

二層地盤内の応力伝播に関する一考察

正員 石原研而*

STRESS DISTRIBUTION IN TWO LAYER SOIL SYSTEM

By Kenji Ishihara, C.E. Member

Synopsis: A discussion of stresses in two layer soil system is extended in this paper, for cases where the soil may be considered as elastic and visco-elastic; and it is shown that a surface layer with large elasticity or viscosity has a considerable reinforcing and load-spreading effect which is very important and encountered in foundation work.

要旨 二層地盤が弾性とみなされる場合、および粘弾性とみなされる場合につき、地盤内の応力分布の検討を行つた。その結果、表面層に弾性および粘性の大なる材料を用いるとき、荷重分散の効果が十分に果たされていることが明らかになつた。

1. 緒言

軟弱地盤上に堅固な材料をのせて、基盤を補強し、全体として強度を増大せしめるという原理は、道路工事、基礎工事でしばしば用いられている。これは上層の堅い材料が載荷重を広範囲に分散させるために、下層の軟弱な路床上の一部に応力が集中して破壊が起るのを防いでいるというように解釈される。このような現象を理論的に明らかにし、あわせて合理的な設計を行うための足掛りとして、弾性論および粘弾性論を用いて二層地盤内の応力状態を調べてみた。このような問題はかなり前からいろいろの人々によつて論ぜられてきた。表面で応力のみの境界条件が与えられる場合の解は、Melan, E. によって、Boussinesq, J. の半無限体の場合から帯状無限体の問題に拡張された。Passer, W.¹⁾, Marguerre, K.²⁾ 等も同様な問題を解いている。また弾性床上の無限ハリの問題に関連した Biot, K.⁴⁾ や Hogg, A.H.A.⁵⁾ の研究もある。帯状領域から二層問題におよんだのは、Marguerre,²⁾ や松村孫治³⁾ 氏が最初のようである。しかしこれらの解は学問的色彩が強い。これに対し現実の問題が重大視されたのは、第二次大戦の飛行場建設工事であつた。Burmister, D.M.⁶⁾ はこれらの要求に対し、問題の理論的基礎を与えたとし二層、三層問題を広範に解き、一部の数値表を完成して設計に役立つまでにした。その後技術の進歩とともに、かかる問題の要求が高まつたが、Burmister 以来の研究は、ほとんど彼の成果にもとづいているようであり、最近の Fox, L.^{7),8)} の研究は、Burmister の解に数多くの数値解を与え、さらに Southwell の relaxation 法を用いて同じ問題の解を求める実際への適用性を増大せしめた。また Kézdi, Á.¹⁷⁾ のように応力の直進を仮定し、光の屈折の原理より応力伝播則のアナロジーを組み立て、二層問題の近似解を与えた人もある。以上は表面の境界条件が応力のみで与えられる場合の解であつたが、応力と変位の両方で与えられる、いわゆる stamp の問題は Sneddon, I.N.²⁾ によつて系統的に研究された。彼は二重積分方程式の解を利用して巧妙に stamp の問題を取り扱つている。この問題は、さらに Lebedeb, H.H.¹³⁾ によつて帯状無限体に拡張されたが、積分方程式の解に困難があること、および実際問題の載荷状態の近似をうるには前記の境界条件の解の方が適していること、等からまだ二層問題は解かれていないようである。

以上はすべて弾性論にもとづいた研究であるが、実際に当つて弾性では近似できない地盤の問題が数多くあることは周知の事実である。中でも最も重要なのは圧密現象と粘性流動に関するものであろう。圧密を加味した二層問題は Mandel, J. 等が取扱つている。粘弾性の場合は最上教授^{14),15)} によつて基本式が示され、山口柏樹¹⁶⁾ 氏が種々の問題を広範囲に解いておられる。最上教授は粘弾性の二層問題を解き、Housel の実験値によつて粘性を逆算し、粘性が沈下とともに変化していることを示し、沈下の過程における両層粘性率の役割を論じられたそうであるが、未発表で見ることのできないのは残念である。

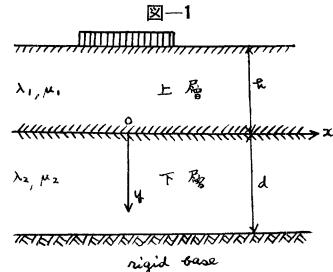
過去の諸研究では概して表面沈下に主眼がおかれてきたが、本論文では応力分布のみを取り上げてみた。表面沈下を弾性論で近似できる土質は限られているが、内部応力に関してはかなり広範囲の土質に対して、よい近似値を与えることが知られている。それに応力の分布状態を知ることは、地盤の沈下機構を知るのにも役立ち、また材料の強度にもとづいて設計されるとき等に必要と考えられるからである。本論文では最初に弾性論により二層帯状無限体に対する解を求め、その特殊の場合として二層半無限体の場合の解を誘導し、数値を求めて図示

* 東京大学大学院学生 博士課程、工学部土木工学教室

た。次に粘弾性論により二層半無限体に対する解を求めた。この種の問題を初期条件を考慮することが、計算上困難であるため、載荷の過渡的な状態に対する解を一様増加荷重を仮定して求めた。これにより荷重の増加率に比例して粘性の影響が入つてくることが示される。なお境界条件は、表面で対称な応力分布が与えられ、両層境界で垂直方向の応力と変位が連続し、せん断力が0になると仮定してある。境界面で水平方向の変位とせん断力とが連続するという条件を用いた方がより厳密であるが計算はいちじるしく繁雑になる。Marguerre は境界面でせん断力が0と仮定しても、厳密解の結果とほとんど変わらないと主張しているように、これを用いて十分な近似がえられるのである。

