

疲労破壊の確率と橋の疲労設計について*

正員 西 村 昭**
正員 南 武 雄***

THE PROBABILITY OF FATIGUE FAILURE AND THE FATIGUE-DESIGN OF BRIDGES

By Akira Nishimura, C.E. Member, and Takeo Minami, C.E. Member

Synopsis : In this paper, the authors gave the approximate definition for the probability of fatigue failure, modifying the concept of cumulative damage in fatigue which has been taken conventionally as the basic rule for the fatigue design of structures subject to service loads, by using the statistical treatments of the scatter of applied load frequency and of the endured cycles before the failure of material under the constant stress amplitude test. Furthermore, taking into account the practical factor such as the decrease of sectional area caused by corrosion or wear of material, they introduced a formula to estimate the fatigue life and to make the fatigue design of structures easy. These were shown concretely by some numerical examples on bridges.

要旨 実働荷重 (service load) に対する構造物疲労設計において、従来基本的方式と考えられていたくり返し数比積算法に、荷重および耐久回数の両者のばらつきを考慮した統計的取扱いを加えて疲労破壊の確率を定義し、構造物の疲労寿命の推定式を導き、あわせて疲労設計の基礎方式を提案した。さらにこれらにたいし、道路橋についての計算例によつて定量的説明を試みた。

1. 緒 論

構造物の疲労設計に関する研究はすでに古くから行なわれているが、橋構造の疲労設計は、原理、方法いずれの面についても、まだ十分な解明を見ていらない現状にある。しかし鉄道橋におけるその必要性はすでに認められているところで、わが国鋼鉄道橋設計示方書案には、交番応力に関する条項を設けて疲労現象を考慮している。しかしこの規定も必ずしも十分なものとはいえないようである。これに対して道路橋では、鉄道橋に比して一般に活荷重応力比が小さく、従つくり返し応力の影響はほとんど考慮するに足りないとするが従来の定説である。

しかるに今次大戦を境とした橋工学分野における構造形式、構造材料各面での発展は、死荷重応力の画期的減少をもたらし、道路橋における活荷重応力比をかなり増大せしめた。一方、構造材料の進歩はその物理的、機械的性状を顕著に向上せしめたが、ただ疲労強度は、静的強度の上昇に比例して増大していないようである。このため静的許容応力の増加とともに疲労安全度の低下を招くことになり、それらの材料が構造物の一部として実用されるときに不可避の応力集中を受ける場合、特に注意すべき事実となつてゐる¹⁾。また腐食、摩耗などによる部材有効断面積の経年減少は、必然的に実働応力の増大を来たし、そのため疲労破損を生ずるに十分な大きさの応力に達せしめるが、これは、鉄道橋ではすでに比較的多くの部材疲労破壊の実例^{2), 3)}によつて承知されているところである。

以上の諸点より、道路橋においても疲労設計の問題を再検討する必要が生じているといえよう。

2. 疲 労 破 壊 の 確 率

変動応力下の材料の疲労は、従来、くり返し数比積算法⁴⁾ (いわゆる Miner の法則⁵⁾) によつて説明されてきた。すなわち、あるくり返し応力に対する耐久回数を N とし、実際の変動応力のその応力レベルでの作用回数を n とすると、くり返し数比 n/N を変動応力のばらつきの範囲にわたつて累加した値 $\Sigma(n/N)$ が 1 になると疲労破壊を生ずると考える (図-1 参照)。この Miner の法則の成否に関してはきわめて多くの実験的研究がなされている⁶⁾。試験片、試験機、試験方法等に研究者ごとの相違があつて統一的判断を行なうことは困難な状況であるが、概して Miner の法則の成立を否定しているものが多い。しかし $\Sigma(n/N)$ が 1 の前後の値をとることはほぼ確実であり、Miner の法則は変動応力下の疲労を取扱う上で、疲労寿命の目安を与える有力な実用

* 土木学会第 14 回年次学術講演会で発表したものに補足 ** 神戸大学助教授、工学部土木工学教室

*** 北海道バー エス コンクリート KK

的手段と考えてよい。この意味から、本文においては Miner の法則の成立を仮定する。ただ、同一応力レベルでの疲労試験でも N はかなりばらつくから $\Sigma(n/N)$ も 1 の周辺にばらつくと考えるのが妥当であり、 $\Sigma(n/N) = A$ を疲労破壊条件としておく。また n も橋においては一般には推定るべき量であるから、これを考慮すれば $\Sigma(n/N) = A$ なる条件を満たすに至る時間（疲労寿命）もまた、きわめて大きいばらつきを示すものと考えてよい。あるいは時間を与えた場合、その間に生ずる疲労度 A もまたかなりのばらつきを示す。そこでこの A を確率変数と考えてその分布関数を $\Psi(A)$ 、 N の確率密度関数を $p(N)$ 、分布関数を $P(N)$ とする。各 $P(N)$ に対して描かれる $S-N$ 関係は両対数グラフ上で平行直線群、すなわち $S-N-P$ 直線群を形成するものと仮定すると、 A がある特定の値になる確率、あるいは疲労破壊確率 P_f は次式によつて与えられることになる。

$$P_f = \int_{N_{\min}}^{N_{\max}} p(N) \{1 - \Psi(A)\} dN, \quad N_{\min} < N < N_{\max} \dots \dots \dots (a)$$

ここで $\Psi(A)$ は一般に N の関数となり、式 (a) を解析的に解くことは困難で、相当面倒な数値積分に頼る以外に手段はないようである。そこで式 (a) に代るものとして、次式によつて疲労破壊確率を近似的に評価することを考える。すなわち

$$P_f = P(N) \{1 - \Psi(A)\} \dots \dots \dots (b)$$

式 (b) が近似的であることは、あたかも Freudenthal の破壊確率に対する定義⁷⁾が池田氏⁸⁾の指摘する欠陥を有するのと相通する。しかし、Freudenthal の定義が非常に小さい破壊確率の場合には近似的に十分であると考えられるように、式 (b) も $P(N)$ が非常に小さい場合には十分な近似値を与えるものと考えてよい。ここで A を疲労(破損)度と仮称すると、その逆数 $1/A$ は疲労破壊に対する安全度を示すものであると考えられるから、適当地定義された安全度 $\xi(1/A)$ と、それに対する疲労破壊の確率 $P(N) \{1 - \Psi(A)\}$ の関係は、構造物部材の疲労寿命 T をパラメーターとして定まつてくる。また、構造物が疲労設計される場合には、構造物に作用する荷重の頻度分布と、構造材料の $S-N-P(N)$ 関係がわかつていれば、この両者より得られる疲労破壊の確率 $P(N) \{1 - \Psi(A)\}$ は、安全度 $\xi(1/A)$ 、寿命 T をパラメーターとして部材断面を決定することになる。これが変動応力下の構造物疲労設計の基本方式である。

