

平板のクラック周辺の曲げ応力の集中について

正員 能 町 純 雄*

ON STRESS CONCENTRATION IN THE VICINITY OF A CRACK OF BENDED THIN PLATE

By Dr. Eng. Sumio Nomachi, C.E. Member

Synopsis : To investigate the concentration of bending moments in the neighborhood of a crack, the case of a uniform bending on infinite thin plate with a straight crack of length $2a$ in it, is dealt with. The boundary values are determined by means of solving Dual's integral equation and both of bending and torsional moments are expressed by simple formulas. As a result, isochromatic figures of both moments in the vicinity of the crack, are presented.

要 旨 平板のクラック周辺の曲げモーメントの状態を調べるため一様な曲げを無限域で受ける無限平板中に一個の有限長の直線クラックがある場合を解析する。一般解にふくまれる境界未知数を Dual の積分方程式によつて求め曲げモーメントとねじりモーメントの式を誘導した。最後にクラック周辺に曲げモーメントおよびねじりモーメントの集中する状況を曲げモーメントおよびねじりモーメントの等強度線図によつて示した。

1. 緒 言

二次元弾性論におけるクラック周辺の応力集中の問題は Inglis Kolosoff 等のだ円座標¹⁾による方法を始めとして Griffith, Westergaard, Sneddon 等の直角座標²⁾による研究等があり多彩であるが、平板の曲げに関しては Symonds, P.S. の研究³⁾のほかはほとんど行なわれていない。ここでは Sneddon の方法に従つてクラック周辺の曲げ応力を解析する。また一方平板内の塑性ヒンジを考えると、これらの塑性ヒンジは降伏条件を満足する最大曲げモーメントの所に生ずるはずであるから、この所ではせん断力が0であることを考えれば、初期の塑性ヒンジは極限曲げモーメントがそれに沿うて作用しているようなクラックと見なすことができると思われる。ゆえにこのクラック問題は平板の塑性ヒンジ近傍の応力分布に一つの手がかりを与えるであろう。

2. 微分方程式と境界条件

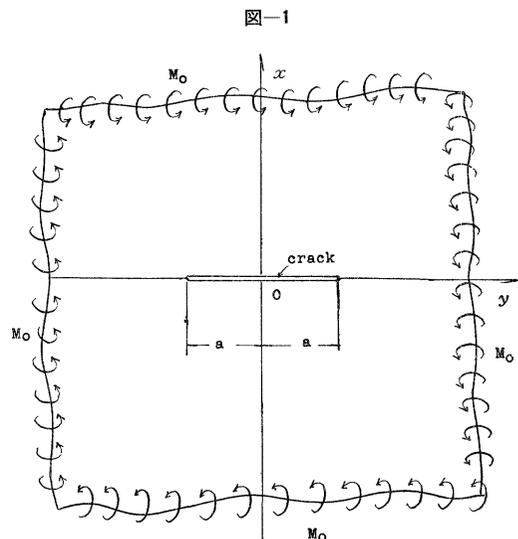
図—1 のように、あらゆる方向に等しい曲げモーメント M_0 を無限域で受ける無限板上に x, y 座標をとり y 軸上に原点を中心として $2a$ なる長さのクラックがあるとすればこの板の弾性挙動は x, y 軸に関してともに対称である。いま板のたわみを w とすれば釣合の方程式は

$$N \cdot \Delta^2 w = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ただし $N = Eh^3/12(1-\nu^2)$, N は板の曲げ剛さ, E は弾性係数, ν はポアソン比, h は厚さである。また $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ である。この場合の境界条件は板の弾性挙動が x, y 軸に関して対称であるから、クラック以外では x に関する奇数次微分は y 軸上で0となり、またクラックでは反力が存在しないので、

$$N \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} = 0 \quad (x=0) \dots\dots (2)$$

またクラックでは、曲げモーメントが存在せずその他の y 軸では Slope が存在しないから



* 工学博士, 室蘭工業大学教授, 工学部土木工学教室

$$\left. \begin{aligned} N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) &= 0 & |y| < a \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 & |y| > a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