2. 弹性論による解

図-1 のような二層帶状体を考え、上層の弾性常数（ラーメの常数）を λ_1, μ_1 、下層のそれを λ_2, μ_2 とし、上層の厚さを h 、下層の厚さを d 、表面荷重分布に関係した関数を $f(\xi)$ とする。両層に対する変位、応力の表示式は次のとくに表わされる。ただし平面ひずみの場合とする。



$$\sigma_{y1} = 2 \int_0^\infty \xi^2 [\{\mu_i + (\lambda_i + \mu_i)\xi y\} C_i + (\lambda_i + \mu_i) A_i] e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi \\ + 2 \int_0^\infty \xi^2 [\{\mu_i - (\lambda_i + \mu_i)\xi y\} D_i - (\lambda_i + \mu_i) B_i] e^{\xi y} \cos \xi x d\xi \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\tau_i = 2 \int_0^\infty \xi^2 [\{-\lambda_i + (\lambda_i + \mu_i)\xi y\} C_i + (\lambda_i + \mu_i) A_i] e^{-\xi y} \sin \xi x d\xi \\ + 2 \int_0^\infty \xi^2 [\{\lambda_i + (\lambda_i + \mu_i)\xi y\} D_i + (\lambda_i + \mu_i) B_i] e^{\xi y} \sin \xi x d\xi \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$v_i = -\frac{1}{\mu_i} \int_0^\infty \xi [2\mu_i + (\lambda_i + \mu_i)\xi y] C_i + (\lambda_i + \mu_i) A_i] e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi \\ + \frac{1}{\mu_i} \int_0^\infty \xi [2\mu_i - (\lambda_i + \mu_i)\xi y] D_i - (\lambda_i + \mu_i) B_i] e^{\xi y} \cos \xi x d\xi \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここで $i=1$ は上層、 $i=2$ は下層の表示式である。また σ_y ； 垂直方向の応力、 τ ； せん断力、 v ； 垂直方向の変位とする。さて以上の表示式を次の境界条件のもとに解いて未知常数 A_i, B_i, C_i, D_i を定めることを考える。

$$y = -h \text{ の時 } \begin{cases} \sigma_{y1} = -\int_0^\infty \xi^2 f(\xi) \cos \xi x d\xi \\ \tau_1 = 0 \end{cases} \dots (4) \quad y = 0 \text{ の時 } \begin{cases} \tau_1 = 0 \\ \tau_2 = 0 \\ v_1 = v_2 \end{cases} \dots (5) \quad y = d \text{ の時 } \begin{cases} v_2 = 0 \\ \tau_2 = 0 \end{cases} \dots (6)$$

(1)～(3)式をこれらの境界条件に適用すると、8個の未知数をもつ8個の方程式をうる。これを解くにあたつて

$$\begin{aligned} -\lambda_1 C_1 + (\lambda_1 + \mu_1) A_1 &= E_1 & \lambda_1 D_1 + (\lambda_1 + \mu_1) B_1 &= -E_2 \\ -\lambda_2 C_2 + (\lambda_2 + \mu_2) A_2 &= F_1 & \lambda_2 D_2 + (\lambda_2 + \mu_2) B_2 &= F_2 \end{aligned} \quad \left. \right\} \dots \dots \dots (7)$$

と置けば、次式をうる。
E₁=E₂, F₁=F₂ \dots \dots \dots (8)

$$D_2 = e^{-\xi d} C_2, \quad F_1 = \frac{(\lambda_2 + \mu_2)\xi d e^{-\xi d}}{\sinh \xi d} C_2 \quad \dots \dots \dots (9)$$

なる関係式をうるから、これらを用いてつぎつぎに未知数を減して行くと計算が容易になり、結局次のようない表示式がえられる。

$$C_1 = \frac{f(\xi)}{4(\lambda_1 + \mu_1) \cdot A} [(fl\varphi + 1) \sinh \xi h + \xi h e^{-\xi h}] \dots \dots (10) \quad D_1 = \frac{f(\xi)}{4(\lambda_1 + \mu_1) \cdot A} [(fl\varphi - 1) \sinh \xi h - \xi h e^{\xi h}] \dots \dots (11)$$

$$C_2 = \frac{f \cdot e^{\xi d} f(\xi)}{4(\lambda_1 + \mu_1) \sinh \xi d \cdot A} (\sinh \xi h + \xi h \cosh \xi h) \dots \dots (12) \quad E_1 = \frac{\xi h f(\xi)}{4 A} (fl\varphi \cosh \xi h + \sinh \xi h) \dots \dots (13)$$

$$\text{ただし } f = \frac{\mu_2(\lambda_1 + 2\mu_1)}{\mu_1(\lambda_2 + 2\mu_2)}, \quad l = \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_1 + \mu_1} \dots \dots \dots (14)$$

$$\varphi = \frac{1}{\sinh \xi d} \left(\cosh \xi d + \frac{\xi d}{\sinh \xi d} \right) \quad A = \xi^2 h^2 - \sinh^2 \xi h - fl\varphi (\xi h + \sinh \xi h \cosh \xi h) \dots \dots \dots (15)$$

(10)～(13) 式の表示式、および (7), (8), (9) 式の関係を用いると 8 個の常数が全部定まり、それを用いて応力式を書くと次のようになる。

$$\sigma_{y1} = \int_1^\infty \frac{(fl\varphi + \xi y)(\sinh \xi h + \xi h \cosh \xi h) \cosh \xi y - \{(\sinh \xi h + \xi h \cosh \xi h) + \xi y (fl\varphi - \xi h) \sinh \xi h\} \sinh \xi y}{\xi^2 h^2 - \sinh^2 \xi h - fl\varphi (\xi h + \sinh \xi h \cosh \xi h)} \cdot \xi^2 f(\xi) \cos \xi x d\xi \dots \dots (16)$$

$$\sigma_{y_2} = \int_0^\infty \frac{f l (\sinh \xi h + \xi h \cosh \xi h) [\sinh \xi d \cosh \xi (y-d) - \xi y \sinh \xi d \sinh \xi (y-d) + \xi d \cosh \xi y] \xi^2 f(\xi) \cos \xi x d \xi}{\sinh^2 \xi d [\xi^2 h^2 - \sinh^2 \xi h - fl \varphi(\xi h + \sinh \xi h \cosh \xi h)]} \dots \quad (17)$$

この結果を用いて特別な場合の解を導いてみよう。

(1) 二層半無限体の場合

(16) 式で $d \rightarrow \infty$ とすれば $\varphi(\xi, d) \rightarrow 1$ となり、上層に対する表示式をうる。いま $\xi h = z$, $y = ht$, $x = hp$, $a = hs$, また巾 $2a$ に p なる一様荷重が加わるとして、 $f(\xi) = 2p_0 \sin \alpha \xi / \pi \xi^3$ と置けば、

$$\sigma_{y_2} = \frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{[(1+ctz)(\sinh z + z \cosh z) \cosh tz - \{c(\sinh z + z \cosh z) + tz(1-cz)\} \sinh tz]}{c(z^2 - \sinh^2 z) - \sinh z \cdot \cosh z - z} \cdot \frac{\sin sz \cos pz}{z} dz \dots \quad (18)$$