この基本方式に準じて、著者の 1 人⁹⁾は、かつて変動応力下の構造物寿命の推定法、および疲労設計法について、 $A=1$ を疲労破壊条件とし、腐食・摩耗等による有効断面積減少を考慮し、そのため一般にくり返し応力の上下限値とも経年変化する（従つて変動応力の性質が異なつてくる）などのかなり実情に近い条件下で論じたが、それにはなお荷重のばらつき、 A 値の考え方方に不十分な点があつた。本文では、取扱いを容易にするために変動応力の性質の経年変化を無視して、これらの不十分な点を補なつた研究を行なつている。

3. 疲労(破損)度 A の分布法則

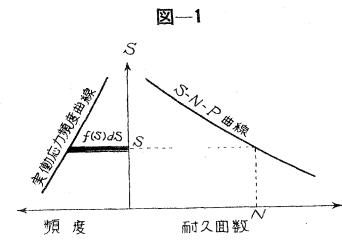
前節に述べたように、疲労度 A には相当なばらつきが予想されるが、その分布法則を求めるには、 N および n のばらつきの知識が基礎となる。 N のばらつきには従来の研究^{10), 11)}によると対数正規分布がよく適合するようであるが、ここではその分布法則にまでは触れないで単に確率レベル $P(N)$ をもつてばらつきを代表せしめておく。これに対して荷重のばらつきは次の通りである。

(1) 橋に作用する活荷重のばらつき

橋本来の機能上最も重要なとして自動車荷重、および列車荷重をとり上げる。自動車荷重のばらつきを表わすには、輪荷重には指数分布的に変化する有限分布が、総重量、特に大型車のそれには正規分布、あるいは Pearson 系第 I 型分布が好都合のようである^{12), 13)}。また列車荷重に対しては、輪荷重には正規分布¹⁴⁾、あるいは上下限値を考えて Pearson 系第 II 型分布をあてはめることができる⁹⁾。これらはいずれも変量のばらつき全体をおおつて適用される分布法則であるが、これに対して構造物の安全性を支配するばらつきの上限付近のみよりなる部分母集団を注目して、それに解析上有利な分布関数をあてはめるのが好都合な場合が多い。このような部分母集団は一般に指數型の分布を示し、指數分布、あるいは上述の有限分布を用いよう。

(2) A の分布法則

a) 作用応力頻度分布が有限分布で表わされる場合 応力レベルを S で表わすと、そのばらつきが有限分布に従う場合の確率密度関数 $f(S)$ は次の通りである。



疲労破壊の確率と橋の疲労設計について*

正員 西 村 昭**
正員 南 武 雄***

THE PROBABILITY OF FATIGUE FAILURE AND THE FATIGUE-DESIGN OF BRIDGES

By Akira Nishimura, C.E. Member, and Takeo Minami, C.E. Member

Synopsis : In this paper, the authors gave the approximate definition for the probability of fatigue failure, modifying the concept of cumulative damage in fatigue which has been taken conventionally as the basic rule for the fatigue design of structures subject to service loads, by using the statistical treatments of the scatter of applied load frequency and of the endured cycles before the failure of material under the constant stress amplitude test. Furthermore, taking into account the practical factor such as the decrease of sectional area caused by corrosion or wear of material, they introduced a formula to estimate the fatigue life and to make the fatigue design of structures easy. These were shown concretely by some numerical examples on bridges.

要旨 実働荷重 (service load) に対する構造物疲労設計において、従来基本的方式と考えられていたくり返し数比積算法に、荷重および耐久回数の両者のばらつきを考慮した統計的取扱いを加えて疲労破壊の確率を定義し、構造物の疲労寿命の推定式を導き、あわせて疲労設計の基礎方式を提案した。さらにこれらにたいし、道路橋についての計算例によつて定量的説明を試みた。

1. 緒論

構造物の疲労設計に関する研究はすでに古くから行なわれているが、橋構造の疲労設計は、原理、方法いずれの面についても、まだ十分な解明を見ていらない現状にある。しかしふ道橋におけるその必要性はすでに認められているところで、わが国鋼鉄道橋設計示方書案には、交番応力に関する条項を設けて疲労現象を考慮している。しかしこの規定も必ずしも十分なものとはいえないようである。これに対して道路橋では、鉄道橋に比して一般に活荷重応力比が小さく、従つてくり返し応力の影響はほとんど考慮するに足りないとするが従来の定説である。

しかるに今次大戦を境とした橋工学分野における構造形式、構造材料各面での発展は、死荷重応力の画期的減少をもたらし、道路橋における活荷重応力比をかなり増大せしめた。一方、構造材料の進歩はその物理的、機械的性状を顕著に向上せしめたが、ただ疲労強度は、静的強度の上昇に比例して増大していないようである。このため静的許容応力の増加とともに疲労安全度の低下を招くことになり、それらの材料が構造物の一部として実用されるときに不可避の応力集中を受ける場合、特に注意すべき事実となつてゐる¹⁾。また腐食、摩耗などによる部材有効断面積の経年減少は、必然的に実働応力の増大を來たし、そのため疲労破損を生ずるに十分な大きさの応力に達せしめるが、これは、鉄道橋ではすでに比較的多くの部材疲労破壊の実例^{2), 3)}によつて承知されているところである。

以上の諸点より、道路橋においても疲労設計の問題を再検討する必要が生じているといえよう。

2. 疲労破壊の確率

変動応力下の材料の疲労は、従来、くり返し数比積算法⁴⁾ (いわゆる Miner の法則⁵⁾) によつて説明されてきた。すなわち、あるくり返し応力に対する耐久回数を N とし、実際の変動応力のその応力レベルでの作用回数を n とすると、くり返し数比 n/N を変動応力のばらつきの範囲にわたつて累加した値 $\Sigma(n/N)$ が 1 になると疲労破壊を生ずると考える (図-1 参照)。この Miner の法則の成否に関してはきわめて多くの実験的研究がなされている⁶⁾。試験片、試験機、試験方法等に研究者ごとの相違があつて統一的判断を行なうことは困難な状況であるが、概して Miner の法則の成立を否定しているものが多い。しかし $\Sigma(n/N)$ が 1 の前後の値をとることはほぼ確実であり、Miner の法則は変動応力下の疲労を取扱う上で、疲労寿命の目安を与える有力な実用

