

不完全合成箱型桁のねじり*

正員 山本 稔**

TORSION OF A COMPOSITE BOX GIRDERS WITH INCOMPLETE INTERACTION

By Minoru Yamamoto, C.E. Member

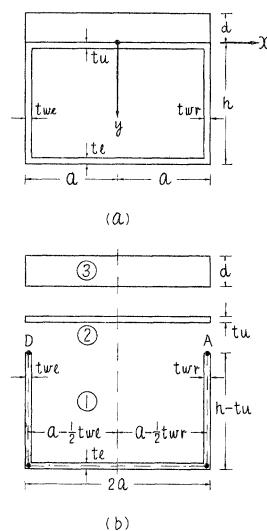
Synopsis: The author proposes a new theory of an incomplete composite box girder, a thin steel box girder with a reinforced concrete slab uniformly bonded to one side, on the basis of St. Venant's torsional theory, and examines the torsional moment at the end surface and the shearing stress distribution in the bond plane by means of numerical calculation.

要旨 薄肉断面の鋼箱型桁と鉄筋コンクリートスラブとをその側面において一様に結合して作つた不完全合成箱型桁の St. Venant のねじり理論を構成するとともに、数値計算によつて端面に働くねじりモーメント並びに接合面のせん断応力分布のようすを調べた。

1. 緒言

不完全合成箱型桁は、鉄筋コンクリートスラブと鋼箱型桁とを shear connector で結合して作られた合成桁である。このような合成桁にねじりモーメントを加えるならば、鋼箱型桁ばかりでなく鉄筋コンクリートスラブもねじりに対して抵抗するが、これらがねじりに対する抵抗の程度は、shear connector のずれの常数とその配置とに密接な関係を持つている。そこで筆者は、これらの問題を解明するため、図-1 (a) に示すような断面の不完全合成箱型桁について St. Venant のねじり理論を組立て、これを数値計算して種々考察したいと考えている。

図-1



ここに、理論解析に当たつて設けた仮定は

(1) 鋼箱型桁は薄肉の一様断面材で、この材には、鉄筋コンクリートスラブに接触している上フランジをのぞいて、断面の中心線に沿つたせん断応力しか存在しない。

(2) 鉄筋コンクリートスラブも鋼桁と同じく一様断面材である。そしてこれら構成部材は、同一の shear connector で接合面の全面にわたつて一様に結合され、

(3) かつ接合面のせん断応力は、その面に生ずる相対的ずれに比例する。

(1) は、薄肉断面材としては全く当然の仮定である。(2) は、shear connector を鋼桁腹板の上側に位置する接合面にのみ配置する構造においては完全には満足されないから、かかる場合については改めて考えなければならない。(3) は、一般的に使用されているが、理論的処理を容易にするために設けた近似的な仮定である。

これらの仮定のもとに St. Venant のねじり問題を取り扱うわけであるが、なお解析を容易にするため、鋼桁の腹板の上端において仮想切断面を考え 図-1 (b) に示すごとく、合成箱型桁が鉄筋コンクリートスラブ、鋼桁の上フランジおよび溝型をした残りの鋼桁部分の 3 部分から成るものと考える。そして、腹板上端の仮想切断面における応力および変位の連続性は、この仮想断面と上フランジ側面の間に成立つものとする。

このような取扱い方をすれば、上述の仮定のもとに境界および連続条件がすべて定まり、St. Venant のねじり問題は解析できることになる。そこで以下順を追つてこのねじり理論の大要を述べることにするが、同時に例をあげて、端面のねじりモーメントおよび接合面のせん断応力分布をずれの常数との関係において求め、これらに関する考察からねじり抵抗に与える shear connector のずれの常数とその配置の影響についても検討すること

* 昭.34.6, 土木学会第14回年次学術講演会にて発表

** 東京都立大学助教授、工学部土木工学科教室

とにする。

ここで、合成箱型桁の構成部材の材料に鋼と鉄筋コンクリートを選んだが、フックの法則に従う材料を用いるかぎり、これらの部材は任意の材料で置き換えられてもさしつかえない。ただ上述の構造はしばしば実用されるし、また解析上の一般性も失なわれないので、対象としてここに採用したに過ぎない。従つて、材料および shear connector に特殊な性質を与えるならば、この理論は他の一、二の異なつた問題の解としても利用できることになる。