下層に対しては (17) 式で $d \rightarrow \infty$ として

$$\sigma_{y_2} = \frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+tz)(\sinh z + z \cosh z) e^{-tz} \sin sz \cos pz}{c(z^2 - \sinh^2 z) - \sinh z \cdot \cosh z - z} \cdot \frac{dz}{z} \dots \quad (19)$$

ただし

$$c = \frac{1}{fl} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + \mu_2)}{(\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1 + \mu_1)} = \frac{1 - \sigma_2^2}{1 - \sigma_1^2} \cdot \frac{E_1}{E_2} \quad (E: ヤング率, \sigma: ポアソン比) \dots \quad (20)$$

(2) 一層帯状体の場合

(16) 式で $d \rightarrow 0$ とすれば $\varphi \rightarrow \infty$ となるから、これを用いてもよいし、また (1) の場合に $\lambda_2 \rightarrow \infty$, $\mu_2 \rightarrow \infty$, すなわち $fl \rightarrow \infty$ としてもよい。あるいは (17) 式で $h \rightarrow 0$ と置くと、座標の原点が表面にあつて厚さ d なる帯状体の式をうるから、 $y = y' + d$ とおき、この d の代りに h を用いればよい。いずれの場合も結果は同じで、

$$\sigma_y = \frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{tz \sinh z \sinh tz - (\sinh z + z \cosh z) \cosh tz}{z + \sinh z \cdot \cosh z} \cdot \frac{\sin sz \cos pz}{z} dz \dots \quad (21)$$

(3) 一層無限体の場合

いわゆる Boussinesq の解である。(18) 式で $y = y' - h$ として、 $h \rightarrow \infty$ としてもよいし、(19) 式で $h \rightarrow 0$ としてもよい。または (21) 式で $y = y' - h$, $h \rightarrow \infty$ としてもよい。結果は

$$\sigma_y = -\frac{2p}{\pi} \int_0^\infty (1+tz) e^{-tz} \frac{\sin sz \cos pz}{z} dz \dots \quad (22)$$

以上は平面ひずみの場合の解であつたが、軸対称の場合には (18)～(22) 式の末尾の $2p \sin sz \cos pz / \pi z$ の代りに $apJ_1(sz) J_0(pz)$ を用いればよい。 $J_1(sz)$, $J_0(pz)$ は第1種および第2種の Bessel 関数である。これは (1)～(3) 式に対応する軸対称の時の応力、変位の表示式を求めてみると、 $\cos \xi x \rightarrow J_0(\xi x)$, $\sin \xi x \rightarrow J_1(\xi x)$ となるだけの相違であるという事実にもとづくものである²⁾。二層問題では半無限体の場合が最も一般的であるので (18), (19) 式を数値積分してみた。 $s=0.5$ すなわち載荷巾が上層厚さに等しい場合につき、 $c=0.5, 1, 2, 3, 10, 100$ と変化させ、地盤内の各点の垂直応力を求め、これを図示したものが図-2, 3 である。この図より下層の物質のヤング係数が、下層のそれより大であるとき、境界面付近より下方で応力が十分分散されていることが明らかになるであろう。

3. 粘弾性論による解

図-4 のような二層半無限体を考え、上層の弾性、粘性常数をそれぞれ $\lambda_1, \mu_1; \lambda'_1, \mu'_1$ 下層のそれを $\lambda_2, \mu_2; \lambda'_2, \mu'_2$ とする。Voigt 型の粘弾性体と考え、弾性論における λ, μ の代りに $\lambda + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}$, $\mu + \mu' \frac{\partial}{\partial t}$ を用いて Hooke の法則に相当するものを定義し、平面ひずみとして応力と変位の表示式を求めるところのようになる¹⁶⁾。

$$\sigma_{y_1} = \int_0^\infty \left[\{L_i A_i - 2K_i(\xi B_i - A_i)\} - \left(\frac{1}{2} - \xi y \right) (L_i + K_i) A_i - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_i + K_i) A_i \right] e^{-\xi y} \cos \xi x d \xi + \int_0^\infty \left[\{L_i C_i + 2K_i(C_i - \xi D_i)\} - \left(\frac{1}{2} + \xi y \right) (L_i + K_i) C_i - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_i + K_i) C_i \right] e^{\xi y} \cos \xi x d \xi \dots \quad (23)$$

$$\tau_i = \int_0^\infty \left[K_i(A_i - 2\xi B_i) - \left(\frac{1}{2} - \xi y \right) (L_i + K_i) A_i - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_i + K_i) A_i \right] e^{-\xi y} \sin \xi x d \xi + \int_0^\infty \left[K_i(2\xi D_i - C_i) + \left(\frac{1}{2} + \xi y \right) (L_i + K_i) C_i + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_i + K_i) C_i \right] e^{\xi y} \sin \xi x d \xi \dots \quad (24)$$

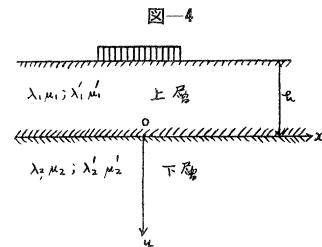


図-4

図-2 内部応力分布図(その1)