* 土木学会第 14 回年次学術講演会で発表したものに補足 ** 神戸大学助教授、工学部土木工学教室

*** 北海道バー エス コンクリート KK

的手段と考えてよい。この意味から、本文においては Miner の法則の成立を仮定する。ただ、同一応力レベルでの疲労試験でも N はかなりばらつくから $\Sigma(n/N)$ も 1 の周辺にばらつくと考えるのが妥当であり、 $\Sigma(n/N)=A$ を疲労破壊条件としておく。また n も橋においては一般には推定すべき量であるから、これを考慮すれば $\Sigma(n/N)=A$ なる条件を満たすに至る時間(疲労寿命)もまた、きわめて大きいばらつきを示すものと考えてよい。あるいは時間を与えた場合、その間に生ずる疲労度 A もまたかなりのばらつきを示す。そこでこの A を確率変数と見てその分布関数を $\psi(A)$ 、 N の確率密度関数を $p(N)$ 、分布関数を $P(N)$ とする。各 $P(N)$ に対して描かれる $S-N$ 関係は両対数グラフ上で平行直線群、すなわち $S-N-P$ 直線群を形成するものと仮定すると、 A がある特定の値になる確率、あるいは疲労破壊確率 P_f は次式によって与えられることになる。

$$P_f = \int_{N_{\min}}^{N_{\max}} p(N) \{1 - \psi(A)\} dN, \quad N_{\min} < N < N_{\max} \dots \dots \dots \dots (a)$$

ここで $\psi(A)$ は一般に N の関数となり、式(a)を解析的に解くことは困難で、相当面倒な数値積分に頼る以外に手段はないようである。そこで式(a)に代るものとして、次式によつて疲労破壊確率を近似的に評価することを考える。すなわち

$$P_f = P(N) \{1 - \psi(A)\} \dots \dots \dots \dots (b)$$

式(b)が近似的であることは、あたかも Freudenthal の破壊確率に対する定義⁷⁾が池田氏⁸⁾の指摘する欠陥を有するとの相通する。しかし、Freudenthal の定義が非常に小さい破壊確率の場合には近似的に十分であると考えられるように、式(b)も $P(N)$ が非常に小さい場合には十分な近似値を与えるものと考えてよい。ここで A を疲労(破壊)度と仮称すると、その逆数 $1/A$ は疲労破壊に対する安全度を示すものであると考えられるから、適宜に定義された安全度 $\xi(1/A)$ と、それに対する疲労破壊の確率 $P(N)\{1 - \psi(A)\}$ の関係は、構造物部材の疲労寿命 T をパラメーターとして定まつてくる。また、構造物が疲労設計される場合には、構造物に作用する荷重の頻度分布と、構造材料の $S-N-P(N)$ 関係がわかつていれば、この両者より得られる疲労破壊の確率 $P(N)\{1 - \psi(A)\}$ は、安全度 $\xi(1/A)$ 、寿命 T をパラメーターとして部材断面を決定することになる。これが変動応力下の構造物疲労設計の基本方式である。

この基本方式に準じて、著者の1人⁹⁾は、かつて変動応力下の構造物寿命の推定法、および疲労設計法について、 $A=1$ を疲労破壊条件とし、腐食・摩耗等による有効断面積減少を考慮し、そのため一般にくり返し応力の上下限値とも経年変化する(従つて変動応力の性質が異なつてくる)などのかなり実情に近い条件下で論じたが、それにはお荷重のばらつき、 A 値の考え方にも不十分な点があつた。本文では、取扱いを容易にするために変動応力の性質の経年変化を無視して、これらの不十分な点を補なつた研究を行なつている。

3. 疲労(破壊)度 A の分布法則

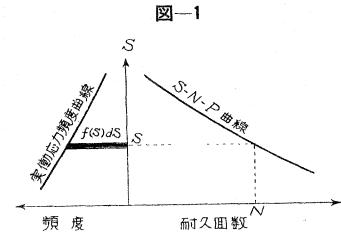
前節に述べたように、疲労度 A には相当なばらつきが予想されるが、その分布法則を求めるには、 N および n のばらつきの知識が基礎となる。 N のばらつきには従来の研究^{10), 11)}によると対数正規分布がよく適合するようであるが、ここではその分布法則にまでは触れないで単に確率レベル $P(N)$ をもつてばらつきを代表せしめておく。これに対して荷重のばらつきは次の通りである。

(1) 橋に作用する活荷重のばらつき

橋本来の機能上最も重要なものとして自動車荷重、および列車荷重をとり上げる。自動車荷重のばらつきを表わすには、輪荷重には指数分布的に変化する有限分布が、総重量、特に大型車のそれには正規分布、あるいは Pearson 系第I型分布が好都合のようである^{12), 13)}。また列車荷重に対しては、輪荷重には正規分布¹⁴⁾、あるいは上下限値を考えて Pearson 系第II型分布をあてはめることができる⁹⁾。これらはいずれも変量のばらつき全体をおおつて適用される分布法則であるが、これに対して構造物の安全性を支配するばらつきの上限付近のみよりなる部分母集団を注目して、それに解析上有利な分布関数をあてはめるのが好都合な場合が多い。このような部分母集団は一般に指數型の分布を示し、指數分布、あるいは上述の有限分布を用いうる。

(2) A の分布法則

a) 作用応力頻度分布が有限分布で表わされる場合 応力レベルを S で表わすと、そのばらつきが有限分布に従う場合の確率密度関数 $f(S)$ は次の通りである。



$$f(S) = \frac{k}{w} \left(1 - \frac{S}{w}\right)^{k-1}, \quad 0 < S < w \quad \dots \dots \dots \dots (1)$$

また、各 $P(N)$ に対する $S-N$ 関係は両対数グラフ上で平行直線群を形成すると仮定すると、ある $P(N)$ に對して $S-N$ 関係は次式で表わされる。

$$N = N_0 (S_0/S)^\theta = N_0 S_0^\theta S^{-\theta} \quad \dots \dots \dots \dots (2)$$

ただし、式 (1) および (2) で w は S の上限値、 k は定数、 S_0 、 N_0 はそれぞれくり返し応力下限値をきめたときに定まる $S-N-P$ 曲線上のある 1 点に対応する応力レベルと耐久回数を示す。また θ は両対数グラフ上で $S-N-P$ 関係を直線とみなしたときの勾配の逆数を示す。