3. たわみの式

次に $w = \int_0^\infty W \cos \lambda y d\lambda$

とおけば W は w の y に関する余弦変換であるが、上式を (1) 式に代入すれば

$$\frac{d^4 W}{dx^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \lambda^4 W = 0, \dots\dots\dots (4)$$

従つて

$$W = (A + B\lambda x)e^{-\lambda x}$$

板が無限遠で曲げモーメント M_0 を受けていることを考慮すれば、一般解は

$$w = -\frac{M_0}{N} \frac{x^2 + y^2}{2(1+\nu)} + \int_0^\infty (A + B\lambda x)e^{-\lambda x} \cos \lambda y d\lambda, \dots\dots\dots (5)$$

上式中第 2 項は x, y の無限大で消失し、第 1 項は等曲げモーメントを表わしている。また A, B は積分常数で (2), (3) 式から求まるが、まず (2) 式から

$$A(1-\nu) = -(1+\nu)B, \dots\dots\dots (6)$$

(3) 式は上の関係を考慮して次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty A \lambda^2 \cos \lambda y d\lambda &= \frac{M_0}{N} \frac{(1+\nu)}{(3+\nu)(1-\nu)}, & |y| < a \\ \int_0^\infty A \lambda \cos \lambda y d\lambda &= 0, & |y| > a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

上式中、 $y = a\eta, \xi = a\lambda, J_{-1/2}(\xi\eta) = \left(\frac{2}{\pi\xi\eta}\right)^{1/2} \cos(\xi\eta)$ の関係を用いれば

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty A \xi^{5/2} J_{-1/2}(\xi\eta) d\xi &= \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}} \frac{a^3 M_0}{N} \frac{1-\nu}{(3+\nu)(1-\nu)}, & |\eta| < 1 \\ \int_0^\infty A \xi^{3/2} J_{-1/2}(\xi\eta) d\xi &= 0, & |\eta| > 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

この式は Dual の積分方程式⁴⁾ で次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\infty \xi^\alpha f(\xi) J_\nu(\xi\eta) d\xi &= g(\eta) & |\eta| < 1 \\ \int_0^\infty f(\xi) J_\nu(\xi\eta) d\xi &= 0, & |\eta| > 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$f(\xi) = \frac{2^{-\alpha/2} \xi^{-\alpha}}{\Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)} \left[\xi^{(1+\alpha/2)} J_{\nu+\alpha/2}(\xi) \int_0^1 \lambda^{\nu+1} (1-\lambda^2)^{\alpha/2} g(\lambda) d\lambda + \int_0^1 u^{\nu+1} (1-u^2)^{\alpha/2} du \int_0^1 g(\lambda u) \cdot (\xi\lambda)^{2+\alpha/2} J_{\nu+1+\alpha/2}(\xi\lambda) d\lambda \right] \dots\dots\dots (10)$$

ゆゑに上式中、 $f(\xi) = \xi^{3/2}, \nu = -\frac{1}{2}, \alpha = 1,$

$$g(\eta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\eta}} \frac{a^3 M_0}{N} \frac{1-\nu}{(3+\nu)(1-\nu)},$$

とおいて整理すれば

$$A = \frac{\xi^{-2} M_0 a^3}{N} \frac{(1+\nu)}{(3+\nu)(1-\nu)} J_1(\xi)$$

この結果を (5) 式に代入して

$$w = -\frac{M_0}{N} \frac{x^2 + y^2}{2(1+\nu)} + \frac{M_0}{N} \frac{1}{(3+\nu)(1-\nu)} \int_0^\infty \lambda^{-2} \{1+\nu - (1-\nu)\lambda x\} e^{-\lambda x} J_1(a\lambda) \cos \lambda y d\lambda$$