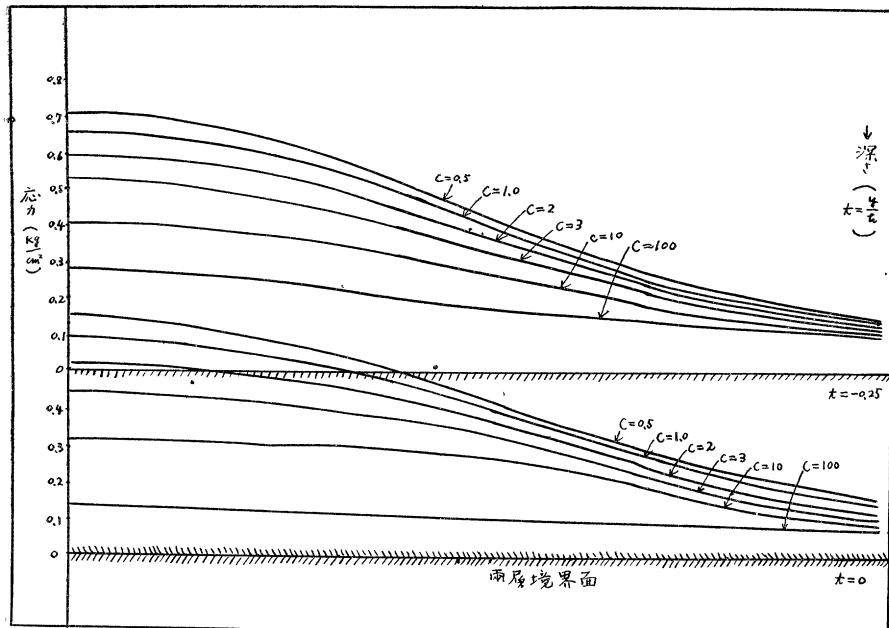
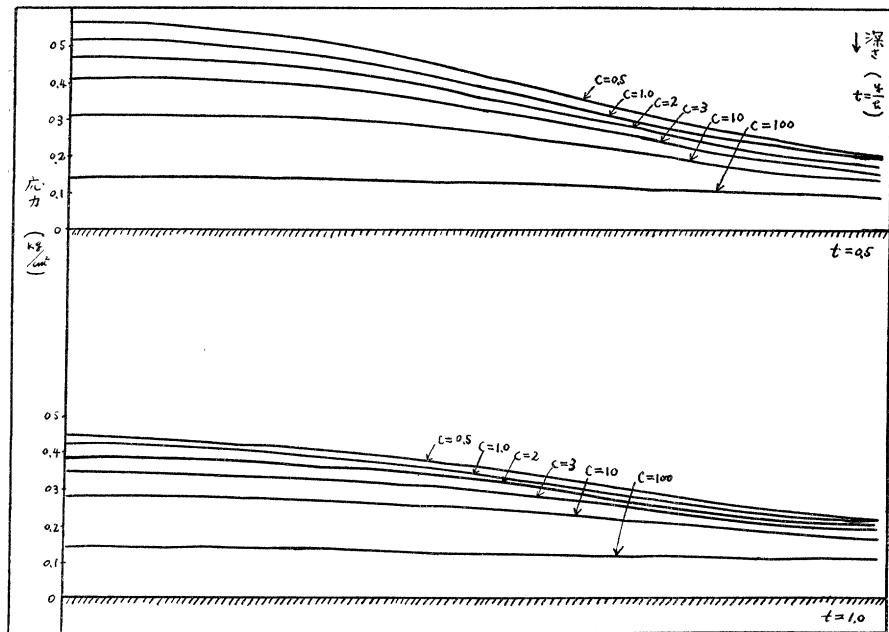


図-3 同 上 (その2)



$$v_i = \int_0^\infty \left[\left(B_i - \frac{A_i}{\xi} \right) - \frac{1}{2 \mu_i' \xi} \left(\frac{1}{2} + \xi y \right) I_{ai} + \frac{1}{2 \mu_i'} \frac{\partial I_{ai}}{\partial \xi} \right] e^{-\xi y} \cos \xi x d\xi \\ + \int_0^\infty \left(\frac{C_i}{\xi} - D_i \right) + \frac{1}{2 \mu_i' \xi} \left(\frac{1}{2} - \xi y \right) I_{ci} - \frac{1}{2 \mu_i'} \frac{\partial I_{ci}}{\partial \xi} \right] e^{\xi y} \cos \xi x d\xi \quad \dots \dots \dots (25)$$

たゞし

$$\left. \begin{aligned} L_i &= \lambda_i + \lambda_i' \frac{\partial}{\partial t}, \quad K_i = \mu_i + \mu_i' \frac{\partial}{\partial t}, \quad \nu_i = \frac{\mu_i}{\mu_i'} \\ I_{ai} &= e^{-\nu_i t} \int_0^t e^{\nu_i t} (L_i + K_i) A_i dt, \quad I_{ci} = e^{-\nu_i t} \int_0^t e^{\nu_i t} (L_i + K_i) C_i dt \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (26)$$

(23)～(26)式において $i=1$ としたものが上層に対する表示式であり, $i=2$ とし, $e^{\xi h}$ がかかるつている項をのぞいたものが下層に対する式である。これを次のような境界条件のもとに解く。

$$z=-h \text{ の時 } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{y_1} = -\int_0^\infty f(\xi, t) \cos \xi x d\xi \\ \tau_1 = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(27) \quad z=0 \text{ の時 } \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{y_1} = \sigma_{y_2}, \quad \tau_1 = 0 \\ v_1 = v_2, \quad \tau_2 = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

(23)～(25)式を上の境界条件に適用すると, A_i, B_i, C_i, D_i 等の6個の常数を決定すべき6個の式をうる。

$$\left[\{L_1 A_1 - 2 K_1 (\xi B_1 - A_1)\} - \left(\frac{1}{2} + \xi h \right) (L_1 + K_1) A_1 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_1 + K_1) A_1 \right] e^{\xi h} + \left[\{L_1 C_1 + 2 K_1 (C_1 - \xi D_1)\} - \left(\frac{1}{2} - \xi h \right) (L_1 + K_1) C_1 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_1 + K_1) C_1 \right] e^{-\xi h} = f(\xi, t) \dots\dots\dots(29)$$

$$\left[K_1 (A_1 - 2 \xi B_1) - \left(\frac{1}{2} + \xi h \right) (L_1 + K_1) A_1 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_1 + K_1) A_1 \right] e^{\xi h} + \left[K_1 (2 \xi D_1 - C_1) + \left(\frac{1}{2} - \xi h \right) (L_1 + K_1) C_1 + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_1 + K_1) C_1 \right] e^{-\xi h} = 0 \dots\dots\dots(30)$$

$$\left[\{L_1 A_1 - 2 K_1 (\xi B_1 - A_1)\} - \frac{1}{2} (L_1 + K_1) A_1 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_1 + K_1) A_1 \right] + \left[\{L_1 C_1 + 2 K_1 (C_1 - \xi D_1)\} - \frac{1}{2} (L_1 + K_1) C_1 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_1 + K_1) C_1 \right] = \left[\{L_2 A_2 - 2 K_2 (\xi B_2 - A_2)\} - \frac{1}{2} (L_2 + K_2) A_2 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_2 + K_2) A_2 \right] \dots\dots\dots(31)$$

$$\left[\left(B_1 - \frac{A_1}{\xi} \right) - \frac{I_{a_1}}{4 \mu_1' \xi} + \frac{1}{2 \mu_1'} \frac{\partial I_{a_1}}{\partial \xi} \right] + \left[\left(\frac{C_1}{\xi} - D_1 \right) + \frac{I_{c_1}}{4 \mu_1' \xi} - \frac{1}{2 \mu_1'} \frac{\partial I_{c_1}}{\partial \xi} \right] = \left[\left(B_2 - \frac{A_2}{\xi} \right) - \frac{I_{a_2}}{4 \mu_2' \xi} + \frac{1}{2 \mu_2'} \frac{\partial I_{a_2}}{\partial \xi} \right] \dots\dots\dots(32)$$

$$\left[K_1 (A_1 - 2 \xi B_1) - \frac{1}{2} (L_1 + K_1) A_1 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_1 + K_1) A_1 \right] + \left[K_1 (2 \xi D_1 - C_1) + \frac{1}{2} (L_1 + K_1) C_1 + \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_1 + K_1) C_1 \right] = 0 \dots\dots\dots(33)$$

$$\left[K_2 (A_2 - 2 \xi B_2) - \frac{1}{2} (L_2 + K_2) A_2 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_2 + K_2) A_2 \right] = 0 \dots\dots\dots(34)$$