2. 微分方程式と境界並びに連続条件

図-1 (b) に示すように 3 つの部分に分けられた部材を以下簡単のため、下から①、②および③部材と呼ぶことにする。①部材は鋼箱型桁のうち溝型をした断面部分を、②部材は残りの上フランジを、そして③部材は鉄筋コンクリートスラブを各表わしている。一方、記号*にもその右下側に添字 1, 2, 3 を付して、各添字の部材を表わしきしめるものと約束する。例えば、 ϕ_3 , τ_{xz3} は、各③部材の応力関数 ϕ よびせん断応力 τ_{xz} を表わすことをしめる。

回転角は各部材同一であるから、ねじり率を θ で示すと、St. Venant のねじりは次式で示される。

①および②部材は鋼桁部分であるから、もちろん $G_1 = G_2$ である。それで特に添字を数字で示す必要のないかぎり、これを G_s で、また G_3 は同様に G_c で置き換えることにする。応力および変位のおもなる関係をあげれば

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz\lambda} &= \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial y}, \quad \tau_{yz\lambda} = -\frac{\partial \phi_\lambda}{\partial x}, \quad \sigma_{x\lambda} = \sigma_{y\lambda} = \sigma_{z\lambda} = \tau_{xy\lambda} = 0 \\ u &= -\theta yz, \quad v = \theta xz, \quad \frac{\partial w_\lambda}{\partial x} = \theta y + \frac{1}{G_\lambda} \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial y}, \quad \frac{\partial w_\lambda}{\partial y} = -\theta x - \frac{1}{G_\lambda} \frac{\partial \phi_\lambda}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots \quad (2)$$

境界条件は、自由周辺に表面力が存在しないことから定められる。①部材は仮定により薄肉断面材のねじりとして取扱われるから、ここにおいては境界条件は考慮する必要がない。②部材においては面 $y=t_u$ が自由周辺を、また③部材においては面 $x=\pm a$ および面 $y=-d$ が同じく自由周辺を形成するので、これら各面においては次式が境界条件となる。

次に連続条件について考えるに、まず第一に①部材と②部材の応力の連続性から

ここに Q は①部材の断面の中心線に沿つて流れる合せん断力で、断面いたるところで一定値をとる。そして上式は、このせん断力が接続面である②部材の面 $x=\pm a$ におけるせん断応力の和に等しいという関係を表わしている。同様に変位の連続性によって

$$w_{1A} = \frac{1}{t_n} \int_0^{tu} w_2|_{x=a} dy, \quad w_{1D} = \frac{1}{t_n} \int_0^{tu} w_2|_{x=-a} dy$$

ここに w_{1A} , w_{1D} は 図-1 (b) に示すように、①部材断面の中心線に沿つた仮想断面上の点 A および D の変位で、上式は、これらの変位が接続面である②部材の面 $x = \pm a$ における平均の変位に等しいことを示す。しかしこの場合に、変位はその相対的関係が重要で、剛体としての変位は問題にならないから、このうち一方の関係式は、剛体的変位を加味することにより、常に成り立つよう操作されることができる。従つて、次式を条件式としてとれば良いことになる。

②部材と③部材の連続条件は、応力の連続性から

また仮定により、接合面のずれはそこに生ずるせん断応力に比例するから

ここに k は、shear connector の力学的性質によって定まる常数で、それの常数と呼ばれる。かくして問題は、条件式 (3), (4), (5), (6) および (7) を満足するような応力関数を求めることに帰する。

* 記号は特にことわらざるかぎり Timoshenko and Goodier 著 “Theory of Elasticity” (1951年) による。

3. 応力および変位式

(1) ① 部 材

①部材は薄肉断面材であるから、応力関数 ϕ_1 を直接定義することなしに、応力および変位式が求められる。断面のせん断応力は、肉厚 t の間に一様に分布するものと考えるから

ここに、 τ_s は断面の中心線に沿つたせん断応力で、 s は点Aから右まわりに測つた断面の中心線の長さである。また τ_s の正の方向は 図-2 に示すとおりである。次に変位を求めよう。図-2 を参照して

$$\tau_s = -\tau_{xz1} \sin \mu + \tau_{yz1} \cos \mu = \tau_{xz1} \frac{dx}{ds} + \tau_{yz1} \frac{dy}{ds}$$