1 日の交通量を Q とすると、 T 年間に応力レベル S をふくむ ds 区間に落ちる応力生起数 n_1 は、

$$n_1 = 365 T Q f(S) ds \quad \dots \dots \dots \dots (3)$$

となる。この n_1 のばらつきは Q のそれに依存するが、ここで Q は正規分布に従うと仮定し、その平均値および分散をそれぞれ m_Q 、 σ_Q^2 とすると、 S 、 $P(N)$ を固定した現在、 N は常数と考えてよいから、 n_1/N の分布は正規分布となり、これに従う確率変数の和として $\mathcal{Z}\left(\frac{n}{N}\right) = A$ の分布もまた正規分布となり、平均値、および分散は次の通りである。

$$\left. \begin{aligned} m_A &= \int_0^w \frac{365 T m_Q f(S)}{N} dS = \frac{365 k w^\theta T m_Q}{N_0 S_0^\theta} B(\theta+1, k) \\ \sigma^2_A &= \int_0^w \left\{ \frac{365 T \sigma_Q f(S)}{N} \right\}^2 dS = \left(\frac{365 T \sigma_Q k}{N_0 S_0^\theta} \right)^2 w^{2\theta-1} B(2\theta+1, 2k-1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots (4)$$

従つて A はパラメータが式 (4) で表わされる正規分布で近似せしめうことになる。従つてまた $S-N-P$ 曲線の非超過の確率 $P(N)$ と、この正規分布の A 以上の疲労度を生ずる確率 $1 - \Psi(A)$ の積が、寿命 T 年で A 以上の疲労度を生ずる確率を与える。

b) 作用応力頻度分布が指數分布で表わされる場合 S の確率密度関数 $f(S)$ は次式で与えられる。

$$f(S) = \lambda e^{-\lambda S} \quad \dots \dots \dots \dots (5)$$

ここに λ はパラメーターである。a) と同様にして、式 (4) に対応して次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} m_A &= \frac{365 T m_Q}{N_0 S_0^\theta \lambda^\theta} \Gamma(\theta+1) \\ \sigma^2_A &= \left(\frac{365 T \sigma_Q}{N_0 S_0^\theta} \right)^2 \frac{1}{2^{2\theta+1} \lambda^{2\theta-1}} \Gamma(2\theta+1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots (6)$$

4. 疲労設計の試案

(1) 基本式

3, (2), a), b) ではいずれも変動応力のばらつき $f(S)$ が既知であることを前提としているが、構造物の設計時には荷重 G の分布が知られているのみである。いま応力と荷重との関係を (応力)/(荷重) = C で表わすと、 C は軸方向力部材では断面積の逆数に、曲げ部材では断面係数の逆数に定数を乗じたものになる。

この C を導入すると、荷重のばらつきが有限分布 :

$$f(G) = \frac{k}{w_G} \left(1 - \frac{G}{w_G}\right)^{k-1}, \quad 0 < G < w_G$$

で示されるときは、 $S = CG$ を考慮して応力 S の確率密度関数として次式が得られる。

$$f_1(S) = f(G) \frac{dG}{dS} = \frac{1}{C} f\left(\frac{S}{C}\right) = \frac{k}{C w_G} \left(1 - \frac{S}{C w_G}\right)^{k-1}$$

従つて、式 (4) より、

$$\left. \begin{aligned} m_A &= \frac{365 k w^\theta C^\theta T m_Q}{N_0 S_0^\theta} B(\theta+1, k) \\ \sigma^2_A &= \left(\frac{365 T \sigma_Q k}{N_0 S_0^\theta} \right)^2 (C w_G)^{2\theta-1} B(2\theta+1, 2k-1) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots \dots (7)$$

そこで確率レベル $P(N) \{1 - \Psi(A)\}$ において、 $1 - \Psi(A)$ を与えられた客観条件に応じて経済的、政策的考慮から定めると、これに対応する A がえられる。すなわち、与えられた確率 [1 - Ψ に相当] に対して正規化変数 $t [= (A - m_A)/\sigma_A]$ が求まると、式 (7) を用いて、

$$\left. \begin{aligned} A &= m_A + \sigma_A t = \rho_1 C^{\theta_1} T + \rho_2 C^{\theta_2} T \\ \text{ここに, } \quad \rho_1 &= 365 k w_G^\theta m_Q B(\theta+1, k) / N_0 S_0^\theta, \\ \rho_2 &= 365 k w_G^{\frac{2\theta-1}{2}} \sigma_Q t \sqrt{B(2\theta+1, 2k-1)} / N_0 S_0^\theta \\ \theta_1 &= \theta, \quad \theta_2 = (2\theta-1)/2 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

A , N_0 , S_0 , および θ は実験的に求められるから, 所要寿命 T , 疲労破壊確率 $P(N)[1-\Psi(A)]$, および観測より得られる m_Q , σ_Q , k , および w_G を用いて C が定まる。 C の値を適当に注目構造部材の構造特性に応じて設計断面諸量に変換してゆけばよいことになる。

なお, 荷重と応力の対応が 1:1 であるとしたが, 実際には連行荷重等のようにこのような対応が成立しないことが多いから, 荷重の頻度分布としてそれを考慮に入れた等価荷重頻度分布を考えるか, あるいは, 同類の構造物における実働応力の実測結果から応力のばらつきを推定してやる必要がある。いずれにしても, 実用上は $C \sim P(N)[1-\Psi(A)] \sim A \sim T$ の関係を前もって計算しておくことが必要である。

(2) 例題

橋において構造上弱点となるリベット, あるいはボルト締手部に注目し, これに有孔試験片の疲労試験結果を適用して, その疲労寿命を推定する計算例を道路橋について示す。ただし, 死荷重応力は無視しうるほど小さいものと仮定する。従つて実働応力は近似的に片振応力として作用するものと仮定している。なお鉄道橋の場合は取扱いが全く同様であり, また計算結果によつて両橋種の疲労性状を定量的に比較することは困難であるから, ここでは鉄道橋の場合の計算例は省略した。

a) 有孔材の疲労強度 小西, 篠塚両氏による SS 41 材の有孔試験片の疲労試験結果¹⁸⁾によると, 片振引張応力の場合の時間強度は, $N_0=10^5$ に対し, $P(N_0)=0.05, 0.5, 0.95$ の各場合, それぞれ $S_0=24.6, 26.6, 27.5 \text{ kg/mm}^2$ となる。また $\theta=7.150$ である。

b) 荷重頻度分布 道路橋において活荷重応力くり返しを顕著に受ける部材は, 床組などのように輪荷重によつて最大応力が 1:1 に生ずる部材と考えてよい。輪荷重頻度分布は都市間連絡路線におけるものの典型として, 昭和 30 年 11 月から 31 年 1 月にかけて近畿地建が普通トラックおよび大型トラックの積荷車を主対象に行なつた観測結果¹⁹⁾に小型車輪荷重頻度分布を補なつてモデル化したもの用いる。これに有限分布をあてはめると, 密度関数は次のようなになる。すなわち, $w_G=8.0 \text{ t}$, $k=5.0$ となり, 輪荷重 G を単位 t で表わすと,

