

跳水と潜り流出に関する二、三の研究

正員 河村 三郎*

SOME STUDIES ON THE HYDRAULIC JUMP AND THE SUBMERGED EFFLUX

By Saburō Kōmura, C.E. Member

Synopsis : In this paper, the author deals with the phenomena of hydraulic jump and submerged efflux. The experimental and the theoretical work are divided into four phases, the first of which derived the equation of sequent depth from continuity and momentum equations in sloping channels. In the second phase, the wave length and the amplitude of undular jump are analysed basing on the theory of cnoidal waves and shallow water waves of infinitely small amplitude, thus interesting results are obtained from the comparison between theories and experimental results. The third phase deals with relationship between the Froude number and the Reynolds number in jet flow of the jump front for different inclinations of channel bottom, and the author finds out an opposite tendency in comparing the above case with the Froude number and the Reynolds number in uniform flow without hydraulic jump for different inclinations of channel bottom. The last phase analyses the region of submerged efflux and the limit between the hydraulic jump and the submerged efflux.

要旨 本論文では跳水と潜り流出の現象を取扱い、傾斜水路における共軛水深の計算式を運動量方程式と連続方程式より求めた。つぎに波状跳水の波長と振幅についてクノイド波の理論と微小振幅浅水波理論により解析を行い、実験結果と比較して興味ある結果を得た。また跳水を生ぜしめたときの露出射流の Froude 数と Reynolds 数との関係を、跳水を生ぜしめず等流状態で流下したときの Froude 数と Reynolds 数との関係を比較して反対の傾向を有することを見出した。最後に跳水と潜り流出との限界、および潜り流出の発生領域を求めた。

1. 緒言

跳水現象は水理学における特異な現象として注目され跳水前後の共軛水深、跳水の長さ、表面渦の長さなどについて古来から多くの研究者により研究されてきた。その研究対象のほとんどは水平水路床上的での跳水現象を取扱っている。傾斜水路上の跳水を研究した主なるものは Kindsvater¹⁾ の水路床が比較的急な斜面から水平面に移る順傾斜水路における跳水の研究、Stevens²⁾、岡田・安芸³⁾ らの逆傾斜水路における跳水の研究がある。最近では水平および順傾斜水路における跳水を非常に広範囲にわたり実験を行つた Bradley : Peterka⁴⁾ らの研究、斜堤上での跳水発生の位置について実験を行い、理論と比較し、さらに跳水下流の洗掘に関して実験を行つた Bunyan⁵⁾ の研究などがある。また最近の水平水路における跳水の研究については de Mello Flôres⁶⁾ の跳水現象解析の一つの考え方としての共軛水深の計算式およびエネルギー計算式の提案、Rouse : Siao : Nagaratnam⁷⁾ らの Air flow model による跳水の乱れに関する研究、Ariemma⁸⁾ の跳水の大きさとエネルギー損失の新しい計算式についての研究などがある。本論文で取扱つた主要な項目は次の四項目である。

(1) 水路床が屈折点を持たない傾斜水路上の共軛水深の計算式を運動量方程式および連続式より求め、この共軛水深の計算式より跳水をともなつて流出する場合と射流のみが流出する場合との限界水深比を求めた。

(2) 傾斜水路上の跳水は多くの場合、波状跳水を生ずる。波状跳水の特性は表面渦を有せず下流に行くにしたがい振幅を減少する波の連続した水面を有するものである。Lemoine⁹⁾ は Favre¹⁰⁾ の波状段波についての実験結果より波長を計算し波のエネルギー輸送の関係から考察を加えている。Ippen : Harleman¹¹⁾ らは斜波状跳水の波形をクノイド波とみなし得るものと仮定して Boussinesq¹²⁾ によるクノイド波の理論により解析を行い、斜波状跳水の限界条件を求めている。京大、岩佐助教授¹³⁾ は波状跳水の限界条件をクノイド波の理論から求めている。

* 岐阜大学助手，工学部土木工学教室

る。しかしながら前述の二つの論文^{11), 13)}においては波状跳水の発生する限界条件のみについて解析がなされていて波長や振幅については、ぜんぜん解析がなされていない。そこで本論文ではクノイド波の理論と微小振幅浅水波理論より波状跳水の波長と振幅について解析を進める。

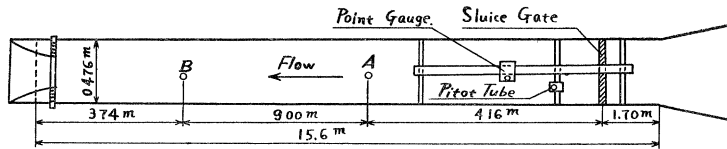
(3) 跳水前面の露出射流の特性については露出射流の Froude 数と Reynolds 数の関係を実験から求めて検討した。