4. 断面モーメント

x, y 方向の曲げモーメントは

$$M_x = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = M_0 - \frac{M_0 a}{(3+\nu)} \int_0^\infty \{3+\nu - (1+\nu)x\lambda\} e^{-\lambda x} J_1(a\lambda) \cos \lambda y d\lambda \dots\dots\dots(11)$$

$$M_y = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = M_0 + \frac{M_0 a}{3+\nu} \int_0^\infty (1-x\lambda) e^{-\lambda x} J_1(a\lambda) \cos \lambda y d\lambda \dots\dots\dots(12)$$

$$M_{xy} = -N(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{M_0 a}{3+\nu} \int_0^\infty \{2 - (1-\nu)x\lambda\} e^{-\lambda x} J_1(a\lambda) \sin \lambda y d\lambda \dots\dots\dots(13)$$

となる。ゆえに

$$\frac{M_x + M_y}{2} = M_0 + \frac{2 M_0 a (1+\nu)}{3+\nu} \int_0^\infty e^{-\lambda x} J_1(a\lambda) \cos \lambda y d\lambda,$$

$$\frac{M_x - M_y}{2} = -\frac{M_0 a}{3+\nu} \int_0^\infty \{2 - (1-\nu)x\lambda\} e^{-\lambda x} J_1(a\lambda) \cos \lambda y d\lambda,$$

従つて $x+yi=z$ とおけば最大ねじりモーメント M_t は

$$M_t = \frac{M_x - M_y}{2} + i M_{xy} = -\frac{M_0 a}{3+\nu} \int_0^\infty \{2 - (1-\nu)x\lambda\} e^{-z\lambda} \times j_1(a\lambda) d\lambda$$

となる。これは Hankel-Lipschitz⁵⁾ の公式により

$$M_t = -\frac{M_0}{3+\nu} \left\{ 2 - \frac{2z}{\sqrt{a^2+z^2}} - (1-\nu) \frac{xa^2}{(\sqrt{a^2+z^2})^3} \right\},$$

明らかに

$$\frac{M_x - M_y}{2} = R[M_t], \quad M_{xy} = I[M_t]$$

R は次に書いた関数の実部, I は次に書いた関数の虚部をとることを示す。いま $z-ia=r_1 e^{i\theta_1}$, $z+ia=r_2 e^{i\theta_2}$ とおけば

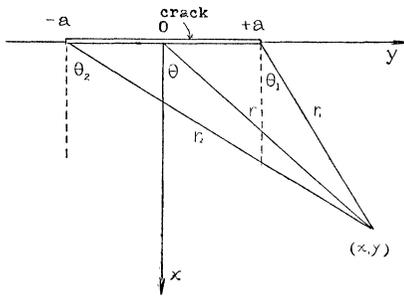
$$\frac{1}{2}(M_x - M_y) = \frac{2 M_0}{3+\nu} \left[\left\{ \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right) - 1 \right\} + \frac{1-\nu}{2} \frac{x}{a} \left(\frac{a^2}{r_1 r_2} \right)^{3/2} \cos \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right] \dots(14)$$

$$M_{xy} = -\frac{2 M_0}{3+\nu} \left[\left\{ \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \sin \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right) + \frac{(1-\nu)}{2} \frac{x}{a} \left(\frac{a^2}{r_1 r_2} \right)^{3/2} \sin \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\} \right] \dots\dots\dots(15)$$

また $\frac{1}{2}(M_x + M_y) = M_0 + \frac{M_0 a(1-\nu)}{3+\nu} R \left[\int_0^\infty J_1(a\lambda) e^{-\lambda z} d\lambda \right] = M_0 + \frac{M_0(1-\nu)}{3+\nu} R \left[1 - \frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} \right]$

$$\therefore \frac{1}{2}(M_x + M_y) = M_0 + \frac{M_0(1-\nu)}{3+\nu} \left\{ \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right) - 1 \right\}$$