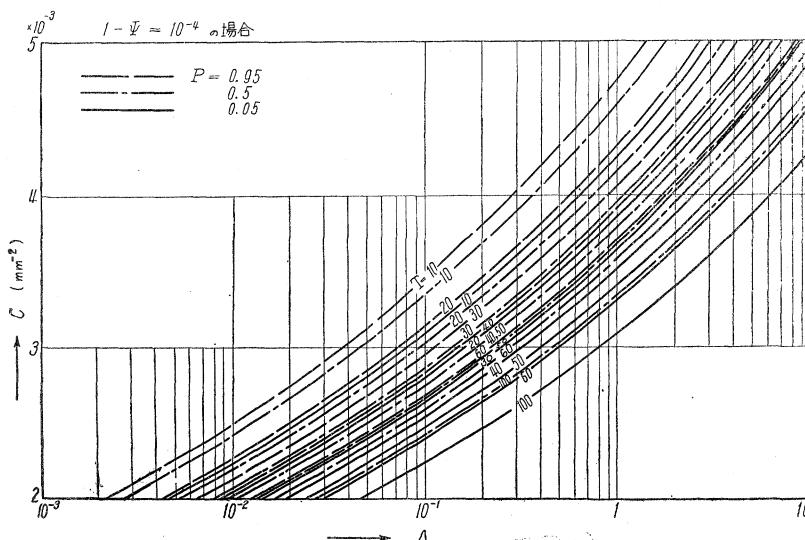
$$f(G)=0.625(1-0.125G)^4 \quad (9)$$

となる。また, Q のばらつきとしては $M_Q=2000/\text{日}$, $\sigma_Q=300$ を用いるものとする。

c) 計算 荷重のばらつきが式 (9) に従う場合は, 式 (7) がそのまま成立する。これに a) および b) の特性値を用いると, A の平均値および標準偏差は, $P(N)=0.05, 0.5, 0.95$ の各場合に対して次のようになる。

$$P(N)=0.05; N_0=10^5; S_0=24.6 \text{ kg/mm}^2, m_A=7.8256 \times 10^{15} C^{7.15} T; \sigma_A=1.9242 \times 10^{13} C^{6.65} T \quad (10)$$

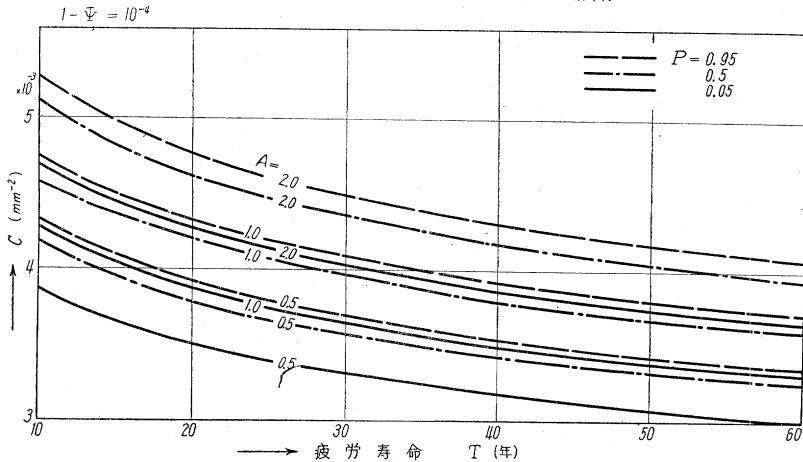
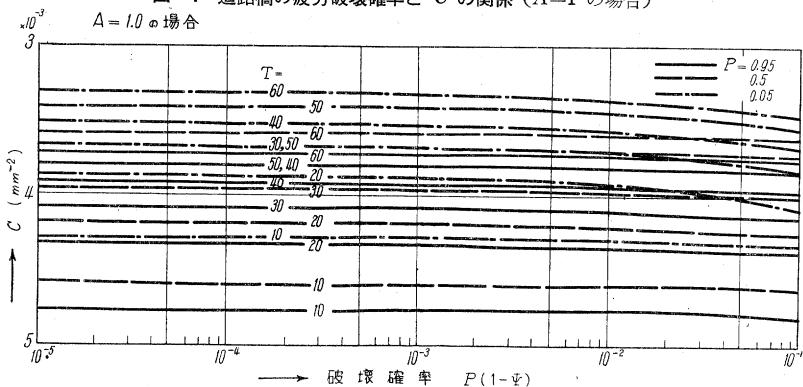
図-2 道路橋の $A \sim C$ 関係



$$\begin{aligned} P(N) &= 0.5; \quad N_0 = 10^5; \quad S_0 = 26.6 \text{ kg/mm}^2, \\ m_A &= 4.4749 \times 10^{15} C^{7.15} T; \quad \sigma_A = 1.1004 \times 10^{13} C^{6.65} T \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(N) &= 0.95; \quad N_0 = 10^5; \quad S_0 = 27.5 \text{ kg/mm}^2, \\ m_A &= 3.5279 \times 10^{15} C^{7.15} T; \quad \sigma_A = 8.6749 \times 10^{12} C^{6.65} T \quad (12) \end{aligned}$$

式(8), (10), (11), および (12) によつて, T , $P(N)$, $1-\Psi(A)$ をパラメーターとして $A \sim C$ 関係を求めることが可能

図-3 道路橋の $T \sim C$ 関係 ($1-\Psi = 10^{-4}$ の場合)図-4 道路橋の疲労破壊確率と C の関係 ($A=1.0$ の場合)

(3) 道路橋の疲労特性の考察

以上えられた結果を考察すると次のように総括されよう。

- (i) 式(8)より明らかなように、 C のわずかの変動によって疲労度 A は著しい影響を受ける。
- (ii) 図-3 より、 T の増加につれて曲線の勾配は緩となる。従つて設計寿命がある程度以上大であれば、設計寿命の延長による断面積増加はごくわずかですむことになる。また各曲線は相互に平行となるとみなされるから、 $P(N)$ 、 A を一定値にえらぶと、疲労破壊の確率の変化による C の変化量は寿命に関係せずほぼ一定であることがわかる。
- (iii) 図-4 より、 $P(N)$ 、 A 、および T を一定値に選ぶと、疲労破壊確率を 10^{-3} 以下にしても C はほとんど変わらない。