(4) 河川および用水路などの水門設計においては、その水門からの流出が潜り流出であるか、跳水をともなつて流出するか、あるいは射流のみの流出であるかを知り得れば水門下流の水叩きおよび、その下流の洗掘防止などに有益な資料となる。本論文では潜り流出と跳水との限界および潜り流出の発生領域を求め、3.(1)で求めた射流発生領域の結果から潜り流出の発生領域、跳水の発生領域、射流の発生領域を求めた。

2. 実験装置と実験方法

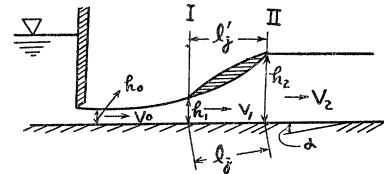
図一1のごとき勾配可変水路、長さ 15.60 m、幅 0.476 m、深さ 0.25 m 木製ベンキ仕上げ（一部分、両側壁はガラス壁）の水路上流部に制水門を設けて 1/1 000, 1/700, 1/500 の勾配について種々の流量を流下して跳水を生ぜしめ、次節に記述する各項目に必要な諸量を測定した。実験は制水門を上下して跳水を生ぜしめ跳水の終

図一1 Experimental apparatus, Plan. (Adjustable tilting type)



つた下流側は再び常流になるようにしなければならぬから、3.(1)に記述する射流領域の実験以外は 図一1の A, B 2 点の水深が一致するように下流端に設けられた水位調節板を上下して A, B 2 点の水深をポイントゲージと水路底に設けた静圧管により確実に一致させて実験を行った。水深の測定は 1/10 mm 読みポイントゲージ、流速の測定は外径 2 mm の N.P.L 型標準ピトー管を使用し、流量測定は循環水路中に設けられた検定済みの矩形堰を使用して測定した。

図一2 Definition sketch of hydraulic jump in sloping channel.



3. 理論および実験結果の考察

(1) 跳水の共軛水深

傾斜水路における跳水の共軛水深を運動量方程式と連続の方程式より求めよう。図一2における検査断面 I, II についての運動量方程式と連続の方程式はそれぞれ次式によつて表わされる。

$$(V_1 \cos \alpha - V_2 \cos \alpha) \omega_0 V_1 h_1 / g = P_2 \cos \alpha - P_1 \cos \alpha - P_3 \sin \alpha \dots\dots\dots (1)$$

$$(V_1 \sin \alpha - V_2 \sin \alpha) \omega_0 V_1 h_1 / g = P_3 \cos \alpha - P_1 \sin \alpha - P_2 \sin \alpha \dots\dots (2) \quad q = V_1 h_1 = V_2 h_2 \dots\dots\dots (3)$$

ここに ω_0 は水の単位体積の重量、 g は重力の加速度、 q は単位幅流量、 $P_1 = (\omega_0 h_1^2 \cos \alpha) / 2$,

$$P_2 = (\omega_0 h_2^2 \cos \alpha) / 2 \text{ である。} P_3 \text{ は断面 I} \sim \text{II 間における水路床上の水の重量を考へて、} P_3 = \omega_0 \int_0^{l'j} \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) dl'j$$

$$= \frac{\omega_0 l'j}{2} (h_1 + h_2) \text{ である。(1) 式と (2) 式により } P_3 \text{ を消去し (3) 式を使用して Froude 数の自乗 } (F_1 = V_1^2 / gh_1 = q^2 / gh_1^3) \text{ と } (h_2 / h_1) \text{ について整理し次式を得る。}$$

$$(h_2 / h_1)^3 - (\cos 2\alpha + 2 F_1 / \cos \alpha) (h_2 / h_1) + 2 F_1 / \cos \alpha \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{または } F_1 = \frac{\cos \alpha \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 - \cos 2\alpha \right]}{2 \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right) - 1 \right]} \dots\dots\dots (4)'$$

(4), (4)' 式において $\alpha = 0$ の場合は、それぞれ次式を得る。

$$(h_2 / h_1)^3 - (1 + 2 F_1) (h_2 / h_1) + 2 F_1 = 0 \dots\dots\dots (5) \quad \text{または、} F_1 = (h_2 / h_1) [(h_2 / h_1) + 1] / 2 \dots\dots\dots (5)'$$

(5), (5)' 式は水平水路における通常の跳水方程式、 $(h_2 / h_1) = (\sqrt{1 + 8 F_1} - 1) / 2$ に等しい。

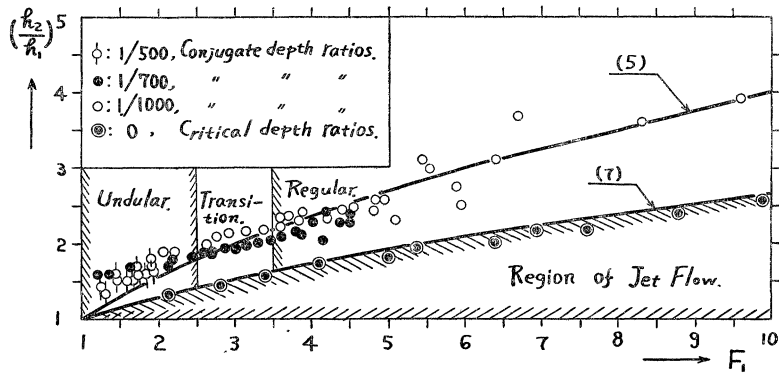
跳水の発生し得る限界水深比は (4) 式を (h_2 / h_1) について微分し次式を得る。