ここにおいて,

$$\left. \begin{aligned} K_1 (A_1 - 2 \xi B_1) - \frac{1}{2} (L_1 + K_1) A_1 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_1 + K_1) A_1 &= E_1 \\ K_1 (C_1 - 2 \xi D_1) - \frac{1}{2} (L_1 + K_1) C_1 - \xi \frac{\partial}{\partial \xi} (L_1 + K_1) C_1 &= E_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

とおけば (33) 式より $E_1 = E_2$ をうるから (29)～(31) 式は次のようになる。

$$[(1 - \xi h)(L_1 + K_1) A_1 + E_1] e^{\xi h} + [(1 + \xi h)(L_1 + K_1) C_1 + E_1] e^{-\xi h} = -f(\xi, t) \dots\dots\dots(36)$$

$$[-\xi h(L_1 + K_1) A_1 + E_1] e^{\xi h} - [E_1 + \xi h(L_1 + K_1) C_1] e^{-\xi h} = 0 \dots\dots\dots(37)$$

$$2 E_1 + (L_1 + K_1)(A_1 + C_1) = (L_2 + K_2) A_2 \dots\dots\dots(38)$$

さて次に

$$\left. \begin{aligned} A_i &= A_i^1 + A_i^2 t, & B_i &= B_i^1 + B_i^2 t, & E_i &= E_i^1 + E_i^2 t \\ C_i &= C_i^1 + C_i^2 t, & D_i &= D_i^1 + D_i^2 t, & & (i=1,2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

なる仮定をもうける。すなわち応力, 変位が時間に無関係な項と, 時間に比例する項とに分離できると仮定するのである。そして (35), (34) 式を用いて (32) 式を書き直してみると B_1, D_1, E_1, E_2 , が消えて, 面倒な計算の後, 次の式をうる。

$$\left\{ (\lambda_1 + 2 \mu_1)(A_1 - C_1) + \left(\lambda_1' - \frac{\lambda_1}{\nu_1} \right)(A_1^2 - C_1^2) \right\} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \left\{ (\lambda_2 + 2 \mu_2) A_2 + \left(\lambda_2' - \frac{\lambda_2}{\nu_2} \right) A_2^2 \right\} \dots\dots\dots(40)$$

従つて (29)～(34) の6個の式が (36), (37), (38), (40) の4式に縮小されたことになる。ここでさらに (38) 式より E_1 を求め (36), (37) 式に代入すると,

$$(L_2 + K_2) A_2 \cosh \xi h + (L_1 + K_1)(A_1 - C_1) \sinh \xi h + \xi h (L_1 + K_1)(C_1 e^{-\xi h} - A_1 e^{\xi h}) = -\frac{f(\xi, t)}{2} \dots\dots\dots(41)$$

$$(L_2 + K_2) A_2 \sinh \xi h - (L_1 + K_1)(A_1 + C_1) \sinh \xi h - \xi h (L_1 + K_1)(A_1 e^{\xi h} + C_1 e^{-\xi h}) = 0 \dots\dots\dots(42)$$

従つて (40), (41), (42) の 3 式に短縮されたわけである。ここで (39) 式の関係を用いて、以上の 3 式を時間に関係する項と、無関係な項とに分けると、 $A_1^1, A_1^2, C_1^1, C_1^2, A_2^1, A_2^2$ に関する 6 個の関係式をうることになる。まず (40) 式の時間に関係する項より

これを(41), (42)式の t に関する項に代入すると A_1^2, C_1^2 , に関する2式がえられ, $f(\xi, t) = -2(p_0 + p_1 t) \sin \alpha \xi / \pi \xi$, とおけば A_1^2, C_1^2 が次のとくに定まる。

$$\left. \begin{aligned} A_1^2 &= \frac{p_1}{2\pi\bar{\lambda}_1 \cdot A} \cdot \frac{\sin \alpha \xi}{\xi} (f l \sinh \xi h + \sinh \xi h + \xi h e^{-\xi h}) \\ C_1^2 &= \frac{p_1}{2\pi\bar{\lambda}_1 \cdot A} \cdot \frac{\sin \alpha \xi}{\xi} (f l \sinh \xi h - \sinh \xi h - \xi h e^{\xi h}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \quad (44)$$

$$(43) \text{ 式より} \quad A_2^2 = \frac{fp_1}{\pi \lambda_1 A} \cdot \frac{\sin a\xi}{\xi} (\sinh \xi h + \xi h \cosh \xi h) \quad \dots \dots \dots \quad (45)$$

$$\text{ここで } A = \xi^2 h^2 - \sinh^2 \xi h - fl(\xi + \sinh \xi h \cosh \xi h), \quad \bar{\lambda}_1 = \lambda_1 + \mu_1$$

この A_2^2 に (45) の値を代入して、 A_2^1 が A_1^1 , C_1^1 で表わされるから (41), (42) 式の t に無関係な項を考えると、 A_1^1 , C_1^1 を決定する 2 個の関係式がえられる。このような手続を経て $A_1 = A_1^1 + A_1^2 t$, $C_1 = C_1^1 + C_1^2 t$, $A_2 = A_2^1 + A_2^2 t$ の値が決定できるが、計算が長びくので、ここに書き下すのは割愛する。必要な結果として下層に対する応力分布の表示式のみを示すと次のとくになる。

$$\sigma_{y2} = \frac{2fl}{\pi} (p_0 + p_1 t) \int_0^{\infty} \frac{(1+\xi y)(\sinh \xi h + \xi h \cosh \xi h)e^{-\xi y} \cdot \sin a \xi \cos \xi x}{\xi^2 h^2 - \sinh^2 \xi h - fl(\xi h + \sinh \xi h \cosh \xi h)} \cdot \frac{d\xi}{\xi} \\ + \frac{2}{\pi} p_1 f \int_0^{\infty} \frac{(1+\xi y)(\sinh \xi h + \xi h \cosh \xi h)[(lm+n-k)(\xi^2 h^2 - \sinh^2 \xi h) \\ + (f-1)(l m + n) \xi h \sinh^2 \xi h] e^{-\xi y} \sin a \xi \cdot \cos \xi x}{[\xi^2 h^2 - \sinh^2 \xi h - fl(\xi h + \sinh \xi h \cosh \xi h)]^2} \cdot \frac{d\xi}{\xi} \quad (47)$$