図-2



これらを総合して

$$M_x = M_0 \left\{ \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right) + \frac{1-\nu}{3+\nu} \frac{x}{a} \left(\frac{a^2}{r_1 r_2} \right)^{3/2} \cos \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\}, \dots\dots\dots(16)$$

$$M_y = M_0 - \frac{M_0(1-\nu)}{3+\nu} \left\{ \frac{r}{\sqrt{r_1 r_2}} \cos \left(\theta - \frac{1}{2} \theta_1 - \frac{1}{2} \theta_2 \right) + \frac{x}{a} \left(\frac{a^2}{r_1 r_2} \right)^{3/2} \cos \frac{3}{2} (\theta_1 + \theta_2) \right\}, \dots\dots\dots(17)$$

y 軸上では

$$M_{xy} = \begin{cases} -\frac{2 M_0}{3+\nu} \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}} & |y| < a, \\ 0 & |y| > a. \end{cases} \dots(18)$$

$$M_x = \begin{cases} 0 & |y| < a, \\ M_0 \frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}} & |y| > a. \end{cases} \dots(19)$$

$$M_y = \begin{cases} M_0 & |y| < a, \\ M_0 \left(1 - \frac{1-\nu}{3+\nu} \frac{y}{\sqrt{y^2-a^2}} \right) & |y| > a. \end{cases} \dots(20)$$

4. 数 値 計 算

以上の M_x , M_{xy} 各公式を計算して図示すれば y 方向に関する分布は 図-3, 4 のようになり, クラックから離れるに従つて, 応力の集中が急激に減少することがわかる。クラックと同じ長さほど離れば, クラック

の影響がほとんどなくなる。図-5, 6 は M_x , M_{xy} の等強度曲線を表わしたものであるが、クラックの影響は局部的なものであることを良く示している。なお計算では $\nu=0.3$ とした。

図-3 x断面に関するy方向, M_x 線図

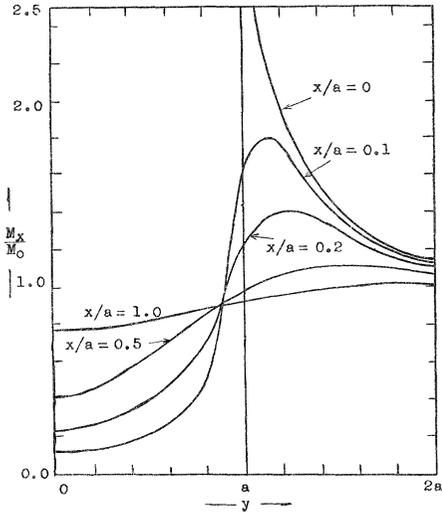


図-4 x断面に関するy方向, M_{xy} 線図

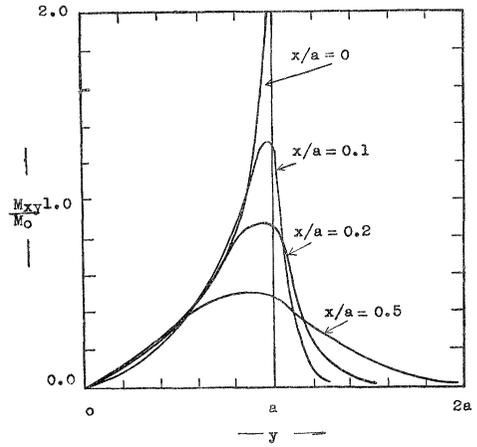


図-5 M_x 等強度曲線 (単位: M_0)