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)_c = \sqrt{\frac{\cos \alpha \cos 2\alpha + 2F_1}{3 \cos \alpha}} \dots\dots\dots (6)$$

$$\alpha=0 \text{ の場合は (7) 式を得る。 } (h_2/h_1)_c = \sqrt{(1+2F_1)/3} \dots\dots\dots (7)$$

実験の結果と (5) 式, (7) 式の関係を 図-3 に示した。傾斜水路上の跳水は緩勾配であれば, 水平水路上の跳水に近いことは予想されることであり, 勾配が 1/500 程度よりゆるやかな場合 $\cos \alpha \approx 1, \cos 2\alpha \approx 1$ と十分に見なしうから (4)' 式の代りに (5) 式を図中に記入した。実験結果はほぼ (5) 式を満足している。しかしな

図-3 Conjugate depth ratios, Critical depth ratios and classifications of jumps forms by use of kinetic flow factor.



から各勾配ごとについて考察すると実験値が (4)' 式または (5) 式を表わす曲線の上側にでてくる。これは F_1 が小さくなるに従い波動現象にともなう波頂の隆起により水深が増大したように測定されることと, 流速の測定が h_1 点で行われているため波状跳水を生ずると波動現象のため流速が遅く測定されることに原因がある。Undular jump の領域において特にこの傾向がいちじるしい。しかし, 流速の測定を h_0 点で行うときは Undular jump の領域でもほとんど (5) 式 (4)' 式に一致する。(7) 式の下側の領域は跳水を生ぜず射流のみとなつて流出する領域である。この領域を射流領域と呼ぶことにする。限界水深比に関する実験は水平水路 ($\alpha=0$) の場合にのみ行い, この実験は最初に跳水を生ぜしめておき, 次に水位調節板を徐々に下げて制水門下流が滑らかな射流となるようにして実験を行った。この時の F_1 と (h_2/h_1) の関係を 図-3 に示した。限界水深比の実験では h_2 の測定を B 点で行った。実験値と (7) 式の曲線と比較して見ると実験値が多少小さい限界水深比を示しているが, これは実験に際して跳水状態の流出から射流状態の流出へ移る限界の取り方によるものと思われるから, (7) 式は妥当なものと思なしてよい。図中の跳水に関する領域の分類は文献 11), 13), 14) を参考にして実験の結果から記入したものであり, $1 < F_1 < 2.5$ は Undular jump の領域, $2.5 < F_1 < 3.5$ は Undular jump から Regular jump に移る Transition の領域, $3.5 < F_1$ は Regular jump の領域である (理論的には文献 11), 13) によれば $F_1=3$ が Transition と Regular jump との限界である)。以下本論文では, 波状跳水という場合は Transition の領域を含んだ $1 < F_1 < 3.5$ の領域の跳水を指している。

(2) 波状跳水の波長と振幅

緒言で述べたごとくクノイド波と微小振幅浅水波理論により波状跳水の波長と振幅を解析するのであるが, クノイド波については Boussinesq¹²⁾ や Keulegan : Patterson¹³⁾らは自由表面の勾配および曲率を無視できないものと考え, これを考慮して流れの非回転性を仮定して波高のやや高い移動波(クノイド波)を解析している。岩佐助教授¹⁴⁾は流れを非回転性と仮定せずに自由表面の勾配や曲率に影響をおよぼす鉛直加速度を考慮した開水路の基礎方程式より出発し運動量およびエネルギーの関係から第二次近似基礎方程式を導き Permanent 形の移動波の波形を jacobi の cm 関数で表わし波の水理学的特性を明らかにしている。

(a) 微小振幅浅水波理論による波状跳水の波長の解析 微小振幅浅水波理論による波速 c は次式で与えられる (記号は 図-4 を参照のこと)。

$$c^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h_2}{L} \dots\dots\dots (8)$$

波状跳水の第一波付近では $c \approx V_2 \approx V_1$ であって, $c = V_2$ とおけば定常波となるから

$$V_2^2 = \frac{gL}{2\pi} \tanh \frac{2\pi h_2}{L} \dots\dots\dots (9)$$

(9) 式の両辺を h_2 にて割り (3)式および

$F_1 = V_1^2/g h_1$ により

$$F_1 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 = \frac{L}{2\pi h_2} \tanh \frac{2\pi h_2}{L} \dots\dots\dots (9)'$$

(9)' 式に (5)' 式を代入して次式を得る。

$$\left(\frac{L}{h_2}\right) \tanh \left(\frac{2\pi h_2}{L}\right) - \pi \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 1\right] = 0 \dots\dots\dots (10)$$