ここにおいて

$$\left. \begin{aligned} l &= \frac{\lambda_2 + \mu_2}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad f = -\frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\lambda_2 + 2\mu_2}, \quad n = \frac{\lambda_2' + \mu_2'}{\lambda_1 + \mu_1}, \quad k = \frac{\lambda_1' + \mu_1'}{\lambda_1 + \mu_1} \\ m &= \frac{1}{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2 + 2\mu_2)} \left\{ \frac{(\lambda_1 + 2\mu_1)(\lambda_2\mu_2' - \lambda_2'\mu_2)}{\mu_2} - \frac{(\lambda_2 + 2\mu_2)(\lambda_1\mu_1' - \lambda_1'\mu_1)}{\mu_1} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

とする。さて (47) 式のままではとても複雑なので、粘性、弾性常数を 1 個ずつにするため、次のような仮定をもうける。 λ 、および μ 、は大体同じ値であるとして $\lambda_1 = \mu_1$, $\lambda_2 = \mu_2$ (49)

とする。つまり $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/4$ (σ : ポアソン比)とした場合で、この時 $\lambda = \mu = 2/5 E$ となる。次に粘性は非圧縮的であるとすれば

となる。以上 (49), (50) 式の関係を用いて (48) 式を簡略化すると,

$$l = -\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{E_2}{E_1}, \quad f=1, \quad n=\frac{1}{6}\frac{\mu_2'}{\mu_2}, \quad k=\frac{1}{6}\frac{\mu_1'}{\mu_1}, \quad m=\frac{5}{9}\left(\frac{\mu_2'}{\mu_2} - \frac{\mu_1'}{\mu_1}\right) \quad \dots \quad (51)$$

をうる。さらに(47)式の変数を弾性の場合と同様な変換によつて改めておくと、結局次の式をうることになる。

$$\sigma_{y_2} = -\frac{2}{\pi} (p_0 + p_1 t) \int_0^\infty \frac{(1+tz)(\sinh z + z \cosh z)e^{-tz} \sin sz \cos pz}{\sinh z \cosh z + z + c(\sinh^2 z - z^2)} \cdot \frac{dz}{z} \\ - \frac{2}{\pi} p_1 (lm + n - k) \int_0^\infty \frac{(1+tz)(\sinh z + z \cosh z)(\sinh^2 z - z^2)e^{-tz} \cdot \sin sz \cos pz}{[\sinh z \cosh z + z + c(\sinh^2 z - z^2)]^2} \cdot \frac{dz}{z} (52)$$

ただし $c=1/l$ とする。この式の第1項は弾性に関する項であり、前記の(19)式と一致している。第2項は粘性による影響項であり、定積分の中には粘性を表わす常数が入ってこないから、係数 $lm+n-k$ の値によつてどのように粘性が影響をおよぼすかがわかるのである。なお表面の荷重は $2a(p_0+p_1t)$ であるから(52)式の第1項に hdp をかけ、 p に関して 0 から ∞ まで積分すれば $a(p_0+p_1t)$ とならねばならない。これはよく知られた次の Dirichlet の定理を用いれば容易に証明される。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} p(z) \frac{\sin pz}{z} dz = \frac{\pi}{2} P(+\sigma)$$

従つて(52)式の第2項に hdp をかけて 0 から ∞ まで積分すれば当然 0 になるのである。次に $lm+n-k$ の値を少し吟味してみる。(52)式第2項の定積分は載荷面直下付近なむち $p=0$ では正である。従つて $lm+n-k > 0$ となれば第2項は負になつて荷重は中央に集中し、逆に $lm+n-k < 0$ となれば荷重は分散されるわけ

である。これを念頭に置いて次の各場合に分けて考える。(51) 式を用いると次のようになる。

$$lm+n-k = \frac{\mu_1'}{54\mu_1} \left[39 \frac{\mu_2'}{\mu_1'} - \left(30 \frac{\mu_2}{\mu_1} + 9 \right) \right] \dots \dots \dots \quad (53)$$

(1) 上下層ともに弾性のみの場合

$\mu_1' = \mu_2' = 0$, 従つて $lm + n - k = 0$ となり粘性項は消え (52) 式第1項のみが残る。

(2) 上層が粘弾性、下層が弾性のみの場合

$$\mu_2' = 0, \quad \text{従つて} \quad lm + n - k = -\frac{1}{54} \cdot \frac{\mu_1'}{\mu_1} \left[\frac{30}{c} + 9 \right] < 0$$

よつて上層粘性の分だけは、よけいに応力を分散させる。

(3) 上層が弾性のみで、下層が粘弾性の場合

$$\mu_1' = 0, \quad \text{従つて} \quad lm+n-k = \frac{13}{18} \cdot \frac{\mu_2'}{\mu_1'} > 0$$

よつて下層粘性のために荷重は中央に集中する傾向にある。

(4) 上下層ともに粘弾性の場合

この場合は上層下層の弾性常数比 c の値によつて、荷重を分散せしむべき粘性率の比は異なるつてくる。(53)式において
 $\mu_1'/\mu_2' = e$ とおいてみると

$$lm+n-k = \frac{\mu_1'}{54\mu_1} \left[\frac{39}{e} - \left(\frac{30}{e} + 9 \right) \right]$$

となるから $lm+n-k \equiv 0$ なるためには

$$e \leq -\frac{13}{3} - \frac{130}{9c+30}$$

でなくてはならない。これを図示すると図-5になる。

の時、粘性によつても荷重は分散される。 $e > 13/3$ なるときは c の値のいかにかかわらず、荷重は分散される。図-5 の A の領域に相当する。

(b) $e = 13/3 - 130/9 c + 30$ の時 e と c とにこの関係があるとき、たとえ材料が粘性を有してもその影響がないことを示している。

(c) $e < 13/3 - 130/9 c + 30$ の時 粘性によって応力は中央に集中する。図-6の領域Bに相当する。図によると c がいかに大きくなつても $e < 13/3$ であると応力が集中して矛盾するようにみえる。しかしこの時には(52)式の第2項が相当きいてくるから、たとえ第2項が逆効果にみえても、全体として十分に荷重を分散していることになるのである。今の議論はあくまでも第2項に関するものであることに注意すべきである。