これに式(2)を代入し s に関して積分すれば、長さ s なる点における断面の変位 w_{1s} として次の関係式を得る。

$$w_{1s} = w_{1A} + \frac{1}{G_s} \int_0^s \tau_s ds - \theta \int_0^s (xdy - ydx)$$

ここで s に A から D までの長さを与えるとともに, w_{1A} を移項すると

(2) ② 部 材

②部材における応力関数 ϕ_2 として次式を用いる。

$$\phi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left(A_{2n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + B_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right) + Ry(3x^2 - y^2) + G_8 \theta(a^2 - x^2) \quad \dots \dots \dots \quad (10)$$

ここに A_{2n+1} , B_{2n+1} および R は未定常数である。この応力関数が式(1)を満足することは代入することによって容易に確かめることができる。式(10)を式(2)に代入して応力および変位を求めれば

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi}{2a} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left(A_{2n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + B_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right) \\ &\quad - 6Rxy + 2G_s \theta x \\ \tau_{xz2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi}{2a} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left(A_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + B_{2n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right) \\ &\quad + 3R(x^2 - y^2) \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

ここに C_2 は積分常数である。

(3) ③ 部 材

応力関数 ϕ_3 として次式を用いるが、もちろん式 (1) を満足していることは式 (10) とくらべて容易に了解できる。

ここに C_{2n+1} および D_{2n+1} は未定常数である。上式を式(2)に代入して応力および変位を求めれば

$$\left. \begin{aligned} \tau_{yz3} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi}{2a} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left(C_{2n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + D_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right) + 2G_c \theta x \\ \tau_{xz3} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\pi}{2a} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left(C_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + D_{2n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right) \\ w_3 &= \theta xy + \frac{1}{G_c} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left(C_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y + D_{2n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right) \right\} + C_3 \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

ここに C_3 は積分常数である。

4. 条件方程式

(1) 境界条件方程式

式(11)および(13)を用いて境界条件式(3)を書き直してみよう。まず式(3)の第一式に式(11)を代入し、 x/a をフーリエ級数に展開して項をまとめると

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left\{ \frac{(2n+1)\pi}{2a} \left(A_{2n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} t_u + B_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} t_u \right) \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{2^3}{(2n+1)^3 \pi^2} (-6 R a t_u + 2 G_s \theta a) \right\} = 0$$

これが x のいかんにかかわらず成立するためにはカッコ内が 0 でなければならぬ。かくして、式(3)の第一式は次の条件方程式に変形される。

$$A_{2n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} t_u + B_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} t_u - (-1)^n \frac{2^5 \cdot 3 a^2 t_u}{(2n+1)^3 \pi^3} R + (-1)^n \frac{2^5 G_s \theta a^2}{(2n+1)^3 \pi^3} = 0 \dots \dots \dots (14)$$

応力関数 ϕ_3 は、式(13)からただちにわかるように、自由周囲 $x=\pm a$ においてすでに式(3)の第二式を満足しているから、③部材の境界条件としては第三式のみを考えれば良い。かくてこれに式(13)を代入し、 x/a をフーリエ級数に展開して項をまとめると、第三式は次の条件方程式に変形される。

$$C_{2n+1} \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d - D_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d + (-1)^n \frac{2^5 G_c \theta a^2}{(2n+1)^3 \pi^3} = 0 \dots \dots \dots (15)$$

(2) 連続条件方程式

①部材と②部材の接続面における条件式(4)に式(11)を代入すれば

$$Q = R t_u (3 a^2 - t_u^2) \dots \dots \dots (16)$$

を得る。同様に、条件式(5)に式(9)および(11)を代入し、さらに式(16)を用いて Q を消去すれば、条件式(5)は次式のように変形される。

$$\frac{2}{G_s t_u} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2a}{(2n+1)\pi} \left\{ A_{2n+1} \left(-1 + \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} t_u \right) + B_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} t_u \right\} \\ + \frac{R}{G_s} \left[2a(a^2 - t_u^2) + t_u(3a^2 - t_u^2) \left(\left(\frac{1}{t_{wr}} + \frac{1}{t_{wl}} \right) \left(h - t_u - \frac{1}{2} t_l \right) + \frac{1}{t_l} \left(2a - \frac{t_{wr} + t_{wl}}{2} \right) \right) \right] \\ = \theta \left(\left(2a - \frac{t_{wr} + t_{wl}}{2} \right) (2h - t_u - t_l) - at_u \right) \dots \dots \dots (17)$$