(b) クノイド波の理論による波状跳水の波長と振幅の解析 クノイド波の波長 L は次式で示される⁽⁶⁾。

$$L = 2A F_1'(\pi/2, k) \dots\dots\dots (11)$$

ここに $F_1'(\pi/2, k)$ は第一種完全楕円積分である。

$$A = \frac{2q}{3g \cos \alpha [h_1' - (q^2/gh_1'h_2' \cos \alpha)]} \dots\dots\dots (12) \quad k^2 = \frac{h_1' - h_2'}{[h_1' - (q^2/gh_1'h_2' \cos \alpha)]} \leq 1 \dots\dots\dots (13)$$

図-4 より, $h_1' = h_2 + a$, $h_2' = h_2 - a$ $\dots\dots\dots (14)$

(14) 式を (12) 式に代入し, (4)' 式と $F_1 = (q^2/gh_1^3)$ により整理して無次元表示すれば

$$\frac{L}{h_2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - \cos 2\alpha\right] \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)^2\right]}{2 \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)\right] \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)^2\right] \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - 1\right] \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - \cos 2\alpha\right]}} \dots\dots\dots (15)$$

(11) 式に (15) 式を代入して

$$\left(\frac{L}{h_2}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - \cos 2\alpha\right] \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)^2\right]}{2 \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)\right] \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)^2\right] \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - 1\right] \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - \cos 2\alpha\right]}} \cdot F_1' \left(\frac{\pi}{2}, k\right) \dots\dots\dots (16)$$

$$F_1'(\pi/2, k) \text{ は } F_1' \left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n}\right)^2 k^{2n} + \dots \right\},$$

$$0 < k < 1 \dots\dots\dots (17)$$

で表わされるから, 近似的に第一項のみをとり (16) 式に代入して次式をうる。

$$\left(\frac{L}{h_2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - \cos 2\alpha\right] \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)^2\right]}{2 \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)\right] \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)^2\right] \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right) - 1\right] \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - \cos 2\alpha\right]}} \dots\dots\dots (18)$$

$$\alpha \cong 0 \text{ のときは } \left(\frac{L}{h_2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 1\right] \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)^2\right]}{2 \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)\right] \left[1 - \left(\frac{a}{h_2}\right)^2\right] \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 1\right]}} \dots\dots\dots (19)$$

微小振幅浅水波理論と比較するために $\alpha \cong 0$, $a \cong 0$ とするときは次式を得る。

$$\left(\frac{L}{h_2}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 1\right]}{2 \left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 - \left[\left(\frac{h_2}{h_1}\right) + 1\right]}} \dots\dots\dots (20)$$

(c) (a) と (b) に関する考察 図-5 に (10) 式, (20) 式の (L/h_2) と (h_2/h_1) の関係および (18) 式において $\alpha=1/500$, $(a/h_2)=1/8$ のときの (L/h_2) と (h_2/h_1) の関係を示した。図-5 中に Ippen・Harleman らと岩佐助教の実験値をそれぞれ文献 11) の 図-5 と文献 13) の 図-1 とから計算して記入し, さらに Favre⁽¹⁰⁾ の波状段波に関する実験値も示した。図-5 からわかるように波状跳水の (L/h_2) の値は 3~10 程度であつて (h_2/h_1) が小なるほど (L/h_2) は大きい値をとることを示している。波状跳水の波長と共軛水深との関係は微小振幅浅水波理論から得られた (10) 式よりもクノイド波の理論から得た (18) 式のほうが実験値とよく適合している。

図-4 Definition sketch of undular jump in sloping channels.

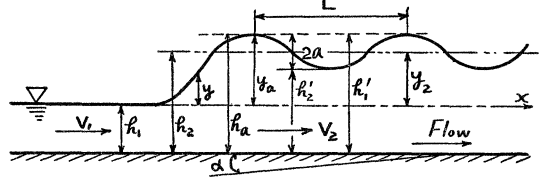
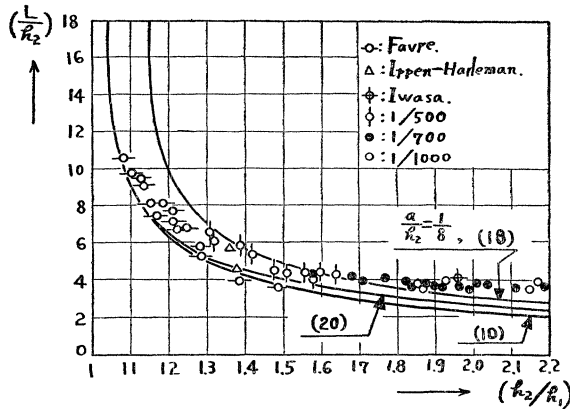


図-5 Relationship between the ratios of wave length to h_2 and the conjugate depth ratios undular jump.