(5) 両層とも粘弾性であるが、両層の弾性が等しい時

(53) 式より

$$lm + n - k = 13 \mu_1' / 18 \mu_1 [\mu_2' / \mu_1' - 1]$$

従つて $\mu_2' > \mu_1'$ の時荷重が分散され、 $\mu_2' < \mu_1'$ の時集中する。これは 図-5 よりも明らかである。

(6) 両層とも粘弾性で粘性が等しい場合

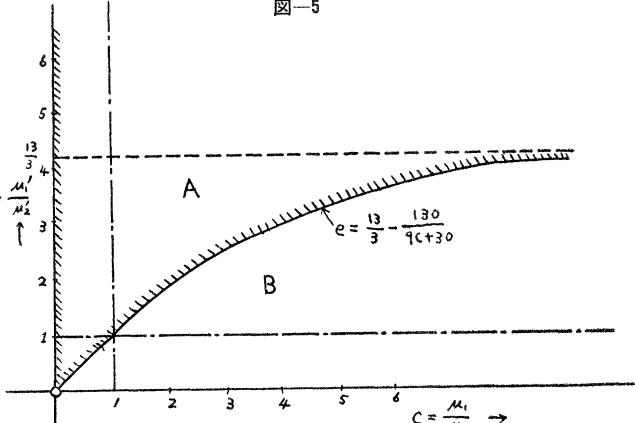
$$lm + n - k = 10 \mu_1 / 18 \mu_1 (1 - \mu_2 / \mu_1)$$

従つて $\mu_2 > \mu_1$ の時応力が拡がり、 $\mu_2 < \mu_1$ の時集中する。

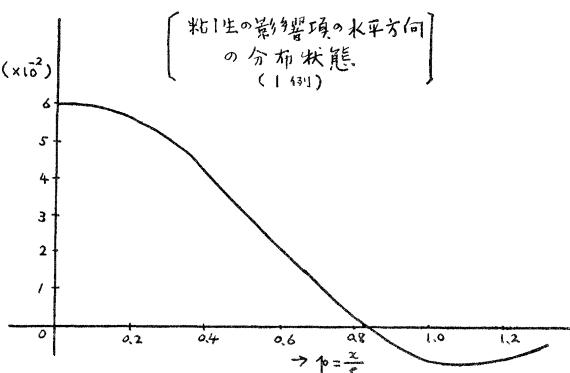
この時は一見、矛盾してみえるが前述のように第1項がきいてくるのである。

(1) 両層の弾性、粘性がともに等しい時
この時 (52) 式は第1項のみとなる。そして

四—5



图—6



$h \rightarrow 0$ とすれば一層半無限体の場合の式となり、この時粘性の影響は入ってこなくなる。

以上は粘性項の影響に関する定性的な考察であるが、地盤内の各点における粘性の影響を量的に定めるのには(52)式第2項を数値積分せねばならない。一例として上下層境界面上において粘性項が水平方向の各点に対し、いかなる影響をおよぼすかを図-6に示しておいた。これは(52)式の第2項を $p_1(lm+n-k)$ で除し、残りを計算したものである。

図から明らかのように粘性の影響は中心付近で大になつてゐる。

4. 実験結果と考察

主として弾性論で得られた結果を定性的にチェックしてみる意味で簡単な実験を行つた。図-7のごとく $100 \times 50 \times 50$ cm の容器中に充填された材料の上に載荷板を置き、それに、一端に分銅をのせた鋼鉄製の梃子によ

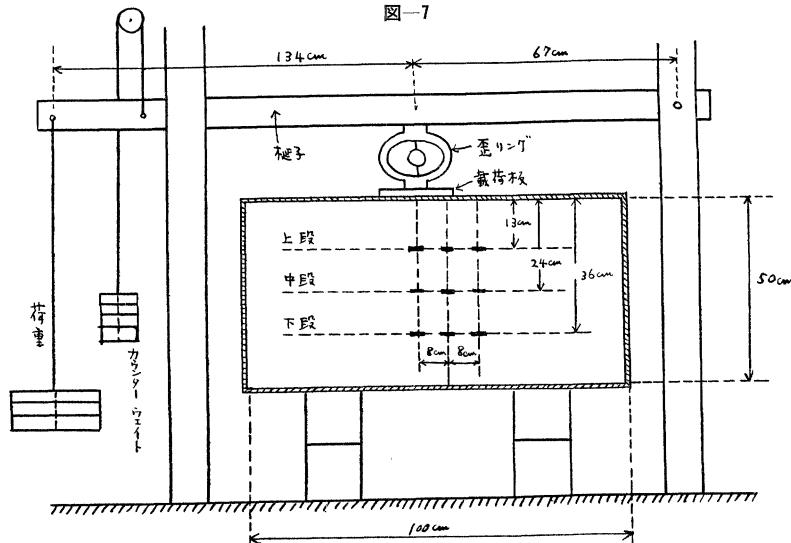


図-7

る。砂は $0.2\sim2.0$ mm、砂利は $2.5\sim5.0$ mm の粒径を有し乾燥させてある。粘性土は乾燥したローム性の細

て載荷する。載荷重はひずみリングによつて、材料内の垂直応力は前もつて埋め込まれた土圧計によつて測定する。土圧計は直径 4 cm、厚さ 2 cm の円筒型の外形を有し、内部に巻線抵抗子が封じこまれ、結線を通じて外部の土圧測定器に連絡してある。3 個の土圧計を図のように並べ、上中下の各深さにおける水平方向の応力分布を測定した。用いた材料は砂、砂利、粘性土の 3 種類であ