以上の諸点は鉄道橋の場合にも定性的に同様に適用されるものと思われる。

なお参考までに従来慣用の静的設計による C の値を求めてみると、最大輪荷重 8 t に対して許容応力 1300 kg/cm^2 が対応するよう断面設計を行なうと、 $C = 1.625 \times 10^{-3} \text{ mm}^3$ となる。破壊条件 $A=1$ の場合には、図-2 よりこの C に対しては $T \geq 100$ 年と推定され、われわれが期待する耐用年限内での疲労破壊の心配は全くないとしてよい。

5. 疲労設計の試案（部材断面積が経年減少する場合）

(1) 概 説

4.においては、設計時の断面積が耐用年限を通じて保持される場合を論じたが、われわれが対象とする構造物の耐用年限内ではこのような状態での疲労破壊は、前節でも示されたようにまず全く問題にならないとみてよく、実際問題としては、なにかの原因で有効断面積が経年減少する場合が重要となる。現に友永博士の報告³⁾によると、国鉄羽越本線第2最上川橋および北陸本線黒部川橋のシェドラー・トラスのアイバーは、腐食によつてそ

る。その一例として、 $1-\Psi(A)=10^{-4}$ の場合の計算結果を図示すれば図-2 の通りである。 $1-\Psi(A)$ を種々の値にとると同様の図が得られるが、それらにもとづき各曲線群より内挿によつて A 、 $P(N)$ 、 $1-\Psi(A)$ をパラメーターとした $T \sim C$ 関係が得られる。図-3 は $1-\Psi(A)=10^{-4}$ の場合を例示したものである。また A 、 P 、 T をパラメーターとして $P(N)$ 、 $(1-\Psi) \sim C$ 関係を図-4 に示した。

疲労設計を行なう場合には、与えられた A 、 $P(N)$ 、 $(1-\Psi)$ 、 T に対して図-3 より C が求められるから、これによつて部材断面積が決定されることになる。

それぞれ30および20%の断面減少を生じ、これが主原因となって架設後約40年を経過して、推定列車通過回数それぞれ66および58万回で疲労破断を生じている。部材有効断面積の減少は腐食、摩耗等によつて生ずるが、ここでは上記の例のあることを重視し、腐食による場合をとり上げる。

腐食量は、鋼材の品質、一構造物内の部材使用位置、自然的・人為的環境、防錆処理の良否など、多数の要因に左右され、それが疲労破壊の確率におよぼす影響もかなり大なるものがあると考えられるが、実際問題としてその定量化の困難な現状にあつては、腐食量に関しては平均値的な取扱いを行なうにとどめ、そなへつきまでは考えないことにする。従つて本節では腐食量を疲労設計の際にいかなる形で導入するかを明らかにすることに重点を置いて論ずる。

腐食の問題に関しては従来、かなりの研究が行われているようであり、わが国においても構造物の安全性と直接的関連を有する二、三の研究^{16), 17)}があるが、それより、腐食進行速度に関する結論が導かれる。すなわち、時間 T (年)に対する錆の進入距離を Δt とすると、鋼材などの場合には

$$\Delta t = \beta T + r \quad \dots \dots \dots \quad (13)$$

なる関係が一般に考えられている。この関係を示す一例として 図-5 は米国 Kearny 工業地帯の工業廃気中での金属腐食量の測定資料¹⁸⁾を掲げたもので、 L 曲線は A-7 鋼、他は各種合金鋼に対するものである。このように普通鋼材では発錆時に錆は急激に成長する傾向があつて、上式の r はそれを補正するための常数である。長期間にわたる錆の進入距離を論ずる場合には $r=0$ として取扱つても差支えないと考えられる。

さて、上記の直線関係を用いるとして、それにふくまれる常数 β を定める必要があるが、前述のように腐食量は内的・外的の諸条件によつてはなはだしい変動があることを考慮すると、 $\beta = 10^{-1} \sim 10^{-3}$ mm/年 程度に選べば十分なようである。参考までに山田氏の計算例¹⁶⁾によると、化学工業地帯の建物の屋外柱脚部分で 6.7×10^{-2} mm/年；東京一般市街地建物の屋外柱脚部分で 1.7×10^{-2} mm/年 なる値が得られている。

(2) 基 础 式

a) 単純引張圧縮部材 矩形断面 $d_1 \times d_2$ を考えて、各面から腐食が進行するものとすると、もとの面積 $1/C_0 = d_1 \cdot d_2$ は T 年後には $1/C_T = \{d_1 - 2(r + \beta T)\}\{d_2 - 2(r + \beta T)\}$ となる。従つて

$$C_T = C_0 / \{1 - 2 C_0 (d_1 + d_2) (r + \beta T) + 4 C_0 (r + \beta T)^2\} \quad \dots \dots \dots \quad (14)$$

これを式(8)の C に用いて、

$$A = \rho_1 \int_0^T C_T^{\theta_1} dT + \rho_2 \int_0^T C_T^{\theta_2} dT = \sum_{i=1}^2 \rho_i C_0^{\theta_i} \int_0^T dT / [1 - 2 C_0 (d_1 + d_2) (r + \beta T) + 4 C_0 (r + \beta T)^2]^{\theta_i}$$

ここで被積分関数の分母第3項は他の項に比して十分小さいので無視すると、次のようになる。

$$A = \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_i}{[2 \beta (d_1 + d_2)]^{\theta_i}} [u^{1-\theta_i}]_{u_2}^{u_1}, \quad u_1 = \frac{1 - 2 C_0 (d_1 + d_2) r}{2 C_0 (d_1 + d_2) \beta}, \quad u_2 = u_1 - T \quad \dots \dots \dots \quad (15)$$

b) 曲げ部材 I型断面の曲げ部材を考える。断面2次モーメントはウェブに直角な重心軸に関して近似的に、

$$I = t_w h^3 / 12 + A_0 y_0^2 + A_u y_u^2$$

となる。ただし t_w, h はそれぞれウェブの厚さおよび高さ、 $A_0, y_0; A_u, y_u$ はそれぞれ上、下フランジの断面積および縁端距離である。