(d) 波状跳水の振幅と共軛水深との関係 Boussinesq による浅水波は、波速を次式で示している^{(11) (12)}。

$$c = \sqrt{g h_1} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{y}{h_1} + \frac{h_1^2}{6y} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \dots\dots\dots (21)$$

$c = V_1$ とおけば波状跳水の波は定常波となるから

$$F_1 = \left(1 + \frac{3}{4} \frac{y}{h_1} + \frac{h_1^2}{6y} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \dots\dots\dots (22)$$

$y = y_2$ のとき $(\partial^2 y / \partial x^2) = 0$ であるから (22) 式は

$$F_1 = (1 + 3 y_2 / 4 h_1)^2 \dots\dots\dots (23)$$

Keulegan・Patterson⁽¹⁵⁾ らは波状段波をあつかつた論文において理論的に、 $y_a = 3 y_2 / 2$ と結論づけているから

$$y_2 = 2(h_2 - h_1 + a) / 3 \dots\dots\dots (24)$$

(24) 式を (23) 式に代入して

$$F_1 = [1 + (h_2/h_1) + (a/h_1)]^2 / 4 \dots\dots\dots (25)$$

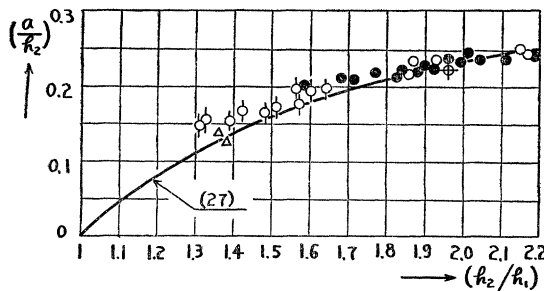
(25) 式と (5)' 式により整理して次式を得る。

$$\left(\frac{a}{h_1} \right) = \sqrt{2 \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right) + 1 \right]} - \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right) + 1 \right] \dots\dots\dots (26)$$

クノイド波の理論による波長の解析では (a/h_2) をパラメーターとしているから (a/h_2) で表わすと次式をうる。

$$\left(\frac{a}{h_2} \right) = \left(\frac{h_1}{h_2} \right) \left\{ \sqrt{2 \left(\frac{h_2}{h_1} \right) \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right) + 1 \right]} - \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right) + 1 \right] \right\} \dots\dots\dots (27)$$

図-6 Relationship between the ratios of wave amplitude to h_2 and the conjugate depth ratios of undular jump.



(27) 式の関係を図-6 に示す。図中の他の研究者による実験値は 図-5 の場合と同様である。実験値と (27) 式とはほぼ一致して共軛水深の増加にともない振幅が増加することを示している。図-5, 6 より (h_2/h_1) が増加するにしたがい (L/h_2) が減少し、 (a/h_2) は増加することが知られる。

(3) 露出射流の Froude 数と Reynolds 数との関係

測定する位置を h_0 点 (水門下流 Vena Contracta の位置) とし、Froude 数 F_{r0} と Reynolds 数 R_{e0} の関

係を求めた。実験結果を示すと 図-7 の如くである。Fr₀ と R_{eo} の関係は R_{eo} の増加にともない Fr₀ は減少している。比較のために同一水路で制水門を設けず等流状態で行つた実験の結果を示すと 図-8 のごとくであり、跳水を生ぜしめた時の結果と全く反対の傾向を有している。図-8 の傾向は Priest・Bligh らが急勾配水路における流体自由表面の不安定性について行つた実験の結果を示した論文¹⁷⁾の 図-1 を見ても (Reynolds 数の

図-7 Relationship between the Reynolds number and the Froude number for different inclinations of channel bottom in conditions of hydraulic jumps.

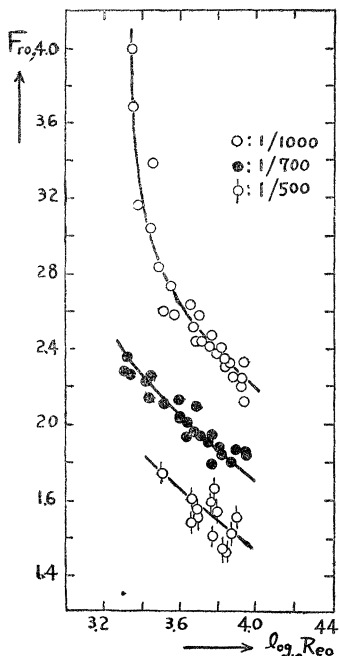
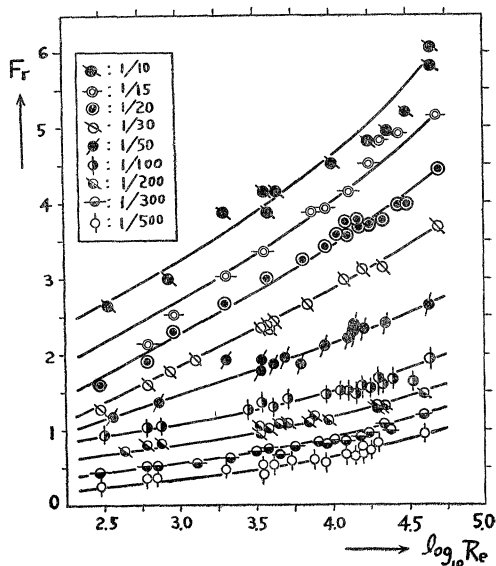