次に②部材と③部材との連続条件について考える。式(11)および(13)を式(6)に代入し、 x/a をフーリエ級数に展開して整理すれば、式(6)は次の条件方程式で置き換えられる。

$$A_{2n+1} - C_{2n+1} + (-1)^n \frac{2^5 (G_s - G_c) \theta a^2}{(2n+1)^3 \pi^3} = 0 \dots \dots \dots (18)$$

同様に、式(11)および(13)を式(7)に代入し、両辺を $-a$ から $+a$ まで積分すれば、 $C_2 - C_3 = 0^{(1)}$ を得る。そこでさらに x/a および $(x/a)^3$ をフーリエ級数に展開して整理すれば、式(7)は次のような条件方程式で置き換えられる。

$$-\frac{(2n+1)\pi}{2a} A_{2n+1} + k \left(\frac{B_{2n+1}}{G_s} - \frac{D_{2n+1}}{G_c} \right) \\ + (-1)^n \frac{2^5 \cdot 3}{(2n+1)^3 \pi^2} \left\{ 1 - \frac{2^3}{(2n+1)^2 \pi^2} \right\} \frac{k a^3}{G_s} R = (-1)^n \frac{2^4 G_s \theta a}{(2n+1)^2 \pi^2} \dots \dots \dots (19)$$

5. 未定常数の算定

未定常数 A_{2n+1} , B_{2n+1} , C_{2n+1} , D_{2n+1} および R は、条件方程式(14), (15), (17), (18)および(19)を解いて得られるが、ここに次の関係式を定義して無次元の記号に置き換え、これら未定常数の算定のみならず、以後の理論式の簡易化をはかるものとする。

$$\left. \begin{aligned}
& (-1)^n \frac{2^5}{(2n+1)^3 \pi^3} G \theta a^2 \cdot a_n = A_{2n+1}, \quad , \quad (-1)^n \frac{2^5}{(2n+1)^3 \pi^3} G \theta a^2 \cdot b_n = B_{2n+1} \\
& (-1)^n \frac{2^5}{(2n+1)^3 \pi^3} G \theta a^2 \cdot c_n = C_{2n+1}, \quad , \quad (-1)^n \frac{2^5}{(2n+1)^3 \pi^3} G \theta a^2 \cdot d_n = D_{2n+1} \\
& r = \frac{Ra}{G \theta}, \quad g_s = \frac{G_s}{G}, \quad g_c = \frac{G_c}{G}, \quad k_n = \frac{2ak}{(2n+1)\pi G}, \quad i_u = \frac{tu}{a} \\
& i_{wr} = \frac{t_{wr}}{a}, \quad i_l = \frac{t_l}{a}, \quad i_{wt} = \frac{t_{wt}}{a}, \quad d_r = \frac{d}{a}, \quad h_r = \frac{h}{a} \\
& j_n = \frac{3ka}{2G_s} \left\{ 1 - \frac{2^3}{(2n+1)^2 \pi^2} \right\} = \frac{3(2n+1)\pi k_n}{4g_s} \left\{ 1 - \frac{2^3}{(2n+1)^2 \pi^2} \right\} \\
& \alpha_n = \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} t_u, \quad , \quad \beta_n = \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} t_u \\
& \tau_n = \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d, \quad , \quad \delta_n = \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d
\end{aligned} \right\} \dots\dots(20)$$

ここに G は基準の剛性率である。このような記号のもとに式 (14), (15), (18) および (19) を, a_n , b_n , c_n および d_n を未知量とした四元一次連立方程式と考え, これを解けば, a_n , b_n , c_n および d_n は r の関数として次のように書き表わされる。