さて、前述の係数 C は、単純バリの場合、单一換算集中荷重 W_e を用いると、下フランジの縁応力を考えて、

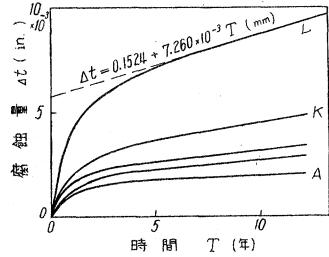
$$C = \frac{S}{W_e} = ly_u / 4 \left(\frac{t_w h^3}{12} + t_0 b_0 y_0^2 + t_u b_u y_u^2 \right)$$

となる。ここで $b_0, b_u; t_0, t_u$ はそれぞれ上、下フランジの幅、および厚さ、 l はスパンである。 t_0, t_u 以外の各断面要素の腐食による寸法減少は、 t_0, t_u のそれに比して曲げ応力に与える影響は小であるから、これらを T に対して定数と考えると、建設時および T 年経過後の C はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= K_1 / (K_2 + K_3 t_0 + K_4 t_u), \\ C_T &= C_0 K_1 / \{K_1 - 2(r + \beta T) C_0 (K_3 + K_4)\} \\ K_1 &= ly_u / 4, \quad K_2 = t_w h^3 / 12, \quad K_3 = b_0 y_0^2, \quad K_4 = b_u y_u^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots \quad (16)$$

ここに

図-5 工業廃気内における鋼の時間一腐食量関係の一例(米国 Kearny, N.J.)



となる。式(16)を用いると、式(8)のAは次のようになる。

$$A = \sum_{i=1}^2 \rho_i \int_0^T C_r^{\theta i} dT = \sum_{i=1}^2 \frac{\rho_i (K_1 C_0)^{\theta i}}{2\beta C_0 (K_3 + K_4)(1-\theta_i)} [\{K_1 - 2r C_0 (K_3 + K_4)\}^{1-\theta_i} - \{K_1 - 2C_0 (K_3 + K_4)(r + \beta T)\}^{1-\theta_i}] \quad (17)$$

(3) 例題

4.(2)と同様の条件のもとに腐食を考慮した場合の計算例を示し、腐食による断面減少の影響を明らかにする。なお、曲げ部材の場合も本質的には同様であるが、それに関する詳しい機会に鉄道橋の疲労を論ずる場合に詳説するとして、ここでは単純引張圧縮材の場合だけを述べる。

建設時の断面積を荷重上限値 $w=8t$ に対して応力 13 kg/mm^2 が対応するように定めるものとすると、 $C_0 = 13/8000 = 1.625 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$ となり、簡単に部材断面を d^2 の正方形とすると $d = \sqrt{1/C_0} = 24.807 \text{ mm}$ となる。

さて、特に腐食による断面積減少が疲労度の累積におよぼす影響のみをとりあげて論ずるには、Aの平均値の経年変化状況を知れば十分であり、従つて式(15)で $i=1$ の項のみを用いて A, T, β 関係を求めればよいことになる。 $\beta = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} \text{ mm/year}$; $r=0$ において求めたAを図示すると図-6の通りである。図中比較の意味で式(7)の m_A の計算結果を $\beta=0$ 線で示した。

(4) 計算結果の考察

本計算例に用いた部材は現行鋼道路橋設計示方書によつて設計されるものにくらべて、死荷重応力を無視しているため、いわゆる安全率はやや低くなつてゐるが、このような部材に対しては図-6より明らかなように、 $A=1$ を疲労破壊条件とすれば $\beta=0.1 \text{ mm/year}$ 程度の相当はげしい腐食を受ける場合には 50 年以下で破壊が生じ、 $\beta=10^{-2} \text{ mm/year}$ 程度では 300 年強の寿命を有することがわかる。 $\beta=10^{-3} \text{ mm/year}$ 程度以下となれば腐食の有無にかかわらず、われわれが常識的に期待する耐用年限内の疲労破壊は全く生じないと考えてよい。

このような腐食による疲労破壊に備えるための一つの対策として断面積の割増しを行なうことが考えられる。以下にその率を求めてみよう。式(15)の $i=1$ のみの項で、 $A=1$, $d_1=d_2=d$, $C_0=1/d^2$ とおくと

$$1 = \frac{\rho_1}{(4\beta d)^{\theta}(1-\theta)} \left\{ \left(\frac{d}{4\beta}\right)^{1-\theta} - \left(\frac{d}{4\beta} - T\right)^{1-\theta} \right\}$$

となる。従つて与えられた耐用年限 T および客観条件より割出された β に対して断面寸法 d が定まる。図-7 に $T=100$ 年の場合の β と d の関係を示した。また、これと腐食のない場合に $T=100$ 年および $A=1$ なるような寸法 d_0 を式(7)の上式より求め、 d/d_0 および $(d/d_0)^2$ を求めて同図中に示した。 d/d_0 -線は断面寸法の β に対する割増し率を示し、 $(d/d_0)^2$ -線は断面積のそれを示している。後者から明らかなように、腐食速度の増加につれて所要断面積は加速的に増大する。

6. 結言

変動応力を受ける構造物の巨視的な意味での疲労破壊の確率を、いわゆる Miner の法則にもとづいて近似的に評価することに始まり、腐食のない基礎的な場合と、腐食を生ずる実際的な場合についての疲労設計の問題を

図-6 腐食が疲労度、累積におよぼす影響

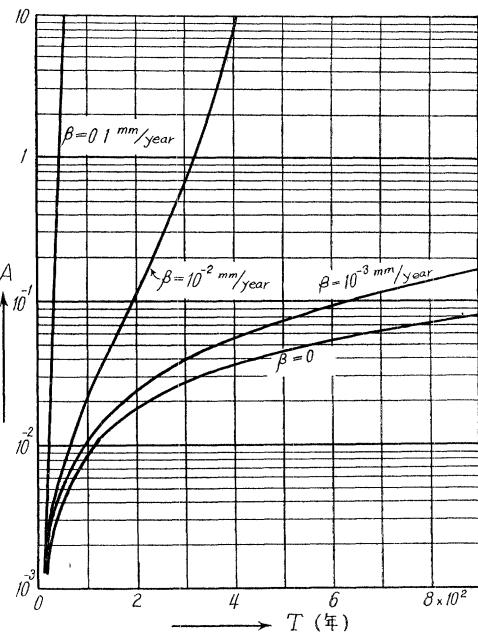
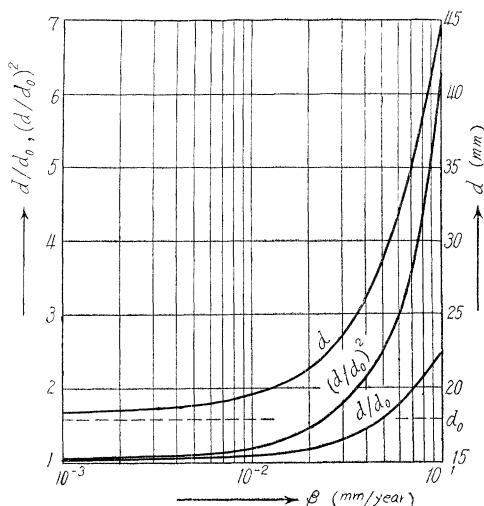