図-8 Relationship between the Reynolds number and the Froude number for different inclinations of channel bottom. (in uniform flow)



範囲が異なるけれども) 同傾向を有している。

また Assiouty は前論文¹⁷⁾の討議においても同傾向を有することが論文¹⁸⁾の 図-3 に示されている。

(4) 跳水と潜り流出との限界および潜り流出の領域

図-9 の記号を使用して解析を進める。水門の収縮係数を c_c, 水門の開きを h_g とすると h₁ は h₁ = c_ch_g で表わされる。単位幅流量 q は

$$q = Q/B = c_c h_g \sqrt{2g(H - h_s)} = h_1 \sqrt{2g(H - h_s)} \quad (28)$$

h_s = h₁ + Δh₁' (1) 式と (2) より P₃ を消去して (3) 式と (28) 式で整理し次式をうる。

$$h_s^2 - \left(\frac{4h_1}{\cos \alpha} \right) h_s + \left(\frac{4h_1 H}{\cos \alpha} - \cos 2\alpha h_2^2 \right) = 0 \quad (29)$$

(29) 式を h₁² で割り無次元表示すれば

$$\left(\frac{H}{h_1} \right) = \frac{\cos \alpha}{4} \left[\cos 2\alpha \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 - \left(\frac{h_s}{h_1} \right)^2 \right] + \left(\frac{h_s}{h_1} \right) \quad (30)$$

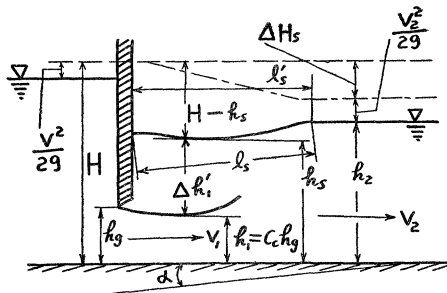
α ≃ 0 の場合は

$$\left(\frac{H}{h_1} \right) = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 - \left(\frac{h_s}{h_1} \right)^2 \right] + \left(\frac{h_s}{h_1} \right) \quad (31)$$

跳水と潜り流出との限界は (h_s/h₁) = 1 の場合であるから (30) 式 (31) 式はそれぞれ次のごとくなる。

$$\left(\frac{H}{h_1} \right) = \frac{\cos \alpha}{4} \left[\cos 2\alpha \left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 - 1 \right] + 1 \quad (32) \quad \left(\frac{H}{h_1} \right) = \left[\left(\frac{h_2}{h_1} \right)^2 + 3 \right] / 4 \quad (33)$$

図-9 Definition sketch of submerged efflux under sluice gate.



(32)式、(33)式は跳水と潜り流出の限界を表わす式である。ここで Froude 数の自乗 F_1 と (h_2/h_1) の関係で表示した跳水と潜り流出の限界および潜り流出の発生領域を求めよう。図-9 における記号を用いて H を表わせば

$$H = h_2 + (V_2^2/2g) + \Delta H_s \dots\dots\dots (34)$$

(34) 式の両辺を h_1 で割り (3) 式と $F_1 = V_1^2/gh$ にて整理し次式をうる。

$$\left(\frac{H}{h_1}\right) = \left(\frac{h_2}{h_1}\right) + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \frac{F_1}{2} + \frac{\Delta H_s}{h_1} \dots\dots\dots (35)$$

ここに ΔH_s は潜り流出によるエネルギー損失である。

$$4H_s = \sin \alpha l_s' + \left(\frac{V_1^2}{2g} + h_s\right) - \left(\frac{V_2^2}{2g} + h_2\right) \dots\dots\dots (36)$$

(36) 式の両辺を h_1 で割り (3) 式と $F_1 = V_1^2/gh_1$ にて整理し (35) 式に代入して次式を得る。

$$(H/h_1) = \sin \alpha (l_s'/h_1) + (F_1/2) + (h_s/h_1) \dots\dots\dots (37)$$

(37) 式と (30) 式より

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = \frac{1}{\cos 2\alpha} \left[\frac{2F_1}{\cos \alpha} + \left(\frac{h_s}{h_1}\right)^2 + 4 \tan \alpha \left(\frac{l_s'}{h_1}\right) \right] \dots\dots\dots (38)$$

l_s' は $h_s = h_1$ のとき $l_s' = l_j'$ であるから (図-2 参照) F_1 をパラメーターとした (l_j'/h_1) の式を利用すれば傾斜水路における跳水と潜り流出の限界を求めうる。しかしながら通常の表示方法では、勾配が変化するとともに F_1 をパラメーターとした実験式が変化するので、1個の式で (l_j'/h_1) を表わすことができない。ゆえに種々検討した結果、この欠点を除いている Vega-Vischi¹⁹⁾ の式を利用することとした。