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{j_n + \frac{3 i_k k_n}{g_s \beta_n}}{1 + \frac{k_n \alpha_n}{g_s \beta_n} + \frac{k_n r_n}{g_c \delta_n}} r - \frac{(g_s - g_c) \frac{k_n r_n}{g_c \delta_n} + \left(g_s + \frac{k_n}{\beta_n} + \frac{k_n}{\delta_n} \right)}{1 + \frac{k_n \alpha_n}{g_s \beta_n} + \frac{k_n r_n}{g_c \delta_n}} \\
 b_n &= \frac{\frac{1}{\beta_n} \left(3 i_u - j_n \alpha_n + \frac{3 i_k k_n r_n}{g_c \delta_n} \right)}{1 + \frac{k_n \alpha_n}{g_s \beta_n} + \frac{k_n r_n}{g_c \delta_n}} r + \frac{(\alpha_n - 1) \frac{g_s}{\beta_n} \left(1 + \frac{k_n r_n}{g_c \delta_n} \right) - (r_n - 1) \frac{k_n \alpha_n}{\beta_n \delta_n}}{1 + \frac{k_n \alpha_n}{g_s \beta_n} + \frac{k_n r_n}{g_c \delta_n}} \\
 c_n &= \frac{j_n + \frac{3 i_k k_n}{g_s \beta_n}}{1 + \frac{k_n \alpha_n}{g_s \beta_n} + \frac{k_n r_n}{g_c \delta_n}} r - \frac{-(g_s - g_c) \left(1 + \frac{k_n \alpha_n}{g_s \beta_n} \right) + \left(g_s + \frac{k_n}{\beta_n} + \frac{k_n}{\delta_n} \right)}{1 + \frac{k_n \alpha_n}{g_s \beta_n} + \frac{k_n r_n}{g_c \delta_n}} \\
 d_n &= \frac{\frac{r_n}{\delta_n} \left(j_n + \frac{3 i_k k_n}{g_s \beta_n} \right)}{1 + \frac{k_n \alpha_n}{g_s \beta_n} + \frac{k_n r_n}{g_c \delta_n}} r + \frac{(\alpha_n - 1) \frac{k_n r_n}{\beta_n \delta_n} - (r_n - 1) \frac{g_c}{\delta_n} \left(1 + \frac{k_n \alpha_n}{g_s \beta_n} \right)}{1 + \frac{k_n \alpha_n}{g_s \beta_n} + \frac{k_n r_n}{g_c \delta_n}}
 \end{aligned} \quad \text{.....(21)}$$

さて次に、式 (17) を式 (20) によつて書き直すと

かくて式 (21) を式 (22) に代入すれば、 r に関する条件方程式が得られるから、これを解いて r が決定される。そして、この r を逆に式 (21) に代入すれば、 a_n , b_n , c_n および d_n も決定されるから、すべての未定常数が算出できることになる。

6. 端面に働くねじりモーメントおよび接合面のせん断応力

①, ②および③部材断面に働くせん断応力の座標原点にかんするモーメントを各 M_1 , M_2 および M_3 とすれば、端面に働くねじりモーメント M は

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3$$

各ねじりモーメントを求める

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= \underset{\textcircled{1}}{\iint} (\tau_{yz_1}x - \tau_{xz_1}y) dx dy = Q \int_{tu}^{\left(h - \frac{1}{2}t_I\right)} \left(a - \frac{1}{2}twr\right) dy + Q \int_{-\left(a - \frac{1}{2}twl\right)}^{\left(h - \frac{1}{2}t_I\right)} \left(h - \frac{1}{2}t_I\right) dx + Q \int_{tu}^{\left(h - \frac{1}{2}t_I\right)} \left(a - \frac{1}{2}twl\right) dy \\ &= Q \left(2a - \frac{t_{wr} + t_{wl}}{2}\right) (2h - tu - t_I) = Rt_u(3a^2 - t_u^2) \left(2a - \frac{t_{wr} + t_{wl}}{2}\right) (2h - tu - t_I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_2 &= -\iint_{\textcircled{2}} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} x dx dy - \iint_{\textcircled{2}} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} y dx dy = -\int_0^{t_u} \phi_2 x \left[\int_{x=-a}^a \phi_2 y \right]_{y=0}^{y=t_u} dx + 2 \iint_{\textcircled{2}} \phi_2 dx dy \\ &= -R a t_u^2 \left(7 a^2 - \frac{3}{2} t_u^2 \right) + \frac{8}{3} G_s \theta a^3 t_u + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^4 a^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \left\{ A_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} t_u \right. \\ &\quad \left. + B_{2n+1} \left(-1 + \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} t_u \right) \right\} \\ \mathfrak{M}_3 &= -\int_{-a}^0 \phi_3 x \left[\int_{x=-a}^a \phi_3 y \right]_{y=-d}^{y=0} dx + 2 \iint_{\textcircled{3}} \phi_3 dx dy \\ &= -\frac{8}{3} G_c \theta a^3 d + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^4 a^2}{(2n+1)^2 \pi^2} \left\{ C_{2n+1} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d + D_{2n+1} \left(1 - \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d \right) \right\}\end{aligned}$$