図-7 腐食に対する断面寸法の割増し（耐用年限 100 年の場合）



例題を混えて論じた。前者では疲労設計法の一般的方式を、後者では腐食による断面減少の影響を疲労設計にいかに導入するかを重点的に論じている。道路橋についての計算例では、腐食のない場合は疲労破壊はわれわれの有する常識的耐用年限内では全く生起しないと考えられるが、特にはげしい腐食を受ける場合は常識的耐用年限内でも十分疲労破壊を生ずることが示されたが、活荷重応力比が大で、かつ、設計応力に近い応力が常時発生する鉄道橋では道路橋より不利な条件が備わっていることとなり、橋、特に鉄道橋における疲労設計の重要性、並びにこれに関連して橋の保守の必要性がますます痛感されるわけである。この鉄道橋の疲労設計の問題に関しては別の機会に発表する予定である。

なお、部材が腐食を受けると応力集中係数が不利な方向に変化することが予想されるが、その定量化が困難な現状にあるのでここでは一応無視されている。しかし、特に考慮する必要がある場合はこれを β にふくめて処理するのも一つの方法であろう。

本研究は著者の一人が文部省内地研究員として、京大 小西一郎教授の御指導を受けて得た研究成果の一部である。また同学 岩井重久教授より研究上適切な御助言を賜わつた。ここに各位に深謝する次第です。

参考文献その他

- 1) Rope J.A., B.K. Foster, N.T. Bloomer : A Survey of the Problem of Limited Life Design, Civil Engineering and Public Works Review, Vol. 51, No. 604, pp. 1129~1131 (Oct. 1956)
- 2) 友永和夫: 鉄道橋の保守並ひに補強法について、土木学会夏期講習会パンフレット(Ⅱ) 橋梁, pp. 53~73 (昭26~8月)
- 3) 友永和夫: 鉄道橋梁における欠陥とその対策、構造物の破損、欠陥とその対策に関する研究発表会講演概要, pp. 39~63 (昭32~9月)
- 4) 例えば、河本 実 重複線返し応力および繰返し変動応力に対する疲労強度、金属の疲労強度と安全設計、日本材料試験協会講習会資料, pp. 96~130 (昭29)
- 5) Miner, M.A. : Cumulative Damage in Fatigue, J. Applied Mechanics, Vol. 12, No. 3, A-159~164 (Sept. 1945)
なお Miner の法則と名付けられているか、同様の考えはすでに 1924 年に Palmgren (Z. VDI, S. 339, 1924) によつてなされてゐる。
- 6) 材料試験 (実働荷重による疲労特集号), Vol. 8, No. 72 (昭34~9)
- 7) Freudenthal A.M. : The Safety of Structures, Proc. ASCE, Vol. 71, No. 8, pp. 1157~1191 (Oct. 1945)
- 8) 他田哲夫: 構造物の安全率と破損の確率、土木学会誌, 40巻, 5号, pp. 30~35 (昭30~5月)
- 9) 西村 昭: 線返し荷重下の構造物寿命の推算法について、土木学会誌, 40巻, 12号, pp. 13~18 (昭30~12月)
- 10) 横堀武夫: 材料強度学, 技報堂, p. 182 (昭30)
- 11) Freudenthal, A.M. : Planning and Interpretation of Fatigue Tests, ASTM, STP No. 121, pp. 3~13 (1952)
- 12) 西村 昭: 自動車輪荷重計の試作と輪荷重頻度分布について、土木学会論文集, 第64号, pp. 78~87 (昭34~9月)
- 13) 西村 道: 道路橋における荷重及び応力のはらつきについて、土木学会第14回年次講演会 (昭34~6月)
- 14) Komishi, I., 他8氏: Studies of Fatigued Railway Rails, Part II : Measure of Rail Fatigue and Estimation of Rail Life, Technical Reports of the Engg. Res. Inst., Kyoto Univ., Vol. 8, No. 1, Report No. 41 (Feb. 1958)
- 15) 篠塚正宣: 鋼の疲労破壊の統計的研究、材料試験, 4巻, 25号, pp. 433~439 (昭30~9月)
- 16) 山田水城: 建築物の耐久計画に関する研究 (その6) (鉄筋構造物の耐久計画——総論), 日本建築学会論文報告集, 第57号, pp. 217~220 (昭32~7月)
- 17) 山田水城、脇義雄、下村敏雄: 建築物の耐久計画に関する研究 (その7) (鉄筋構造物の耐久計画——実験、調査), 日本建築学会論文報告集, 第57号, pp. 221~224 (昭32~7)
- 18) Priest, H.M. and J.A. Gulligan : Design Manual for High-Strength Steels, US Steel Corporation, p. 5 (1956)

(昭34.8.25)

土木学会論文集 第66号・別冊(1~1) 正誤表

正員 飯吉精一: 橋梁基礎工の掘削、沈下作業の理論的考察

ページ	行	誤	正
2	表-3 の内 下から 2	塑性土	粘性土
3	上から 5	I, $\phi < 45^\circ$ のもの	I, $\phi > 45^\circ$ のもの
"	" 7	$C = 0.15 \sim 0.40^\circ$	$C = 0.15 \sim 0.40^\circ$
8	下から 9	壁面摩擦力を F_a 減少	壁面摩擦力を F_a 減少
"	" 16	剛性力のような土と	剛性土のような土と
16	上から 13	($a = 0.3 \sim 0.9$ 程度)	($a = 0.8 \sim 0.9$ 程度)
"	下から 10	井筒によりては	井筒においては
18	" 7	$(Ka - Kd) h^2$	$(Ka - Kd) h^2$
"	" 6	$(Ka - Kd) h^2$	$(Ka - Kd) h^2$
20	上から 2	土の息角は静止中	土の息角は静水中
28	" 5	圧は土質による	圧は土質による
33	" 4	$Q_4 = 1.0 A$	$Q_4 = 0.1 A$