を有することは認められる。薄板のこのような座屈を考えに入れることが 2 ヒンジアーチ橋程度の不静定次数の低い構造物では、その塑性変形を考慮に入れてても降伏応力を規準とした耐荷力よりも大きな耐荷力をあまり期待することはできない。しかしこのような局部座屈による応力の均一化はトラス橋の腹材の 2 次応力のごく力の平衡のためになく変形より生じるものに対しては役立つとも考えられる。

本研究は著者が東京大学大学院に在学中に行なつたものであり、始終御指導御助力を戴いた東大 平井 敦教授および奥村敏恵助教授の両先生に厚く感謝する次第である。また本実験は 32, 33 年度文部省科学研究費を使用し実験に当りいろいろお世話戴いた東京大学橋梁研究室の方々に感謝を捧げる。

参 考 文 献

- 1) Kármán, Dönnel, Sechler Trans. Amer. Soc. Mech. Eng., 54 卷. 53 (1932)
- 2) Marguerre, K. und A. Fromm Lufo., 14 卷 12 号 627 ページ
- 3) Prager, W. & P. Hodge : "Theory of Perfectly Plastic Solids", J. Wiley & Sons, New York 1951
- 4) Ilyushin, A.A. "The Elasto-Plastic Stability of Thin Plates", Translation in NACA Tech. Mem. 1188
- 5) Stowell, F.Z. NACA, T.N. No. 1556 (April 1948)
- 6) Shanley, F.R. "Weight-Strength Analysis of Aircraft Structures", McGraw Hill (1952)
- 7) Stüssi, F. "Aktuelle baustatische Probleme der Konstruktionspraxis", Schweiz Bauzeitung (1935)
- 8) Deutsch, E. "Das Knicken von Bogentragern bei unsymmetrischer Belastung", Bauin (1940)
- 9) Van den Broek, J.A. "Theory of Limit Design", J. Wiley & Sons, New York 1948
- 10) Swida, W. "Die Berechnung von stahlernen Bogen unter Berücksichtigung der Tragfähigkeitsreserve in elastischen-plastischen Zustand", Stahlbau (1952)
- 11) Prager, W., E.T. Onat : "Limit Analysis of Arch", J. Mech. Phys. Solid 1, 77 (1953)
- 12) 倉西正嗣 : "極限設計法", オーム文庫 (1954)
- 13) 山本善之 : "平面構造の塑性理論による設計法", 造船協会論文集, 93 号
- 14) Hendry, A.W. "The plastic design of two-pinned mild steel arch ribs", Civil Eng. 47, 38 (1952)