かくて端面のねじりモーメントはこれら3式の和として与えられるから、さらに式(20)を用いて書き改めると

$$\begin{aligned}\mathfrak{M} &= G \theta a^4 \left[\frac{8}{3} (g_s i_u + g_c d_r) + r \left\{ i_u (3 - i_u^2) \left(2 - \frac{i_{wr} + i_w t}{2} \right) (2 h_r - i_u - i_l) - i_u^2 \left(7 - \frac{3}{2} i_u^2 \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^9}{(2n+1)^5 \pi^5} \left\{ a_n \beta_n + b_n (\delta_{n-1}) + c_n \delta_n + d_n (1 - \gamma_n) \right\} \right] \quad \dots \dots \dots \quad (23)\end{aligned}$$

接合面のせん断応力は式(11)に $y=0$ を代入して得られるから、これを式(20)および(21)を用いて書き直すと

$$\begin{aligned}\tau_{yz2}|_{y=0} &= G \theta a \left\{ 2 g_s \frac{x}{a} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^4}{(2n+1)^2 \pi^2} a_n \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \right\} \\ &= G \theta a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^4}{(2n+1)^2 \pi^2} \frac{k_n}{1 + \frac{k_n \alpha_n}{g_s \beta_n} + \frac{k_n \gamma_n}{g_c \delta_n}} \left\{ \left(\frac{j_n}{k_n} + \frac{3 i_u}{g_s \beta_n} \right) r + \frac{\alpha_n - 1}{\beta_n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_n - 1}{\delta_n} \right\} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \quad \dots \dots \dots \quad (24)\end{aligned}$$

第一式は収束が第二式に比して遅いから、数値計算においては後者を利用する方が良い。

7. 理論式の精度について

上に取扱つてきた合成桁の断面寸法に特殊な値を与えるならば、すでにその解が得られている断面形状の材を表わし得るから、その場合の筆者の解は当然既知の理論解と一致するはずである。従つて、これを逆に使用すれば、筆者の解の精度が推定できるわけである。そこで次にごく特殊な一、二の場合についてこれらの理論を比較し、これを足掛りに精度を類推することにする。

(1) 薄肉箱型桁材のねじり

筆者の解で $d=0$ と置けば、この場合は薄肉箱型断面材のねじりを表わす。そこで、一例として筆者の解に $d=0$ 、 $t_u=t_{wr}=t_l=t_{wl}=1/50a$ を代入すれば、端面に働くねじりモーメントは式(20)、(21)、(22)および(23)を用いて

$$0.154 G_s \theta a^4$$

一方、薄肉断面材のねじりとして既知の解から得られた結果は $0.155 G_s \theta a^4$ 従つて、筆者の計算値は既知の理論から得られた結果より 0.5% 小さい。この誤差は、①部材と②部材の連続条件における処理法および級数解による計算誤差によるものと考えられる。しかしいずれにしても、許容できる範囲の誤差であることは間違いない。

(2) 矩形断面材のねじり

筆者の解で $t_u=t_{wr}=t_l=t_{wl}=0$ と置けば、筆者の解は $2a \times d$ なる断面寸法の矩形断面材のねじりを表わすことになる。この場合における応力関数 ϕ_3 は、式(21)から計算された値を、式(20)を考慮して式(12)に入代入すれば

$$\begin{aligned}\phi_3 &= G_c \theta a^2 \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^5}{(2n+1)^3 \pi^3} \cos \frac{(2n+1)\pi}{2a} x \left\{ \frac{\left(-1 + \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d \right)}{\sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} d} \sinh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cosh \frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right\} \right]\end{aligned}$$

と書き表わされ、矩形断面材のねじりの応力関数であることが容易に証明²⁾できる。

これらの考察から判断して、端面に働くねじりモーメントの式(23)および接合面のせん断応力の式(24)は一般的にかなり良い精度をもつていて類推して良いように思われる。しかし、式(24)においては、①部材と②部材の連続条件がやや実情にそくさないから、この接続断面付近の応力分布に多少の誤差がふくまれることはやむを得ないのである。

8. 数値計算例とその考察

かくのごとくして、端面のねじりモーメントの式(23)および接合面のせん断応力の式(24)の精度が推定できたので、次にはこれら両式を数値計算して、shear connector のずれの常数との関係を求め、これからおおよそのようすをうかがうことしよう。