Vega-Vischiは文献4)の Proc. Paper 1401 と 1405 に対する討議において文献4)と U.S.B.R. における実験値を整理して次式を求めている。

$$\log_{10} \left(\frac{l_j}{h_c}\right) = 1.36 \sqrt{1 - \left[\log_{10} 10 \left(\frac{h_1}{h_c}\right)\right]^2} \dots\dots\dots (39)$$

ここに h_c は限界水深 ($h_c^3 = q^2/g$)、 $l_j = \cos \alpha l_j'$ であつて水路勾配が $\alpha = 0 \sim 0.28$ におけるこの曲線と実験値との誤差は 5.07% を越えないことを述べている。(39) 式に $(l_j/h_c) = (l_j/h_1) F_1^{-1/3}$ と $(h_1/h_c) = F_1^{1/3}$ を代入して書き直せば

$$(l_j/h_1) = F_1^{1/3} \cdot 10^f \dots\dots\dots (40)$$

ここに f は、 $f = 1.36 \sqrt{1 - (\log_{10} 10 F_1^{-1/3})^2}$ である。(38) 式に $l_j = \cos \alpha l_j' = \cos \alpha l_s'$ と (40) 式を代入して次式を得る。

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = \frac{1}{\cos 2\alpha} \left[\frac{2F_1}{\cos \alpha} + \left(\frac{h_s}{h_1}\right)^2 + 4 \left(\frac{\tan \alpha}{\cos \alpha}\right) F_1^{1/3} \cdot 10^f \right] \dots\dots\dots (41)$$

(41) 式において $\alpha = 0$ の場合は

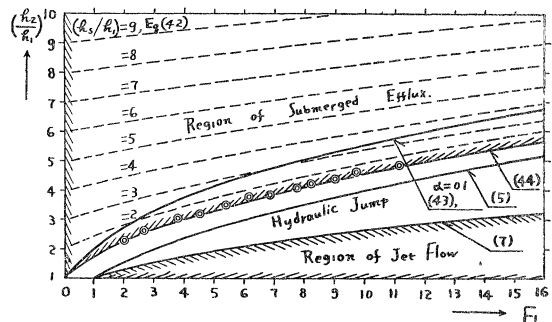
$$(h_2/h_1)^2 = [2F_1 + (h_s/h_1)^2] \dots\dots\dots (42)$$

潜り流出と跳水との限界は $(h_2/h_1) = 1$ であるから (41) 式と (42) 式に、この条件を代入してそれぞれ次式を得る。

$$\left(\frac{h_2}{h_1}\right)^2 = \frac{1}{\cos 2\alpha} \left[1 + \frac{2F_1}{\cos \alpha} + 4 \left(\frac{\tan \alpha}{\cos \alpha}\right) F_1^{1/3} \cdot 10^f \right] \dots\dots (43) \quad (h_2/h_1)^2 = (2F_1 + 1) \dots\dots\dots (44)$$

(43) 式と (44) 式が跳水と潜り流出との限界を表わす式である。(42) 式の (h_2/h_1) 、 (h_s/h_1) と F_1 の関係、および (44) 式の (h_2/h_1) と F_1 との関係を図-10 に示した。また参考として (43) 式において $\alpha = 0.1$ の場合を計算して示した。水平水路 ($\alpha = 0$) の場合は (44) 式の曲線より上の領域が潜り流出を生ずる領域である。(7) 式の曲線の下側は 3. の(1)で考察したごとく射流の領域であつて跳水は発生しない。潜り流出に関する実験は 図-1 に示した実験装置において、はじめに跳水を生ぜしめておき、次に下流端の水位調節板を徐々に上げて

図-10 Region of jet flow and the limit between hydraulic jump and submerged efflux.



て潜り流出を生ぜしめ、潜り流出と跳水との限界に関する実験を行った。このときの h_1 の測定は非常に困難のため $c_c = 0.61$ として $h_1 = 0.61 h_g$ の関係から求めた。潜り流出と跳水との理論的限界 $(h_2/h_1) = 1$ のときは、水門から流出した射流上に表面渦が乗つて、表面渦の先端が水門と射出水の Vena Contracta の位置との間を變動

して、表面渦の先端は水門に接触したり、Vena Contracta の位置にあつたりしている状態である。この状態のときは潜り流出と呼ぶよりも、むしろ跳水現象に近いものであつて、このときは表面渦の先端部の変動が激しいので h_s の測定が困難である。ゆえに実験の場合は表面渦の先端が常時、水門に接触している状態のときを跳水と潜り流出との限界状態と見なすことにする。表面渦の先端が常時水門に接触しているときの Vena Contracta の位置における (h_s/h_1) の実験値は F_1 に無関係に $(h_s/h_1) \doteq 3/2$ であることを予備実験から得た。図-10 の実験値は潜り流出と跳水との限界を $(h_s/h_1) \doteq 3/2$ の時が限界状態と見なして測定した結果である。