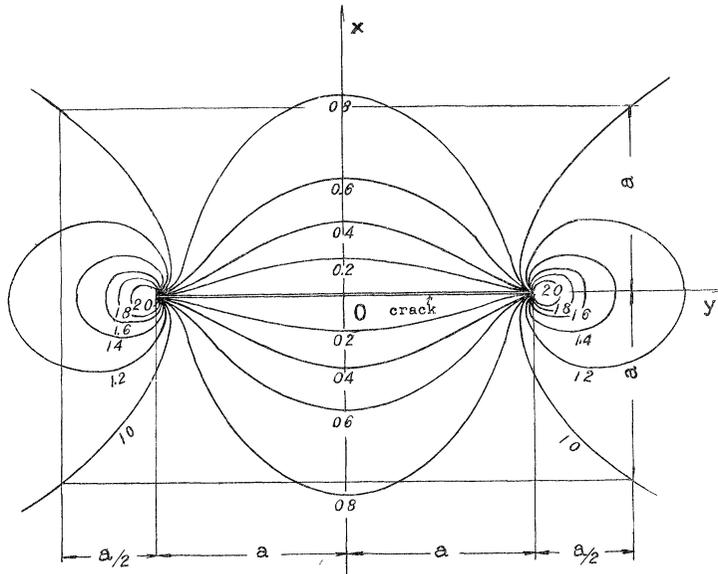
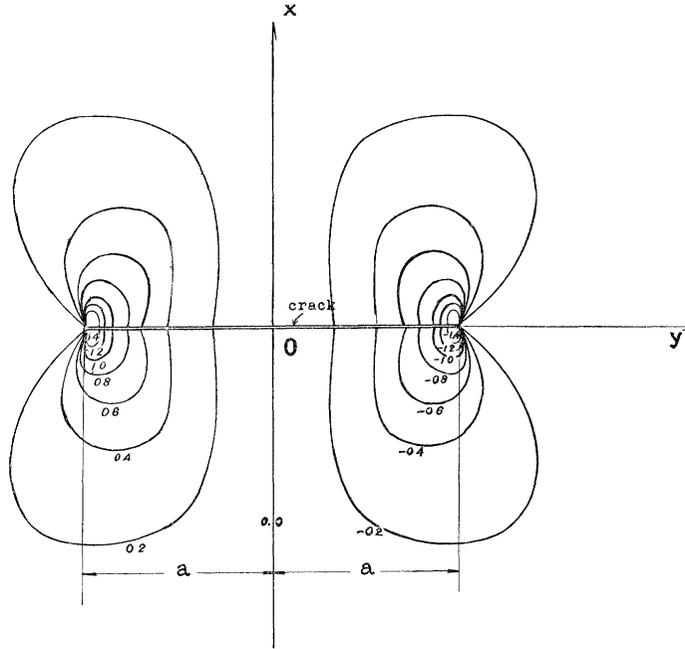


図-6 M_{xy} 等強度曲線 (単位: M_0)



5. 結 論

平板のクラック周辺における曲げ応力の集中は両端部にはげしく生じ、その状態は y に関し $1/3$ くらいは無
限大となる。しかしその積分値はたとえば M_x を例にとれば端部から ϵ の中では

$$\int_a^{a+\epsilon} M_x dy = \frac{M_0}{3} (\sqrt{y^2 - a^2})^3 \Big|_a^{a+\epsilon} = -\frac{M_0}{3} \sqrt{2\epsilon a - \epsilon^2} \dots\dots\dots(21)$$

となり有限な値となる。従つて鉄筋コンクリートの場合ならばこの ϵ 区間の鉄筋量が (21) 式の値にまさつて
おればクラックはこれ以上進行できないこととなるが、一様な脆性材料では端部からクラックが次第に増大する
ものと考えられる。

以上の解析方法は同一境界上に異なつた条件の境界をふくむ場合のその不連続点近傍の弾性状態を明らかにす
る有力な方法であつて、例えば単純支持辺中に自由辺がふくまれる場合、連続床板の中央支承の一部が欠けた場
合等の曲げの局所応力もこの方法で求めることができる。

参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S.: Theory of Elasticity, 4th. Ed., p. 197~204.
- 2) Sneddon, I.N. Fourier Transform, 1951, p. 422~431.
- 3) Symonds, P.S.: Concentrated-Force Problems in Plane Strain, Plane Stress, and Transverse Bending of Plates, Journal of Applied Mechanics, Sep. 1946. A-183.
- 4) Titchmarsh E.C.: Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 1937, p. 392
- 5) 応用数学便覧, p. 392