(1) 端面に働くねじりモーメント

ここに shear connector のずれの常数として $2ak/G$ を使用することにする。 $2ak$ は桁の単位長さあたりのずれの常数で、応力度と同じ次元をもつから、 $2ak/G$ は無次元である。図-3 はこのずれの常数を横軸にとって表わしたねじりモーメント M の例で、同じく図に示してある 2 種の合成桁にたいする式(23)の数値計算結果を図示したものである。

この計算例の r を式(22)から算出するにあたり、同式にふくまれている級数の項数として $n=5 \sim 20$ までとつたが、このように採用項数に幅ができたのは、ずれの常数が大きくなるとこの級数の収束が悪くなるので、

k の値の増大にともなつて項数も多くとらざるを得なかつたためである。しかし、式(23)はかなり収束の速い級数であるから、この方の計算においては、いずれの場合も $n=3$ で計算を打ち切つた。

図-3 から容易にうかがわれるよう、端面のねじりモーメントは、ずれの常数が小さい場合に、それによる影響をかなり受けるが、ずれの常数がある程度以上大きくなると、これに無関係になると考えてさしつかえない。この事がはすでに矩形断面の不完全合成桁のねじり³⁾においても認められている。

小西博士はその論文⁴⁾において、合成桁断面は図-1(a)と同じであるが、shear connector の配置が鋼腹板の上側に位置する接合面のみに限定された完全合成桁の純ねじり問題を、三重連結の薄肉断面材のねじりとして取扱つておられるが、この計算法をそのまま図-3 に示した合成桁に適用し、 $k \rightarrow \infty$ として求めた筆者の理論値と比較してみれば表-1 のようになる。

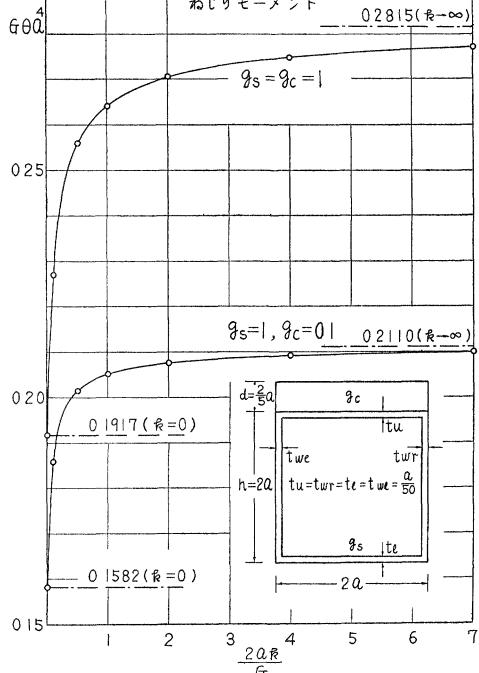


表-1

	$g_s = 1, g_c = 0.1$	$g_s = g_c = 1$
小西博士の計算値 $G \theta \alpha^4$	0.218	0.254
筆者の計算値 "	0.211	0.282

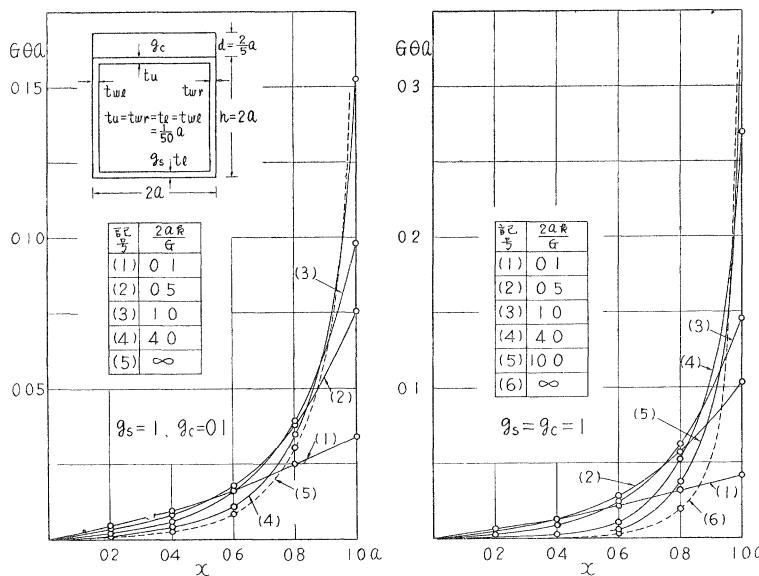
筆者の対象とした構造は接合面の全面にわたつて結合した合成桁であるから、両者の取扱つた構造はかなり異なつてゐるわけであるが、ねじりモーメントには結果的に数パーセント程度の差異しかみられない ($g_s = g_c = 1$ のような極端な場合においてすら 10% 程度である)。これは、次のせん断応力分布の項でもふれるが、ずれの常数が大きくなると、せん断応力が腹板上側の接合面に集中するようになり、主としてそこに設けられた shear connector のみによつてせん断力が伝達されるようになるからである。従つて、小西博士の計算法は、ずれの常数が大きい場合には、筆者の対象とした構造における端面のねじりモーメントの近似計算法として利用できるものと思われる。