4. 結 論

以上の理論および実験の結果から明らかにすることができた事項を要約すると次のごとくである。

- (1) 限界水深比以下では跳水を生ぜず射流のみとなって流出する。
- (2) 水平水路における波状跳水の波長と共軛水深との関係は振幅を考慮しないとき、(10) 式と (20) 式で示し得る。

振幅を考慮するときは (19) 式で表わされる。傾斜水路における波長と共軛水深との関係はクノイド波の理論から得られた (18) 式により表わされる。波状跳水の振幅と共軛水深との関係は (26) 式または (27) 式で表わされ (a/h_2) の最大値は 0.25 程度である。 (h_2/h_1) 、 (L/h_2) そして (a/h_2) との関係は (h_2/h_1) の増加にともない (L/h_2) は減少し、 (a/h_2) は増加する。

(3) 跳水における露出射流の Froude 数と Reynolds 数との関係は、跳水を生ぜしめず等流状態で流下したときの Froude 数と Reynolds 数との関係と全く反対の傾向をもっている。

(4) 傾斜水路における跳水と潜り流出との限界は (32) 式および (43) 式で表わされ、潜り流出の発生領域は (31) 式および (41) 式で表わされる。 $\alpha \neq 0$ とみなし得るときは、潜り流出と跳水との限界は (33) 式および (44) 式で表わされ、潜り流出の領域は (31) 式および (42) 式で表わされる。

最後に実験ならびに計算に助力を与えられた河合昭治氏 (名古屋市役所)、浅見喜信氏 (鈴木建設 K K) に謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Kindsvater, C.E.: Hydraulic Jump in Sloping Channel, Trans. A.S.C.E., Nov., 1942
- 2) Stevens, J.C.: Discussion for Hydraulic Tests on the Spillways of the Madden Dams, by R.R. Randolph, Trans. A.S.C.E., May, 1943
- 3) 岡田篤也・安芸周一: 逆傾斜水路における跳水現象の実験的研究, 電力技術研究所報, Vol. 5, No. 6, Dec., 1955
- 4) Bradley, J.N., and A.J. Peterka: The Hydraulic Design of Stilling Basins, Proc. A.S.C.E., HY. 5, Oct., 1957, Proc. Paper 1401~1528
- 5) Bunyan, J.E.: Some Aspects of the Design of Hydraulic Structures in Alluvium, The Institution of Civil Engineers, Proc. Vol. 10, June, 1954
- 6) de Mello Flores, J.O., Le Ressaut: La Houille Blanche, Déc., 1954
- 7) Rouse, H., T.T. Siao, and S. Nagaratnam: Turbulence Characteristics of the Hydraulic Jump, Proc. A.S.C.E., HY. 1, Feb., 1958
- 8) Ariemma, R.: Nuove Formule per il Calcolo delle Dimensioni del Risalto Idraulico in Alvee a Forte Pendenza e delle Perdite di Energia ad esso Relative, Energia Elettrica, 35-7, July, 1958
- 9) Lemoine, R.: Sur les Ondes Positives dans les Canaux et sur le Ressaut Ondule, La Houille Blanche, 3, No. 2, 1948
- 10) Favre, H.: Étude Théorique et Experimentale des Ondes de Translation dans les Canaux Découverts, Dunod, Paris, 1935
- 11) Ippen, A.T., and D.R.F. Harleman: Verification of Theory for Oblique Standing Waves, Proc. A.S.C.E., Vol. 80, Oct., 1954
- 12) Boussinesq, J.: Wave Motion, (Chapter XI) by G.H. Keulegan, Engineering Hydraulics, John Wiley and Sons, 1950
- 13) Iwasa, Y.: Undular Jump and its Limiting Condition for Existence, Proc. of the 5th Japan National Congress for App. Mech., 1955
- 14) Bakhmeteff, B.A., and A.E. Matzke: The Hydraulic Jump in Terms of Dynamic Similarity, Trans. A.S.C.E., Nov., 1952
- 15) Keulegan, G.H., and G.W. Patterson, Mathematical Theory of Irrotational Translation Waves, Jour. Res. of the NBS, Rp. 1273, Vol. 24, 1940
- 16) 岩佐義明: クノイド波と孤立波に関する解析的研究, 土木学会論文集, 第32号, 昭和31年3月
- 17) Priest, M.S., and A. Baligh: Free Surface Instability of Liquids in Steep Channels, Trans. A.G.U., Vol. 35, No. 1, 1954
- 18) Assiouty, M.E.: Discussion of Free Surface Instability of Liquids in Steep Channels, Trans. A.G.U., Vol. 35, No. 1, 1954
- 19) Vega-Vischi, S.: Discussion of Hydraulic Design of Stilling Basins; Hydraulic Jump on a Horizontal Apron and Hydraulic Jump on a Sloping Apron, by J.N. Bradley and A.J. Peterka, Proc. A.S.C.E., Vol. 84, April, 1958 (昭.34.8.19)