図-8

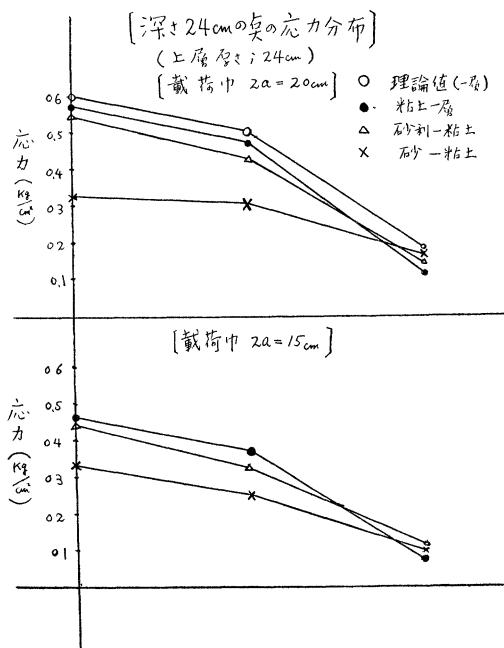
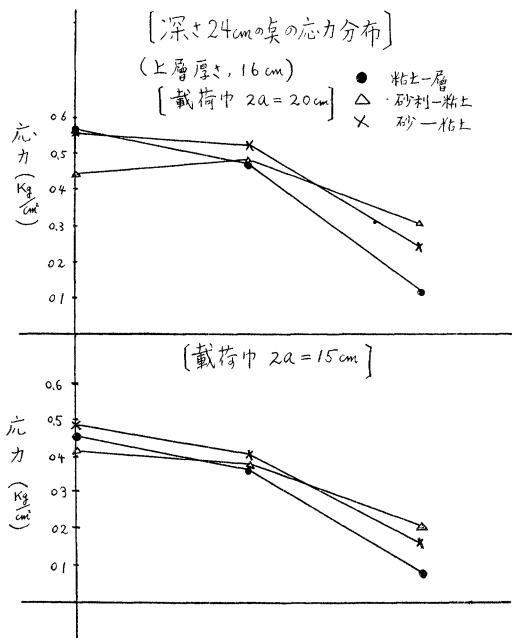


図-9



粒土に機械油を混合したもので、その重量比は油1に対し粉末土4である。普通の含水性の粘土は極めて含水量が変化し、実験期間中、材料の一様性を保つことが困難と考えられたため、このような粘性土を用いたのである。この粘性土は突き固めに際し、その強さや頻度によらずかなり一様な、弾性の小さい、連続物質になるのでつごうがよい。材料を充填するに際しては十分な突き固めを行い、一様になるようにした。載荷用の鉄板は $20 \times 25 \times 2.4\text{ cm}$ のものと $15 \times 25 \times 2.4\text{ cm}$ のものと二種類を主として用いた。層の厚さは 24 cm と 16 cm とし上層材料には砂利、砂の2種類、下層には粘性土を用いた。別に砂、砂利、粘性土のおののおのに対し、一層の時の実験も行つた。その結果の1部が図-8, 9に示してある。図-8は上層厚さ 24 cm の時、図-9は 16 cm の時の結果であり、どちらも深さ 24 cm の所における応力分布である。この図より、粘土一層の場合の応力分布に比し、上層に砂利、砂等の堅い物質を置いた場合は、荷重がかなり分散されていることがわかる。比較のために各図に一層の場合の理論値と、粘土一層の場合の実測値を書き入れておいたが、両者はかなりよく一致することは周知のことである。現在の所、砂、砂利等を地盤に用いた場合の弾性常数Eを定める適確な方法がないため、二層の場合の実測値と理論値を定量的に比較するまでには致つていない。この点コンクリート舗装板等に対して実測してみると、理論値と実測値がよく合致すると思われる。われわれの実験では上層に砂、砂利を用いたために、深さ 13 cm の所の測定値は粒状体の集中力の影響で、粘土一層の場合より、二層の場合の方が応力分布が中央に集中し、逆効果になつた。しかし実際に集中効果のない材料を用いても、図-2, 3からわかるように、応力分散の効果は、上層中の応力分布には顕著に表われてこず、両層境界面付近で判然としてくることが予想される。従つて弾性地盤を考える限り、Saint-Venantの原理よりも、載荷面付近の極的影響が薄らいでくる両層境界面あたりを問題にして比較検討するのが妥当だと思われる。また深さ 36 cm の所の応力分布は測定値が小さいため、測定器の誤差を越えた顕著な差異が表われてこず、考慮するのは差しひかえる。

5. 結 語

- (1) 二層弾性地盤内の応力分布は弾性常数の絶対値が不明であつても、その比 $c=E_1/E_2$ のみによって定まり、かつ上層の弾性常数が大なるとき荷重は分散される。
- (2) 二層粘弹性地盤内の応力分布は、増加荷重の場合、上記の弾性常数比によって定まる値と、弾性比、および粘性比とによって定まる値、との和で表わされる。そして弾性常数比($=c$)が一定の時、上層の粘性常数が大きくなると荷重は分散される。
- (3) (1)の性質は載荷巾にほぼ等しい深さの応力分布に対し、実験的に正しいことが認められる。

本研究は東大教授^一最上武雄先生の御指導のもとに、筆者が修士論文としてまとめた結果である。ここに先生、および数値計算、実験に御協力下さった井元美晴氏、宮田浩邇君に厚く感謝する次第である。

参考文献

- 1) Passer, Walter : Sitzungsberichte Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 144 (1935)
- 2) Marguerre, K. : Ingenieur Archiv, (1931), (1933)
- 3) 松村孫治：土木学会誌 第17巻 第9,11号 (1931)
- 4) Biot : Journal of Applied Mechanics, (1937).
- 5) Hogg, A.H.A. : Philosophical Magazine, 35, 274 (1944)
- 6) Burmister, D.M. : Journal of Applied Physics, 16 (5) (1944)
- 7) Fox, L. : Proceedings of the 2nd International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. II (1948)
- 8) Fox, L. : Géotechnique, Vol II (1950~1951)
- 9) ダニリュク, А.М. : Известия Академии Наук с.с.с.р. (Технических Наук) No. 6 (1954)
- 10) Иванов, П.Л. : Известия Академии Наук с.с.с.р. (Tex. Наук) No. 8 (1956)
- 11) Коган : Известия Академии Наук с.с.с.р. (Tex. Наук) No. 6 (1958)
- 12) Sneddon, I.N. : Fourier Transforms (Macgraw-Hill) (1951)
- 13) Лебедев, Н.Н. } : Прикладная Математика и Механика. Т. XXII.B. 3 (1958)
Уфдлянд, Я.С. } : Прикладная Математика и Механика. Т. XXII.B. 3 (1958)
- 14) 最上武雄：東大理工研報告、第1巻 第5・6号 (1947)
- 15) 最上武雄：土の力学、(1947)
- 16) 山口柏樹：土木学会誌、第39巻 第4号 (1954)
- 17) Kézdi, Á. : Proceedings of the 4th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. III (1957).