なお 図-3 の合成桁で $g_s = g_c = 1$ 、かつ $k \rightarrow \infty$ の場合のねじりモーメントは $0.282G \theta \alpha^4$ で、これは单一断面の箱型桁のねじりに相当するが、もはやその一辺は、薄肉断面として取扱うことができない場合である。このような場合に、仮りに薄肉断面材として扱うと、ねじりモーメントは $0.231G \theta \alpha^4$ となり、約 20% もの誤差を

もつことになるから注意を要する。

(2) 接合面のせん断応力分布

図-4



から、この例においては、 k の値に応じて $n=7 \sim 20$ の間に項数をかえて計算された。せん断応力分布は、いずれの常数が小さいと三角形分布に近いが、それの常数が大きくなるにつれて、応力は腹板上側の接合面に集中するようになる。ここで、前述のごとく①部材と②部材の連続条件には実際にそくさない点があるから、腹板の上側付近の計算応力は誤差をふくんでいると考えねばならない。しかしその範囲はごく局部に限られるから、全体の傾向としての応力分布は図-4から十分推察できるものと判断して良かろう。

9. 結 言

箱型断面をもつ不完全合成桁の St. Venant のねじり理論を構成し、かつ数値計算によつてずれの常数が端面に働くねじりモーメントおよび接合面のせん断応力分布に与える影響について考察した。その結果、ずれの常数がある程度以上大きくなると、ねじりモーメントは事実上ずれの常数に無関係になることがわかつた。一方接合面のせん断応力は、ずれの常数が小さいうちは三角形分布をなすが、それが大きくなると次第に腹板の上側に位置する接合面に集中するようになる。従つて、ずれの常数が大きい場合には、小西博士によるねじりモーメント計算法は、筆者の対象とした構造におけるねじりモーメントの近似計算法として利用できることがわかつた。

これらの結論はすべて接合面の結合の度合がいたるところで一様であるとの仮定のもとに出されたが、shear connector を腹板上側の接合面にのみ置き、かつ結合の度合が小さい場合、すなわちずれの常数が小さい場合のねじりは、この報告では取扱うことができないから改めて考察し直さなければならぬ。

終りに、数値計算にあたりいろいろと援助して下された 稲見悦彦君に紙面を借りて厚くお礼申し上げます。

参考文献および註

- 1) 山本 錠: 不完全合成桁材のねじり、土木学会論文集 第63号(昭.34.7) p.19 参照
- 2) 上の文献において $d_1=0$ とすれば、 $a_{2n}=g_2, b_{2n}=g_2 (-1+\alpha'_{2n})/\beta_{2n}$ となるから、これらを式(6)に代入すれば良い。
- 3) 同 上 文献 p. 22 参照
- 4) 小西一郎・小松定夫・大橋昭光: 合成箱桁橋の応力解析と設計計算法、土木学会論文集 第25号(昭.30.3)

(昭. 34. 10. 15)

図-3 に例示した 2 つの合成桁の接合面のせん断応力分布を、 $2ak/G$ をパラメータとして示せば、図-4 の通りである。ここにせん断応力分布は、式(24)から明らかなるごとく、 y 軸に関して逆対称分布をなすから、図にはその一方のみが画かれている。

数値計算には式(24)の第二式が用いられた。これは、 r の値が前項すでに求められているばかりでなく、収束も第一式に比してまさつているからである。しかし第二式とても収束が良好とはいえず、 k の値が大きくなるとこの傾向がますます助長される